ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO
FASCÍCULO

Leda Speziale San Vicente

COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA LINEAL

AGOSTO DE 2011

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Espacios con producto interno
Fascículo

Leda Speziale San Vicente

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

SPEZIALE SAN VICENTE, Leda. *Espacios con producto interno. Fascículo.* México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2009, 49 p.

Espacios con producto interno. Fascículo

Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.
ISBN 978-607-02-0430-2

Primera edición, 2009.

Impreso y hecho en México.

ÍNDICE

PRÓLOGO

La finalidad de este trabajo es servir de ayuda a los estudiantes de Álgebra Lineal, sobre todo en el tema de *Espacios con producto interno*, por lo que cubre los subtemas correspondientes en el programa vigente de la asignatura. Su contenido está basado, en su mayoría, en el fascículo que con el nombre de *Teorema de Proyección* escribí en el año de 2001.

Este fascículo, ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO, está elaborado con la intención de que el lenguaje empleado en él sea, sin perder la formalidad académica, sencillo, coloquial y accesible a los lectores. Además, la obra contiene un gran número de ejemplos, cuya resolución se efectúa con todo detalle para poder ser seguida sin dificultad.

Segura de que la intención y la finalidad con las que se elaboró el trabajo no se lograron a plenitud, ni fue posible evitar la presencia de errores, agradeceré profundamente el señalamiento de éstos y las sugerencias para el mejoramiento de la obra que los lectores tengan a bien enviarme.

Por último, deseo agradecer a la Facultad de Ingeniería y a sus autoridades la oportunidad que me dieron de escribir este fascículo. Agradezco también a la ingeniera, Cecilia Teresa Carmona T. por sus enseñanzas en materia de computación, a los físicos Juan Velázquez Torres y Sergio R. Arzamendi Pérez, responsables de la asignatura, por sus valiosos comentarios; a la licenciada Amelia G. Fiel Rivera por su acertada y generosa orientación en cuanto a redacción y, en general, al personal de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería.

Leda Speziale San Vicente

leda@cancun.fi-a.unam.mx
Cubículo D-6
Ciencias Aplicadas
División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería, UNAM

Febrero 2009

1. INTRODUCCIÓN

En los vectores geométricos (segmentos de recta dirigidos) los conceptos de medida están relacionados con una operación denominada *producto escalar* o *producto punto* que se aplica a dos vectores y se obtiene como resultado un número.

En los espacios $\mathbb{R}^2$ (parejas de números reales) y $\mathbb{R}^3$ (ternas de números reales), cada elemento corresponde al vector geométrico que va del origen al punto cuyas coordenadas son los elementos de la pareja (en el plano) o de la terna (en el espacio); es decir, el *vector de posición* del punto. En estos vectores geométricos, el módulo o tamaño es la raíz cuadrada del producto escalar del vector por sí mismo. El producto escalar se utiliza también en el cálculo del ángulo entre vectores, en la proyección de un vector sobre otro y en algunos otros conceptos métricos.

En todos los espacios vectoriales, es muy útil y conveniente considerar *conceptos métricos* como son magnitud, ángulo y distancia; para definirlos se introduce una operación llamada *producto interno,* la cual es la generalización del producto escalar de vectores geométricos a vectores cualesquiera.

En todo espacio, ya sea de polinomios, funciones, matrices o eneadas de reales o complejos, es posible definir una o varias de estas operaciones denominadas productos internos. En $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y en general en $\mathbb{R}^n$ pueden definirse un gran número de productos internos, pero el producto escalar, que es uno de ellos, suele llamarse *el producto interno usual* en $\mathbb{R}^n$.

En las primeras secciones de este fascículo se estudian los espacios vectoriales con diferentes productos internos, tanto con números reales como con complejos, y con ellos se generalizan los conceptos geométricos haciendo énfasis en la importancia de la ortogonalidad, ya que ella permite simplificaciones considerables en las aplicaciones.

En la quinta sección se presenta un método para formar una *base ortogonal*, diferente al llamado Proceso de Gram–Schmidt. En la sexta se trata, tanto el concepto de tamaño llamado *norma*, como lo que se entiende por *normalización de vectores*.

En las secciones novena y décima se aplica la ortogonalidad a la *proyección de un vector sobre un subespacio* y a la obtención del vector que teniendo ciertas restricciones (perteneciente a un subespacio) sea el *más cercano* a un vector determinado. Esto, llamado *teorema de proyección*, tiene gran utilidad en las aplicaciones.

La sección undécima trata el *método de mínimos cuadrados* que es una particularidad del teorema de proyección, donde el producto interno considerado es el *producto punto* llevado a eneadas que pueden ser de más de tres elementos.

2. DEFINICIONES PRELIMINARES

2.1 Espacio vectorial sobre un campo

Un *espacio vectorial* es un conjunto V acompañado de un sistema algebraico (K , +, ·) con estructura de campo. El conjunto llamado espacio vectorial sobre el campo debe ser tal que:

- en él esté definida una operación + llamada *adición* que forme con el conjunto un sistema algebraico (V, +) con estructura de *grupo abeliano*;
- esté definida una regla (seudo-operación) llamada *multiplicación por un escalar*, aplicable a dos elementos: el primero perteneciente al campo K, y el segundo, al espacio V, cuyo resultado sea un elemento del espacio V; dicha regla debe satisfacer las siguientes condiciones (axiomas):

  $\forall \alpha, \beta \in K \quad \text{y} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$

  - $\alpha \bar{u} \in V$
  - $(\alpha + \beta)\, \bar{u} = \alpha \bar{u} + \beta \bar{u}$
  - $\alpha \, (\bar{u} + \bar{v}) = \alpha \bar{u} + \alpha \bar{v}$
  - $\alpha (\beta \bar{u}) = (\alpha \beta)\, \bar{u}$
  - si 1 es la unidad de K, entonces $1\, \bar{v} = \bar{v}$

En otras palabras, *espacio vectorial* es un conjunto en el que se cumplen *diez* condiciones: cinco respecto a la estructura de grupo abeliano con la adición y las otras cinco que involucran la multiplicación por un escalar.

Si el campo es el de los números reales, suele decirse que se trata de un *espacio real*, y si el campo es el de los números complejos, se dice que es un *espacio complejo*.

2.2 Vector y escalar

Se llama *vector* a todo elemento de un espacio vectorial.
Escalar es todo elemento del campo.

Ejemplo: El conjunto P_{3C} de los polinomios de grado menor o igual a tres con coeficientes complejos es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, y respecto a las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales en los polinomios. Por lo que

$(3-i)\ x^3 + 2\ x^2 - 4i\ x + (1 + 7i)$ es un vector del mencionado espacio, y los números reales, como 5, 6 , −1, son escalares.

El elemento idéntico respecto a la adición en todo espacio recibe el nombre de *vector nulo* o *vector cero.*

2.3 Isomorfismo entre espacios vectoriales

Isomorfismo entre dos espacios V y W sobre el mismo campo K, es una función f cuyo dominio es V y cuyo codominio es W, es decir, $f\colon V \to W$. Además, (usando $+_V$ para la adición en V y $+_W$ para la adición en W), f debe ser biyectiva y tal que

$\forall \quad \bar{u},\bar{v} \in V \quad$ y $\quad \forall \quad \alpha \in K \quad \begin{cases} f(\bar{u} +_V \bar{v}) = f(\bar{u}) +_W f(\bar{v}) \\ f(\alpha \cdot \bar{u}) \ \ = \alpha \cdot f(\bar{u}) \end{cases}$ donde el punto de la izquierda en la segunda igualdad es la multiplicación por un escalar en V y el punto de la derecha la multiplicación por un escalar en W.

Si existe un isomorfismo entre dos espacios, se dice que éstos son *isomorfos* entre sí.

