UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
SEGUNDO EXAMEN FINAL
ÁLGEBRA LINEAL (1220)
3 DE DICIEMBRE DE 2019

SEMESTRE 2020 - 1

Instrucciones: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los **6** reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración del examen es de 2.0 horas.

1. Determinar si el sistema $(M,\ *)$ es un grupo, donde $M=\left\{\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mid \theta\in\mathbb{R}\right\}$ y $*$ es la multiplicación usual de matrices. Considerar que se cumple:

$$(M_1 * M_2) * M_3 = M_1 * (M_2 * M_3) \quad \forall M_1,\ M_2,\ M_3 \in M.$$

10 puntos

2. Determinar una base del espacio vectorial V generado por el conjunto $G=\{2x^2-x+1,\ 3x+1,\ x^2+1\}$ y verificar si el polinomio $p(x)=x^2+3x+2$ pertenece a V.

20 puntos

3. Sean los espacios vectoriales $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R};\ i^2=-1\}$ y $P=\{ax+b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ definidos sobre $\mathbb{R}$ y sea la transformación lineal $T:\mathbb{C}\to P$ con regla de correspondencia

$$T(a+bi)=(a-2b)x-a$$

Determinar:

a) El núcleo de la transformación T.

b) La dimensión del recorrido de T.

c) La matriz asociada a T respecto a las bases $A=\{1-2i,\ i\}$ del dominio y $B=\{2x,\ 1\}$ del codominio.

20 puntos

4. Sea el operador $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con regla de correspondencia

$$S(x,y,z)=(2x+y+z,\ x+2y+z,\ x+y+2z)$$

Determinar

a) Los valores característicos de S.

b) Los espacios característicos de S.

c) Una matriz P que diagonalice al operador S.

20 puntos

5. Sea $W=\{(x,y,z)\,|\,x-2y-z=0;\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Determinar el vector $\bar{w}\in W$ más cercano al vector $\bar{v}=(1,1,0)$, considerando el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$; y obtener la distancia entre los vectores $\bar{v}$ y $\bar{w}$.

20 puntos

6. Determinar si el operador lineal $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$Q(x,y,z)=(2x+5y-z,\ 5x+10y+3z,\ -x+3y+11z)$$

es un operador simétrico respecto al producto interno usual en $\mathbb{R}^3$.

10 puntos