2.4 Subespacio

Un subespacio de un espacio vectorial V es un subconjunto de V, tal que, respecto al campo de V y a las mismas reglas de adición y de multiplicación por escalar de V es por sí mismo un espacio vectorial.

En otras palabras, *subespacio* de V es un subconjunto de V que cumple las diez condiciones de espacio, respecto a los *escalares*, la *adición* y la *multiplicación por escalar* del espacio V.

Ejemplo: $A = \left\{ ax^2 + 3bx + a + b \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$, subconjunto de P_{3C}, satisface las diez condiciones de espacio para el campo de los reales, la adición y multiplicación por escalar usuales en los polinomios. Por lo tanto, A es un subespacio de P_{3C}.

El subconjunto de un espacio que contiene sólo al vector nulo es un subespacio que recibe el nombre de *espacio nulo*.

2.5 Combinación lineal

Una combinación lineal de n vectores es una *suma* de n sumandos, donde cada sumando está formado por uno de los vectores multiplicado por un escalar, pero ninguno de los n vectores está en más de un sumando.

Así, una combinación lineal de los vectores $\bar{a} = x^2 + 2$; $\bar{b} = -x + 5$; $\bar{c} = 3x^2 + 2x - 1$ es:
$3\bar{a} - \bar{b} + 4\bar{c} = (3x^2 + 6) + (x - 5) + (12x^2 + 8x - 4) = 15x^2 + 9x - 3$.

Otra combinación de los mismos vectores es: $0\bar{a} + 7\bar{b} + 0\bar{c} = 7\bar{b} = -7x + 35$; y una más, $-2\bar{a} + 5\bar{b} = -2x^2 - 5x + 21$.

2.6 Dependencia lineal

Un vector depende linealmente de otros si puede expresarse como una combinación lineal de esos otros.

De esta manera, el vector $15x^2 + 9x - 3$ (mencionado en 2.5), depende linealmente de los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$. El vector nulo siempre puede expresarse como combinación lineal de otros vectores, ya que: $\bar{0} = 0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \cdots + 0\bar{v}_n$. Por lo que, el vector nulo *siempre* es linealmente dependiente de otros vectores.

2.7 Conjunto linealmente dependiente

Un conjunto de vectores es *linealmente dependiente* si *al menos* uno de sus elementos puede expresarse como combinación lineal de los otros. Todo conjunto que contiene al vector nulo es linealmente dependiente.

En particular, si el conjunto *sólo* contiene al vector nulo, se considera linealmente dependiente.

2.8 Conjunto linealmente independiente

Un conjunto de vectores es *linealmente independiente* si *ninguno* de sus vectores puede expresarse como combinación lineal de los otros del conjunto. Es decir, es independiente si no es dependiente.

En particular, si el conjunto tiene sólo un elemento y él es un vector diferente del vector cero, dicho conjunto *se considera* linealmente independiente.

Un método para determinar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente, consiste en plantear la llamada *ecuación de dependencia lineal* del conjunto, que para el conjunto $\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_n \}$ es: $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}$. Si dicha ecuación tiene como *única* solución la trivial, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, entonces el conjunto es linealmente independiente. En caso contrario, es dependiente.

2.9 Conjunto generador

Un conjunto G es generador de un espacio V si G es un subconjunto de V y, además, *todo* elemento de V puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de G.

Ejemplo: El conjunto $G = \{ x^2 + 2, -x^2, 7 \}$ es generador del espacio $T = \{ ax^2 + b \mid a, b \in \mathbb{R} \}$, ya que, además de que G es un subconjunto de T, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, siempre existen α_1, α_2 y α_3 tales que: $\alpha_1(x^2 + 2) + \alpha_2(-x^2) + \alpha_3(7) = ax^2 + b$.

Para determinar las alfas, se debe resolver el sistema:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = a \qquad \text{.....................} (1)$$

$$2\alpha_1 + 7\alpha_3 = \text{b} \qquad \text{.....................} (2)$$

Restando de (2) la ecuación (1) multiplicada por dos, se obtiene:

$$7\alpha_3 + 2\alpha_2 = b - 2a \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2}(b - 2a - 7\alpha_3); \text{ de } (1),\ \alpha_1 = a + \alpha_2 .$$

El sistema es compatible, aunque indeterminado, ya que para cada valor real de α_3 se obtiene un α_2 y, por ende, un α_1.

Sin embargo, G no es generador del espacio $P_2 = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$, pues si $b \neq 0$, no existen alfas tales que $\alpha_1(x^2 + 2) + \alpha_2(-x^2) + \alpha_3(7) = ax^2 + bx + c$.

2.10 Base de un espacio

Se llama *base* de un espacio V, a un conjunto de vectores que sea generador de V y, además, linealmente independiente.

Ejemplo: Una base del espacio, $P_2 = \{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$, es el conjunto $A = \{ x^2, x, 1 \}$. Otra base del mismo espacio es $B = \{x^2 + x + 1, -x + 7, -2x^2 + x - 3\}$.

En particular, el *espacio nulo* no tiene base. Pero, salvo dicho espacio, todos los demás poseen una infinidad de bases.

Todas las bases de un mismo espacio están formadas por el mismo número de elementos, es decir, tienen la misma cardinalidad.

2.11 Vector de coordenadas

A la eneada de escalares que al multiplicarlos respectivamente por los elementos de una base A forman un vector $\bar{v}$ del espacio, una de cuyas bases es A, se le llama *vector de coordenadas de* $\bar{v}$ respecto a la base A y se expresa con $(\bar{v})_A$.

Ejemplo: El vector de coordenadas de $\bar{p} = -x^2 + 12$ respecto a la base $A = \{x^2, x, 1\}$ es $(\bar{p})_A = (-1, 0, 12)$ y respecto a la base $B = \{x^2 + x + 1, -x + 7, -2x^2 + x - 3\}$ es $(\bar{p})_B = (1, 2, 1)$, pues $1(x^2 + x + 1) + 2(-x + 7) + 1(-2x^2 + x - 3) = -x^2 + 12$.

2.12 Dimensión de un espacio

La *dimensión* de un espacio V es el *número* de elementos (cardinalidad) de cualquiera de sus bases. Se expresa con el símbolo *dim V*.

Ejemplo: La dimensión del espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales es tres, lo que se expresa con $dim\ P_2 = 3$.

En particular, la dimensión del *espacio nulo* (que no tiene bases) se considera, por definición, igual al *número* cero, esto es, $dim\ \{ \bar{0} \} = 0$.

3. PRODUCTO INTERNO

Un *producto interno* en un espacio vectorial es una regla que se aplica a una pareja ordenada de vectores de ese espacio y con la cual se obtiene uno y sólo un escalar del campo sobre el que está definido el espacio. Es decir, si el espacio es V sobre el campo K, *un producto interno* es una *función* cuyo dominio es el conjunto $V \times V$ (conjunto de todas las parejas ordenadas de vectores de V) y cuyo codominio es el conjunto K:

$$\mathrm{f}: V \times V \rightarrow K$$

Además, dicha regla (función) debe satisfacer cuatro condiciones (axiomas) que corresponden exactamente a las que cumple el producto punto o *producto escalar* definido en el conjunto de ternas de números reales (espacio $\mathbb{R}^3$ sobre el campo de los reales).

Si K es el campo de los complejos, α un escalar cualquiera de K y $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ son elementos cualesquiera de V, entonces el resultado de aplicar la regla a una pareja ordenada de elementos de V es un número complejo; dicha regla debe cumplir, para ser producto interno en V, las siguientes condiciones:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = \overline{f(\bar{v}, \bar{u})} \text{ (conjugado de } f(\bar{v}, \bar{u}))$$

$$f(\bar{u}, \bar{v}+\bar{w}) = f(\bar{u}, \bar{v}) + f(\bar{u}, \bar{w})$$

$$f(\alpha\bar{u}, \bar{v}) = \alpha\, f(\bar{u}, \bar{v})$$

$$f(\bar{u}, \bar{u}) > 0 \quad \forall \quad \bar{u} \neq \bar{0}$$

En un espacio vectorial se pueden definir más de un producto interno, por ejemplo en $\mathbb{R}^3$, además del producto punto, la función

$$f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que, para} \quad \bar{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 2u_2v_3 + 2u_3v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + 7u_2v_2 + 2u_3v_3$$

satisface las cuatro condiciones para ser producto interno. Aquí comprobaremos sólo la cuarta de ellas:

$$\begin{aligned} f(\bar{u}, \bar{u}) &= u_1^2 + 2u_1u_2 + 2u_2u_1 + 2u_2u_3 + 2u_3u_2 + u_1u_3 + u_3u_1 + 7u_2^2 + 2u_3^2 \\ &= u_1^2 + 4u_1u_2 + 4u_2u_3 + 2u_1u_3 + 4u_2^2 + u_3^2 + 3u_2^2 + u_3^2 \\ &= (u_1 + 2u_2 + u_3)^2 + 3u_2^2 + u_3^2 > 0, \ \forall \ \bar{u} \neq (0,0,0) \end{aligned}$$

Otro producto interno en $\mathbb{R}^3$ puede definirse con la función $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que para $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $g(\bar{u}, \bar{v}) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 6u_3v_3$.

Existen varias notaciones para expresar el producto interno de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ de un espacio, algunas de ellas son: $(\bar{u}, \bar{v})$; $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$; $\langle \bar{u} \mid \bar{v} \rangle$; $(\bar{u} \mid \bar{v})$ entre otras. En este fascículo usaremos la notación $(\bar{u} \mid \bar{v})$.

Para los vectores $\bar{u} = (1, -1, 2)$ y $\bar{v} = (3, 2, -1)$ de $\mathbb{R}^3$, se obtiene:

con el producto escalar, $(\bar{u} \mid \bar{v}) = 3 - 2 - 2 = -1$;

con la función f, $(\bar{u} \mid \bar{v}) = 3 + 2(2) + 2(-3) + 2(1) + 2(4) + (-1) + (6) + 7(-2) + 2(-2) =$

$$= 3 + 4 - 6 + 2 + 8 - 1 + 6 - 14 - 4 = -2;$$

y con la función g, $(\bar{u} \mid \bar{v}) = 2(3) + (-2) + 6(-2) = 6 - 2 - 12 = -8$.

Como puede notarse, para los mismos vectores se obtienen escalares diferentes al utilizar productos internos distintos.

Un producto interno tiene propiedades que pueden deducirse de las cuatro condiciones que lo definen; algunas de esas propiedades son:

$$(\bar{u} + \bar{v} \mid \bar{w}) = (\bar{u} \mid \bar{w}) + (\bar{v} \mid \bar{w}) \qquad (\bar{u} \mid \bar{u}) \in \mathbb{R}$$

$$(\bar{u} \mid \alpha\,\bar{v}) = \bar{\alpha}(\bar{u} \mid \bar{v}) \qquad (\bar{0} \mid \bar{u}) = (\bar{u} \mid \bar{0}) = 0$$

En el espacio de las ternas de números complejos sobre el campo complejo $\mathbb{C}^3$ ($\mathbb{C}$), un producto interno para $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se define con:

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = u_1\,\bar{v}_1 + u_2\,\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

donde $\bar{v}_1$ expresa el conjugado de la primera componente del vector $\bar{v}$; $\bar{v}_2$, el conjugado de la segunda componente; y $\bar{v}_3$, el conjugado de v_3. A este producto se le acostumbra llamar el *producto interno usual en* $\mathbb{C}^3$.

Otro producto en el mismo espacio, es el definido con

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = 3u_1\bar{v}_1 + 2u_2\bar{v}_3 + 4\,u_3\bar{v}_3 \quad \text{..........}(2)$$

Para los vectores de $\mathbb{C}^3$: $\bar{u} = (i, 1+3i, -2)$ y $\bar{v} = (0, 3-i, -1+i)$:

con el producto interno usual $(\bar{u} \mid \bar{v}) = i(0) + (1+3i)(3+i) + (-2)(-1-i) =$

$$= 0 + (3+3i^2 + i + 9i) + (2+2i) = 2 + 12i,$$

con la regla (2) $\quad (\bar{u} \mid \bar{v}) = 3(0) + 2(10i) + 4(2+2i) = 8 + 28i.$

En el espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales, se tienen entre otros, los productos internos definidos para

$$\bar{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2\ ; \qquad \bar{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

con las siguientes reglas:

$$(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{k=0}^{2} p(k)\,q(k) \quad \text{...............}(1)$$

$$(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k \quad \text{...............}(2)$$

Para los polinomios $\quad \bar{p} = 2 - 3x + x^2; \quad \bar{q} = 1 + 5x - x^2$:

$$\begin{array}{lll} p(0)=2\,; & q(0)=1 & p(0)\,q(0)=2 \\ p(1)=0\,; & q(1)=5 & p(1)\,q(1)=0 \\ p(2)=0\,; & q(2)=7 & p(2)\,q(2)=0 \end{array}$$

por lo que, con la regla (1), $(\bar{p} \mid \bar{q}) = 2 + 0 + 0 = 2$,

$$\begin{array}{lll} a_0 = 2\,; & b_0 = 1 & a_0\,b_0 = 2 \\ a_1 = -3\,; & b_1 = 5 & a_1\,b_1 = -15 \\ a_2 = 1\,; & b_2 = -1 & a_2\,b_2 = -1 \end{array}$$

y con la regla (2), $(\bar{p} \mid \bar{q}) = 2 - 15 - 1 = -14.$

En el espacio sobre el campo complejo de las matrices de orden *m por n*, con elementos complejos, un producto interno se define con: $(A \mid B) = tr(AB^*)$, que dicho con palabras, es la traza de la matriz resultante de multiplicar (con la multiplicación común de matrices) el primer factor por la conjugada transpuesta del segundo factor. Así, para las siguientes matrices A, B y D de orden 2×3:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2-i & -2i \\ 1+2i & -2+i & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} i & 5 & -2+2i \\ -3 & 0 & 1-3i \end{bmatrix}$$

$$(A \mid B) = tr\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1-2i \\ 2+i & -2-i \\ 2i & 0 \end{bmatrix} \right) = \mathrm{tr} \begin{bmatrix} 2+2i & \cdots \\ \cdots & 7-4i \end{bmatrix}.$$

En virtud de que para calcular la traza de una matriz sólo interesan los elementos de la diagonal principal, los elementos fuera de ella no se obtienen y se representan con ... .

$$(A \mid B) = 2+2i+7-4i = 9-2i$$

$$(A \mid D) = tr\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & -3 \\ 5 & 0 \\ -2-2i & 1+3i \end{bmatrix} \right)$$

$$= tr \begin{bmatrix} -i+1+10i+6+6i & \cdots \\ \cdots & 0+0-1+3-i-3i \end{bmatrix} = tr \begin{bmatrix} 7+15i & \cdots \\ \cdots & 2-4i \end{bmatrix}$$

$$(A \mid D) = 9+11i.$$

4. ORTOGONALIDAD

El concepto geométrico de perpendicularidad de vectores, expresado con $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, se generaliza con el concepto de ortogonalidad (referido a un producto interno determinado), como sigue: *dos vectores son ortogonales si su producto interno es cero.*

Los vectores $\bar{u} = (1, -1, 0)$, $\bar{v} = (0, 1, -5) \in \mathbb{R}^3$ geométricamente no son perpendiculares, ya que $\bar{u} \cdot \bar{v} = -1$; sin embargo, son ortogonales respecto al producto interno definido anteriormente con la función f, pues:

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = (1)(0) + 2(1)(1) + 2(-1)(0) + 2(0)(1) + 2(-1)(-5) + (1)(-5) + (0)(0) + 7(-1)(1) + 2(0)(-5) =$$
$$= 0 + 2 + 0 + 0 + 10 - 5 + 0 - 7 + 0 = 0.$$

El vector $\bar{w} = (1, 1, -2) \in \mathbb{R}^3$ es tal que: $\bar{u} \cdot \bar{w} = 0$; pero

$f(\bar{u}, \bar{w}) = 1 + 2 - 2 + 4 + 0 - 2 + 0 - 7 + 0 = -4 \neq 0$ y

$g(\bar{u}, \bar{w}) = 2(1) + (-1) + 6(0) = 1 \neq 0$; por lo que, los vectores $\bar{u}$ y $\bar{w}$ no son ortogonales respecto a los productos internos definidos con las funciones f y g (expresadas en la sección 3), aunque sí lo son con relación al producto escalar o *producto interno usual* en $\mathbb{R}^3$.

En el espacio de matrices de igual orden y con elementos complejos, la matriz A es ortogonal a la matriz F, respecto al producto interno $(A \mid B) = tr(AB^*)$ si

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} 4 & 2-i & -2i \\ 3-2i & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ debido a que:}$$

$$(A \mid F) = tr\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3+2i \\ 2+i & 0 \\ 2i & 2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= tr \begin{bmatrix} 4+4i+4i-2-6i & \cdots \\ \cdots & 0+0-2-2i \end{bmatrix} = 2+2i-2-2i = 0.$$

5. CONJUNTO ORTOGONAL

Un conjunto se dice que es ortogonal respecto a un producto interno, si todo vector de dicho conjunto es ortogonal a cada uno de los otros vectores del conjunto.

Ejemplos: El conjunto $A = \{\bar{a}_1 , \bar{a}_2 , \bar{a}_3\} = \{(1,-1, 2), (1, 1, 0), (1,-1,-1)\}$ es ortogonal con relación al producto escalar en $\mathbb{R}^3$, ya que:

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = (1,-1,2)\cdot(1,1,0) = 1-1+0=0$$

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3 = (1,-1,2)\cdot(1,-1,-1) = 1+1-2=0$$

$$\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 = (1,1,0)\cdot(1,-1,-1) = 1-1+0=0$$

En el espacio de polinomios de grado menor o igual a dos, el conjunto $S = \{x^2 - x + 2 , -x^2 + 3x + 2 , -4x^2 -2x + 1\} = \{\bar{s}_1 , \bar{s}_2 , \bar{s}_3\}$ es ortogonal respecto al producto interno definido por:

$$(\bar{p}|\bar{q}) = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i \quad \text{donde} \quad \bar{p} = a_2x^2 + a_1x + a_0 ; \quad \bar{q} = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

en virtud de que

$$(\bar{s}_1 \mid \bar{s}_2) = 2(2)+(-1)(3)+1(-1) = 4-3-1=0$$

$$(\bar{s}_1 \mid \bar{s}_3) = 2(1)+(-1)(-2)+1(-4) = 2+2-4=0$$

$$(\bar{s}_2 \mid \bar{s}_3) = 2(1)+3(-2)+(-1)(-4) = 2-6+4=0$$

Para formar un conjunto ortogonal de vectores de un subespacio, se considera como primer elemento un vector del subespacio, el siguiente debe ser del subespacio y ortogonal al primero; el tercero debe ser, además del subespacio, ortogonal tanto al primer vector, como al segundo. Se continúa en esa forma hasta obtener al vector nulo del subespacio.

Para ejemplificar lo anterior, consideremos $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$, subespacio del espacio M de matrices de dos por dos con elementos reales y el producto interno definido por $(A|B) = tr(AB^T)$ para $A, B \in M$.

Tomemos $\bar{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \in H$, luego determinemos un segundo vector $\bar{d}_2 \in H$ que cumpla con $(\bar{d}_1 \mid \bar{d}_2) = 0$, esto es

$\bar{d}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ tal que $tr\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} a-b & \cdots \\ \cdots & 2c+a \end{bmatrix} = a - b + 2c + a$

$2a - b + 2c = 0$, o sea, $b = 2a + 2c$; para cada pareja de valores de a y c existe un valor de b, es decir, existe una infinidad de posibles vectores $\bar{d}_2$ ortogonales a $\bar{d}_1$, si hacemos $a = -2$; $c = 1$, entonces $b = -4 + 2 = -2$ y $\bar{d}_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Si buscamos un tercer vector $\bar{d}_3$, él debe, además de pertenecer a H, ser tal que $(\bar{d}_1 \mid \bar{d}_3) = 0$ y $(\bar{d}_2 \mid \bar{d}_3) = 0$, así que, al ser $\bar{d}_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, por la ortogonalidad con $\bar{d}_1$, $b = 2a + 2c$; y por la ortogonalidad con $\bar{d}_2$:

$$tr\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} -2a-2b & \cdots \\ \cdots & c-2a \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4a - 2b + c = 0$$

sustituyendo, en la igualdad inmediata anterior, la variable b por $2a + 2c$, resulta $-4a - 4a - 4c + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-3}{8}c$; si hacemos $c = 8$, se obtiene $a = -3$; $b = 10$ con lo que $\bar{d}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$.

Al buscar un cuarto vector $\bar{d}_4$ ortogonal a $\bar{d}_3$, $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$, se tiene $\bar{d}_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$; $tr\left(\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & -a \end{bmatrix}\right) = 0$, lo que nos lleva a: $-6a + 10b + 8c = 0$, ecuación que, junto con las correspondientes a la ortogonalidad con $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$, forma el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a - b + 2c = 0 \\ -4a - 2b + c = 0 \\ -6a + 10b + 8c = 0 \end{cases}$$; al resolverlo se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \\ -6 & 10 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{91}{4} \end{bmatrix}$$

por lo que, al ser sistema homogéneo determinado, su única solución es la trivial, es decir, $a = b = c = 0$, y el único vector $\bar{d}_4$ posible es: $\bar{d}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Otro vector ortogonal a los cuatro anteriores es, solamente, el mismo vector nulo.

El número de vectores ortogonales de un conjunto, diferentes del vector cero, depende de la dimensión del subespacio (en el ejemplo, *dim* $H=3$). En general, ese número es *menor* o *igual* a la dimensión del espacio (o subespacio) al que pertenecen ya que todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente. Si el número (cardinalidad del conjunto) de vectores ortogonales diferentes de cero es *igual* a la dimensión del subespacio, entonces dicho conjunto ortogonal es una base del subespacio, a la que suele llamársele *base ortogonal.*

Para el ejemplo: $B=\left\{\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3 & 10\\ 8 & 3\end{bmatrix}\right\}$ es una base ortogonal del subespacio $H=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbf{R}\right\}$, respecto al producto interno definido por $(A \mid B) = tr\,(AB^T)$.

El subespacio $A=\{ax^2+bx-2a+3b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ del espacio P_2 de polinomios de grado menor o igual a dos tiene dimensión dos, es decir, *dim* $A = 2$, por lo que toda base de A tiene dos elementos.

Podemos formar una base ortogonal de A respecto al producto interno definido con $(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i)$, considerando un vector $\bar{r}_1 \in A$, por ejemplo $\bar{r}_1 = 2x^2 + x - 1$ y determinando el segundo $\bar{r}_2$, tal que $(\bar{r}_1 \mid \bar{r}_2) = 0$; entonces, debemos obtener los valores a y b en $\bar{r}_2 = ax^2+bx-2a+3b$ para que el producto de $\bar{r}_1$ por $\bar{r}_2$, se anule:

$$\bar{r}_1(0) = -1 \qquad \bar{r}_2(0) = -2a+3b$$

$$\bar{r}_1(1) = 2+1-1 = 2 \qquad \bar{r}_2(1) = a+b-2a+3b = -a+4b$$

$$\bar{r}_1(2) = 8+2-1 = 9 \qquad \bar{r}_2(2) = 4a+2b-2a+3b = 2a+5b$$

$-1\,(-2a+3b) + 2\,(-a+4b) + 9\,(2a+5b) = (2-2+18)\,a + (-3+8+45)\,b;$

$18a+50b=0$, con lo que $b = \dfrac{-18}{50}a = -\dfrac{9}{25}a$; un vector $\bar{r}_2$, ortogonal a $\bar{r}_1$ puede obtenerse con $a=25$; $b=-9$, o sea $\bar{r}_2 = 25x^2-9x-77$, y una base ortogonal de A es $B_1 = \{2x^2+x-1\,,\; 25x^2-9x-77\}$.

Respecto al producto interno definido en P_2 por $(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \beta_k$ donde

$\bar{p} = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ y $\bar{q} = \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$, considerando como primer vector de la base ortogonal al mismo $\bar{r}_1$ del ejemplo anterior, el segundo vector debe ser tal que

$(\bar{r}_1 \mid \bar{r}_2) = 0$, o sea: $-1\,(-2a + 3b) + (1)\,b + (2)\,a = 4a - 2b = 0 \Rightarrow b = 2a$,

por lo que, si $a = 1$ entonces $b = 2$ y un vector $\bar{r}_2$ es: $x^2 + 2x + 4$.

La base ortogonal correspondiente resulta $B_2 = \{2x^2 + x - 1\ ,\ x^2 + 2x + 4\}$.

En el espacio sobre el campo complejo, de matrices de orden 2×3 con elementos complejos, un subespacio es: $J = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & 0 & -3b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

Podemos obtener una base ortogonal de J, respecto al producto interno $(A \mid B) = tr\,(AB^*)$, para ello consideramos un elemento cualquiera de J diferente del vector nulo, por ejemplo: $\bar{j}_1 = \begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix}$ y determinamos los elementos de la matriz $\bar{j}_2$ que, perteneciendo a J, satisfaga que $(\bar{j}_1 \mid \bar{j}_2) = 0$, es decir $\bar{j}_2 = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & 0 & -3b \end{bmatrix}$ tal que

$$tr \left(\begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \overline{2a} & 0 \\ 0 & \overline{-3b} \end{bmatrix} \right) = tr \begin{bmatrix} 5\bar{a} + 5\bar{a}i & \cdots \\ \cdots & -10\bar{b}i \end{bmatrix} = 5\bar{a}\,(1+i) - 10\bar{b}i = 0\,,$$

donde $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son, respectivamente, los conjugados de los complejos a y b (elementos de la matriz $\bar{j}_2$). Entonces, se tiene:

$$\bar{a}\,(1+i) = 2\bar{b}\,\mathrm{i} \;\Rightarrow\; \bar{b} = \frac{1+i}{2i}\,\bar{a} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\bar{a} \quad \text{por lo que,} \quad b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)a,$$

para $a = 2$, resulta $\bar{j}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1+i & 0 & -3-3i \end{bmatrix}$ y una base ortogonal de J es

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1+i & 0 & -3-3i \end{bmatrix} \right\}.$$

6. NORMA. BASE ORTONORMAL

Por medio de un producto interno definido en un espacio vectorial, se generaliza la idea geométrica de magnitud de un segmento dirigido (vector de $\mathbb{R}^3$) con el concepto de norma.

Norma de un vector $\bar{v}$, que representamos con $\|\bar{v}\|$, es la raíz cuadrada positiva del producto interno de dicho vector por él mismo $\|\bar{v}\| = \sqrt{(\bar{v} \mid \bar{v})}$.

Un vector tiene una norma, en general, diferente para cada producto interno considerado. Así, la norma del vector $\bar{v} = (1,-1,2) \in \mathbb{R}^3$, respecto al producto interno usual en $\mathbb{R}^3$ (producto escalar o producto punto) es: $\|\bar{v}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

Sin embargo, con relación al producto en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 2u_3v_2 + 2u_2v_3 + u_1v_3 + u_3v_1 + 7u_2v_2 + 2u_3v_3$$

se tiene: $\|\bar{v}\| = \sqrt{(1)(1)+4(1)(-1)+4(2)(-1)+2(1)(2)+7(-1)(-1)+2(2)(2)} =$

$$= \sqrt{1-4-8+4+7+8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

El vector nulo de cualquier espacio tiene *norma cero* respecto a todo producto interno definido en el espacio.

Para las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 2-i & -2i \\ 1+2i & -2+i & 0 \end{bmatrix}$; respecto al producto $(A \mid B) = tr\,(AB^*)$, sus correspondientes normas son:

$$\|A\| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2i & -3 \\ 0 & -2+3i & -1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ -2i & -2-3i \\ -3 & -1+i \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 2+4+9 & \cdots \\ \cdots & 0+13+2 \end{bmatrix}}$$

$$\|A\| = \sqrt{30}$$

$$\| B \| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 4 & 2-i & -2i \\ 1+2i & -2+i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1-2i \\ 2+i & -2-i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 16+5+4 & \cdots \\ \cdots & 5+5+0 \end{bmatrix}}$$

$$\| B \| = \sqrt{35}$$

Con relación al mismo producto interno, las correspondientes normas de las matrices

$\overline{j_1} = \begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix}$, y $\overline{j_2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1+i & 0 & -3-3i \end{bmatrix}$, son:

$$\| \overline{j_1} \| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 1+i & 2+2i & 0 \\ -i & 0 & 3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-i & i \\ 2-2i & 0 \\ 0 & -3i \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 2+8 & \cdots \\ \cdots & 1+9 \end{bmatrix}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\| \overline{j_2} \| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1+i & 0 & -3-3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 4 & 0 \\ 0 & -3+3i \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 4+16 & \cdots \\ \cdots & 2+18 \end{bmatrix}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Para la matriz $\overline{m} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; al considerar el producto $(A \mid B) = tr(AB^T)$ su norma es:

$$\| \overline{m} \| = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}} = \sqrt{15} \;;$$

respecto al producto definido por $\left(\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} g & h \\ j & k \end{bmatrix}\right) = cg + dh + 3ej + 2fk$

$$\| \overline{m} \| = \sqrt{(1)(1) + (-1)(-1) + 3(3)(3) + 2(2)(2)} = \sqrt{1 + 1 + 27 + 8} = \sqrt{37}.$$

Si la norma de un vector es *uno*, se dice que ese vector es *unitario*. Por ejemplo, el vector $\overline{v} \in \mathbb{R}^3$; $\overline{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ tiene, con relación al producto usual en $\mathbb{R}^3$, la norma

$\| \overline{v} \| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (0)(0)} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0} = \sqrt{1} = 1,$ por lo que es unitario

respecto a dicho producto usual.

A un vector como $\bar{m} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \bar{0}$ y una de cuyas normas es $\sqrt{37}$, podemos multiplicarlo por el escalar recíproco de esa norma, y obtendremos el vector:

$$\bar{m}_n = \frac{1}{\sqrt{37}} \bar{m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{37}} & -\frac{1}{\sqrt{37}} \\ \frac{3}{\sqrt{37}} & \frac{2}{\sqrt{37}} \end{bmatrix} \text{ cuya norma es } \| \bar{m}_n \| = \frac{1}{\sqrt{37}} \sqrt{37} = 1 ,$$

es decir, $\bar{m}_n$ es unitario respecto al producto $\left(\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} g & h \\ j & k \end{bmatrix} \right) = cg + dh + 3ej + 2fk$.

Al proceso efectuado con $\bar{m}$ suele llamársele *normalización* y es aplicable a todo vector *diferente* del *vector nulo*. Así, es posible normalizar a todos los elementos diferentes de cero de un conjunto y si éste es ortogonal, al obtenido se le llama *ortonormal*.

El conjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \right\}$ base ortogonal del espacio $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ puede normalizarse, multiplicando a cada uno de los elementos $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$, por el recíproco de su norma, como lo hacemos a continuación:

$$\| \bar{b}_1 \|^2 = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = tr \begin{bmatrix} 1+1 & \cdots \\ \cdots & 4+1 \end{bmatrix} = 2 + 5 = 7 \quad \Rightarrow \| \bar{b}_1 \| = \sqrt{7}$$

$$\| \bar{b}_2 \|^2 = tr\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \right) = tr \begin{bmatrix} 4+4 & \cdots \\ \cdots & 1+4 \end{bmatrix} = 8 + 5 = 13 \quad \Rightarrow \| \bar{b}_2 \| = \sqrt{13}$$

$$\| \bar{b}_3 \|^2 = tr\left(\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \right) = tr \begin{bmatrix} 9+100 & \cdots \\ \cdots & 64+9 \end{bmatrix} = 109 + 73 = 182 \Rightarrow \| \bar{b}_3 \| = \sqrt{182} .$$

El conjunto B normalizado es: $B_n = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{182}} & \frac{10}{\sqrt{182}} \\ \frac{8}{\sqrt{182}} & \frac{3}{\sqrt{182}} \end{bmatrix} \right\}$

. que es una base *ortonormal* de H.

De manera semejante, es posible normalizar las bases B_1 y B_2, determinadas en la sección anterior, del subespacio de P_2, $A = \left\{ ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Para $B_1 = \{2x^2+x-1\ ,\ 25x^2-9x-77\} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ base ortogonal respecto a

$$(\bar{p}\,|\,\bar{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i) \qquad \|\bar{b}_1\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+9^2} = \sqrt{86}$$

$$\|\bar{b}_2\| = \sqrt{(-77)^2+(-61)^2+(5)^2} = \sqrt{9675} = 15\sqrt{43}$$

por lo que, una base ortonormal es:

$$B_{1n} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{86}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{86}}x - \frac{1}{\sqrt{86}}\ \ ,\ \ \frac{5}{3\sqrt{43}}x^2 - \frac{3}{5\sqrt{43}}x - \frac{77}{15\sqrt{43}} \right\}.$$

Para $B_2 = \{\ 2x^2+x-1\ \ ,\ \ x^2+2x+4\ \}$, base ortogonal de A respecto a

$$(\bar{p}\,|\,\bar{q}) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \beta_k \qquad \|\,2x^2+x-1\,\| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\,x^2+2x+4\,\| = \sqrt{1^2+2^2+4^2} = \sqrt{21}$$

y la base ortonormal correspondiente es

$$B_{2n} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{6}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}\ \ ,\ \ \frac{1}{\sqrt{21}}x^2 + \frac{2}{\sqrt{21}}x + \frac{4}{\sqrt{21}} \right\}.$$

La base ortogonal del subespacio J, $\{\bar{j}_1, \bar{j}_2\}$, también puede normalizarse y se obtiene:

$$B_n = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}i & \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{5}}i & 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}}i \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{10}} + \frac{1}{2\sqrt{10}}i & 0 & \frac{-3}{2\sqrt{10}} - \frac{3}{2\sqrt{10}}i \end{bmatrix} \right\}$$

que es una base ortonormal de J.

A partir de un conjunto generador de un espacio es posible crear un generador ortogonal, por medio del método conocido como *proceso de Gram-Schmidt*[1]; eliminando del generador obtenido a los vectores nulos, si los hay, se llega a una base ortogonal, que al normalizarla determina una base *ortonormal.* Aquí no se usará dicho proceso.

[1] Solar G., Eduardo y Leda Speziale. *Apuntes de álgebra lineal*, México, Limusa, 1997, pp. 661 a 667.

El vector de coordenadas de un elemento del espacio real $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$,

por ejemplo $\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, respecto a la base ortogonal

$B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ es la terna (α, β, γ)

de números reales, tales que $\bar{u} = \alpha\bar{b}_1 + \beta\bar{b}_2 + \gamma\bar{b}_3$. Para obtener la primera de estas coordenadas, multiplicamos $\bar{u}$ por $\bar{b}_1$, con el producto interno para el cual B es ortogonal, esto es: $(\bar{u} \mid \bar{b}_1) = (\alpha\bar{b}_1 + \beta\bar{b}_2 + \gamma\bar{b}_3 \mid \bar{b}_1) = \alpha(\bar{b}_1 \mid \bar{b}_1) + \beta(\bar{b}_2 \mid \bar{b}_1) + \gamma(\bar{b}_3 \mid \bar{b}_1)$;

pero, debido a la ortogonalidad $(\bar{b}_2 \mid \bar{b}_1) = 0$ y $(\bar{b}_3 \mid \bar{b}_1) = 0$ con lo que: $\alpha = \dfrac{(\bar{u} \mid \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1 \mid \bar{b}_1)}$;

$$(\bar{u} \mid \bar{b}_1) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = tr \begin{bmatrix} 2 & \cdots \\ \cdots & 4 \end{bmatrix} = 6$$

$$(\bar{b}_1 \mid \bar{b}_1) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = 7 \quad \therefore \quad \alpha = \frac{6}{7}$$

De manera semejante $\beta = \dfrac{(\bar{u} \mid \bar{b}_2)}{(\bar{b}_2 \mid \bar{b}_2)}$;

$$(\bar{u} \mid \bar{b}_2) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \right) = tr \begin{bmatrix} -4 & \cdots \\ \cdots & -3 \end{bmatrix} = -7 \,; (\bar{b}_2 \mid \bar{b}_2) = 13 \quad \therefore \quad \beta = -\frac{7}{13}$$

$$\gamma = \frac{(\bar{u} \mid \bar{b}_3)}{(\bar{b}_3 \mid \bar{b}_3)}; \quad (\bar{u} \mid \bar{b}_3) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \right) = -6 + 2 = -4 \,;$$

$$(\bar{b}_3 \mid \bar{b}_3) = 182 \quad \therefore \quad \gamma = \frac{-4}{182} = -\frac{2}{91}$$

Como comprobación: $\dfrac{6}{7}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \dfrac{7}{13}\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{91}\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, pues

$$\frac{6}{7}+\frac{14}{13}+\frac{6}{91} = \frac{6\times 13+14\times 7+6}{91} = \frac{182}{91} = 2$$

$$-\frac{6}{7}+\frac{14}{13}-\frac{20}{91} = \frac{-6\times 13+14\times 7-20}{91} = \frac{-78+98-20}{91} = 0$$

$$\frac{12}{7}-\frac{7}{13}-\frac{16}{91} = \frac{12\times 13-7\times 7-16}{91} = \frac{156-49-16}{91} = \frac{91}{91} = 1$$

$$\bar{u} = \frac{6}{7}\bar{b}_1-\frac{7}{13}\bar{b}_2-\frac{2}{91}\bar{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \; ; \qquad (\bar{u})_B = \left(\frac{6}{7},-\frac{7}{13},-\frac{2}{91}\right)$$

Si la base de referencia es la ortonormal

$$B_n = \{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{182}} & \frac{10}{\sqrt{182}} \\ \frac{8}{\sqrt{182}} & \frac{3}{\sqrt{182}} \end{bmatrix} \right\}$$

las coordenadas correspondientes (δ, λ, τ), tales que $\bar{u} = \delta\bar{e}_1+\lambda\bar{e}_2+\tau\bar{e}_3$ son:

$\delta = (\bar{u}\,|\,\bar{e}_1)$; $\lambda = (\bar{u}\,|\,\bar{e}_2)$ y $\tau = (\bar{u}\,|\,\bar{e}_3)$; ya que $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ son unitarios;

$$\delta = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \frac{-1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} \right) = tr\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{7}} & \cdots \\ \cdots & \frac{4}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

$$\lambda = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} \right) = -\frac{4}{\sqrt{13}}-\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$\tau = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{182}} & \frac{8}{\sqrt{182}} \\ \frac{10}{\sqrt{182}} & \frac{3}{\sqrt{182}} \end{bmatrix} \right) = -\frac{6}{\sqrt{182}}+\frac{2}{\sqrt{182}} = -\frac{4}{\sqrt{182}} \qquad \text{y}$$

$$\bar{u} = \frac{6}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{-1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} - \frac{7}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{182}}\begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{182}} & \frac{10}{\sqrt{182}} \\ \frac{8}{\sqrt{182}} & \frac{3}{\sqrt{182}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{u})_{Bn} = \left(\frac{6}{\sqrt{7}} \; , \; -\frac{7}{\sqrt{13}} \; , \; -\frac{4}{\sqrt{182}} \right).$$

Las coordenadas del vector $\bar{v} = 3x^2 - 2x - 12$, que pertenece al espacio

$A = \left\{ ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, respecto a la base ortonormal de A,

$B_{2n} = \{ \bar{e}_1 , \bar{e}_2 \} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{6}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{\sqrt{6}} \; , \; \frac{1}{\sqrt{21}}x^2 + \frac{2}{\sqrt{21}}x + \frac{4}{\sqrt{21}} \right\}$, son α y β tales que

$$\alpha = (\bar{v} \mid \bar{e}_1) = \frac{6}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{16}{\sqrt{6}}$$

$$\beta = (\bar{v} \mid \bar{e}_2) = \frac{3}{\sqrt{21}} - \frac{4}{\sqrt{21}} - \frac{48}{\sqrt{21}} = -\frac{49}{\sqrt{21}}$$

$$\frac{16}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) - \frac{49}{\sqrt{21}}\left(\frac{1}{\sqrt{21}}x^2 + \frac{2}{\sqrt{21}}x + \frac{4}{\sqrt{21}} \right) =$$

$$= \left(\frac{32}{6} - \frac{49}{21} \right)x^2 + \left(\frac{16}{6} - \frac{98}{21} \right)x - \frac{16}{6} - \frac{196}{21} =$$

$$= \left(\frac{224 - 98}{42} \right)x^2 + \left(\frac{112 - 196}{42} \right)x - \frac{112 + 392}{42} = 3x^2 - 2x - 12 .$$

7. DISTANCIA ENTRE VECTORES

En geometría, si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son los vectores de posición de los puntos A y B, respectivamente, la distancia entre estos puntos es el módulo del vector diferencia $\bar{b}-\bar{a}$, que es el mismo que el del vector $\bar{a}-\bar{b}$, o sea, $\left|\bar{b}-\bar{a}\right|=\left|\bar{a}-\bar{b}\right|$.

De manera semejante, *la distancia entre dos vectores* de un espacio se define como la *norma* de la diferencia de esos dos vectores. La distancia, por estar definida en términos de una norma, depende del producto interno que se utilice.

Por ejemplo, la distancia entre las matrices $\bar{a}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ y $\bar{b}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ es la norma de $\bar{a}-\bar{b}=\begin{bmatrix}3 & -6\\ -1 & -3\end{bmatrix}$ y dicha norma depende del producto interno considerado.

Así, para $(A \mid B)=tr\,(AB^T)$, la distancia entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es:

$$\|\bar{a}-\bar{b}\|=\sqrt{tr\left(\begin{bmatrix}3 & -6\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -6 & -3\end{bmatrix}\right)}=\sqrt{tr\begin{bmatrix}45 & \cdots\\ \cdots & 10\end{bmatrix}}=\sqrt{55}$$

Respecto a $\left(\begin{bmatrix}c & d\\ e & f\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}g & h\\ j & k\end{bmatrix}\right)=cg+dh+3ej+2fk$ la distancia entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es:

$\|\bar{a}-\bar{b}\|=\sqrt{9+36+3+18}=\sqrt{66}$.

Para los polinomios $\bar{h}=2x^2-3x+1$ y $\bar{k}=-x^2+x-3$, la distancia entre ellos es la norma de su diferencia $\bar{h}-\bar{k}=3x^2-4x+4$. Si se considera el producto interno en P_2 definido por $(\bar{p}\mid\bar{q})=\sum_{i=0}^{2}p(i)q(i)$ se tiene: $(\bar{h}-\bar{k})(0)=4$; $(\bar{h}-\bar{k})(1)=3$; $(\bar{h}-\bar{k})(2)=8$, con lo que la norma de $\bar{h}-\bar{k}$ es: $\|\bar{h}-\bar{k}\|=\sqrt{4^2+3^2+8^2}=\sqrt{16+9+64}=\sqrt{89}$.

Para el producto $(\bar{p}\mid\bar{q})=\sum_{k=0}^{2}\alpha_k\beta_k$, se tiene: $\|\bar{h}-\bar{k}\|=\sqrt{3^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{41}$.

8. COMPLEMENTO ORTOGONAL

Con el concepto de ortogonalidad, también es posible obtener un vector ortogonal (respecto a un producto interno) a todos los vectores de un subconjunto de un espacio vectorial.

Por ejemplo, un vector ortogonal a todos los vectores del subconjunto A de $\mathbb{R}^3$, donde $A=\{(x\,,\ x-2\,,\ 4)\ |\ x\ \in\ \mathbb{R}\}$, respecto al producto punto en $\mathbb{R}^3$, es $(-2\,,2\,,1)$, ya que: $-2x+2(x-2)+4=-2x+2x-4+4=0$ para todo valor de x.

Otro vector ortogonal a A es $\left(3\,,-3\,,-\dfrac{3}{2}\right)$ y, en general, toda terna de números reales $(a\,,b\,,c)$ tal que, para todo valor de x, $(a\,,b\,,c)\cdot(x\,,x-2\,,4)=0$. Esto es $ax+b(x-2)+4c=x(a+b)-2b+4c=0$, lo que implica que: $\begin{cases} a+b=0 \\ -2b+4c=0 \end{cases}$ y al resolver el sistema se llega a $\begin{cases} b\ =\ 2c \\ a\ =-2c \end{cases}$. Así, todos los vectores del subconjunto B de $\mathbb{R}^3$, tal que $B=\{(-2c\,,2c\,,c)\ |\ c\ \in\mathbb{R}\}$ son ortogonales a todos los vectores de $A=\{(x\,,\ x-2\,,4)\ |\ x\in\mathbb{R}\}$.

Un conjunto como B, suele llamarse *ortogonal al conjunto* A, se representa con $A^{\perp}$ y siempre es un subespacio, aunque el conjunto A no lo sea.

Para $L=\{(x\,,2x\,,-3x)\ |\ x\ \in\mathbb{R}\}$, que es subespacio de $\mathbb{R}^3$, un vector ortogonal a L respecto al producto punto es $(6,3,4)$, otro $\left(-1\,,\ 1\,,\ \dfrac{1}{3}\right)$ y, en general, toda terna $(a\,,b\,,c)$ que, para todo valor de x, satisfaga:

$$ax+2bx-3cx=0\,,\quad \text{o sea,}\quad (a+2b-3c)\,x=0\ \Rightarrow\ a=-2b+3c\,.$$

Si el subconjunto del espacio es un *subespacio* (como lo es L), el conjunto ortogonal a él se llama *complemento ortogonal* de dicho subespacio, debido a que la suma de la dimensión de este complemento con la del subespacio es igual a la dimensión del espacio.

Por lo anterior, el complemento ortogonal (respecto al producto punto) de L, subespacio de dimensión *uno* de $\mathbb{R}^3$, es $L^{\perp}=\{(-2b+3c\,,b\,,c)\ |\ b\ ,c\in\mathbb{R}\}$, subespacio de dimensión *dos* de $\mathbb{R}^3$.

El complemento ortogonal de un subespacio está referido a un producto interno. Así, para el producto interno en $\mathbb{R}^3$, definido por

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 2u_2 v_1 + 2u_3 v_2 + 2u_2 v_3 + u_1 v_3 + u_3 v_1 + 7u_2 v_2 + 2u_3 v_3$$

el complemento ortogonal de L es el conjunto de ternas (a, b, c) que satisfacen, para todo valor de x, $ax + 2a2x + 2bx + 2c2x + 2b(-3x) + a(-3x) + cx + 7b2x + 2c(-3x) = 0$; lo anterior puede expresarse como: $(2a + 10b - c)\,x = 0$, es decir, $c = 2a + 10b$, por lo que $L_1^\perp = \{(a, b, 2a + 10b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \left\{\left(-5b + \frac{c}{2}, b, c\right) \,\middle|\, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, que es diferente del obtenido antes, respecto al producto punto.

Si consideramos el producto definido en $\mathbb{R}^3$ por $g(\bar{u}, \bar{v}) = 2u_1 v_1 + u_2 v_2 + 6u_3 v_3$, donde $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el complemento ortogonal de L es el conjunto de los vectores (a, b, c), tales que $2ax + b2x + 6c(-3x) = 0$, equivalente a: $x(2a + 2b - 18c) = 0$, que debe cumplirse para toda $x \in \mathbb{R}$, por lo que

$$2a + 2b - 18c = 0 \Rightarrow c = \frac{a+b}{9} \quad \therefore \quad L_2^\perp = \left\{\left(a, b, \frac{a+b}{9}\right) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

Para el subespacio A del espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos, donde $A = \{ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, podemos obtener su complemento ortogonal $A^\perp$ respecto a cada producto interno que nos interese.

Así, para el producto $(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i)$, puede considerarse el polinomio $p(x) = mx^2 + nx + r$, del complemento y el elemento genérico de A: $q(x) = ax^2 + bx - 2a + 3b$, de los cuales:

$$\begin{array}{ll} p(0) = r & q(0) = -2a + 3b \\ p(1) = m + n + r & q(1) = a + b - 2a + 3b = -a + 4b \\ p(2) = 4m + 2n + r & q(2) = 4a + 2b - 2a + 3b = 2a + 5b \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\bar{p} \mid \bar{q}) &= r(-2a + 3b) + (m + n + r)(-a + 4b) + (4m + 2n + r)(2a + 5b) \\ &= a(-2r - m - n - r + 8m + 4n + 2r) + b(3r + 4m + 4n + 4r + 20m + 10n + 5r) \\ &= a(-r + 7m + 3n) + b(12r + 24m + 14n) \end{aligned}$$

El vector $\overline{p}$ perteneciente a $A_1^{\perp}$, complemento ortogonal de A, debe ser tal que $(\overline{p} \mid \overline{q}) = 0$ para todo valor de a y de b, $\begin{cases} -r + 7m + 3n = 0 \\ 12r + 24m + 14n = 0 \end{cases}$ sistema homogéneo que resolvemos a continuación: $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 12 & 24 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 \\ 0 & 54 & 25 \end{bmatrix}$, el segundo renglón de la última matriz representa la ecuación $54m + 25n = 0$, que implica $n = -\frac{54}{25}m$;

$r = 7m + 3n = 7m - \frac{162}{25}m = \frac{175-162}{25}m = \frac{13}{25}m$, con lo que:

$$A_1^{\perp} = \left\{ mx^2 - \frac{54}{25}mx + \frac{13}{25}m \;\middle|\; m \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si el producto interno es $(\overline{s} \mid \overline{t}) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i \beta_i$, donde $\overline{s}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, $\overline{t} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, para: $p(x) = mx^2 + nx + r$; $q(x) = ax^2 + bx - 2a + 3b$,

se tiene: $(\overline{p} \mid \overline{q}) = am + bn + (-2a + 3b)r = a(m - 2r) + b(n + 3r)$ que debe ser cero para todo valor de a y de b $\therefore$

$$\begin{cases} m - 2r = 0 \;\Rightarrow\; r = \frac{m}{2} \\ n + 3r = 0 \;\Rightarrow\; n = -3r = -\frac{3}{2}m \end{cases}$$ y se llega a $A_2^{\perp} = \left\{ mx^2 - \frac{3}{2}mx + \frac{1}{2}m \mid m \in \mathbb{R} \right\}$.

Otros ejemplos pueden plantearse en el espacio de matrices de orden dos.

Respecto al producto interno $(A \mid B) = cg + dh + 3ej + 2df$, donde $A = \begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} g & h \\ j & k \end{bmatrix}$, el complemento ortogonal $D_1^{\perp}$ del subespacio

$D = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, tiene elemento genérico $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tal que

$\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, esto es:

$xa + yb + 3z(a + b) + 2w(2a - b) = a(x + 3z + 4w) + b(y + 3z - 2w) = 0,$

que conduce al sistema homogéneo e indeterminado $\begin{cases} x+3z+4w=0 & \text{.......(1)} \\ y+3z-2w=0 & \text{.......(2)} \end{cases}$

De (1) se tiene $x=-4w-3z$; de (2), $y=2w-3z$

$\therefore\ D_1^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} -4w-3z & 2w-3z \\ z & w \end{bmatrix} \mid z,w \in \mathbb{R} \right\}$, este conjunto puede expresarse en términos de x y de z, despejando de (1) a $w=\dfrac{-x-3z}{4}$, ya que $y=2w-3z$, queda

$y=\dfrac{-x-3z}{2}-3z=\dfrac{-x-9z}{2}$, con lo que $D_1^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} x & \dfrac{-x-9z}{2} \\ z & \dfrac{-x-3z}{4} \end{bmatrix} \mid x,z \in \mathbb{R} \right\}$;

el mismo complemento puede expresarse como:

$$D_1^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} x & x+6w \\ \dfrac{-x-4w}{3} & w \end{bmatrix} \mid x\,,\ w \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ \dfrac{-x-2y}{9} & \dfrac{-x+y}{6} \end{bmatrix} \mid x\,,y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para el producto interno definido por: $(A \mid B) = tr\,(AB^T)$, debe tenerse

$$\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix} \right) = tr \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a+b \\ b & 2a-b \end{bmatrix} \right) = 0,\ \forall\, a\,,b \in \mathbb{R}\,.$$

De la matriz resultante de multiplicar $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} a & a+b \\ b & 2a-b \end{bmatrix}$ sólo nos interesan los elementos de la diagonal principal, debido a que la traza buscada es la suma de ellos, como se dijo antes, a los elementos fuera de la mencionada diagonal los representaremos con $\ldots$,

$$tr \begin{bmatrix} ax+by & \ldots \\ \ldots & z(a+b)+w(2a-b) \end{bmatrix} = ax+by+az+bz+2aw-bw =$$
$$= a(x+z+2w) + b(y+z-w) = 0,$$

que debe satisfacerse $\forall\, a\,,b \in \mathbb{R}$, lo que lleva al sistema $\begin{cases} x+z+2w=0 & \text{......(1)} \\ y+z-w=0 & \text{......(2)} \end{cases}$

del cual $x=-z-2w$; $y=w-z$, con lo que $D_2^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix}-z-2w & -z+w\\ z & w\end{bmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{R}\right\}$, pero,

si de (1) despejamos a z y de (2) a w, se tiene $z=-x-2w$; $w=y+z=y-x-2w$, por

lo que $w=\dfrac{y-x}{3}$, con lo que resulta $z=-x-\dfrac{2y-2x}{3}=\dfrac{-3x-2y+2x}{3}=\dfrac{-x-2y}{3}$ y el

complemento ortogonal $D_2^{\perp}$ puede expresarse como: $D_2^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\ \dfrac{-x-2y}{3} & \dfrac{y-x}{3}\end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

Consideremos ahora el conjunto de puntos que satisfacen a la ecuación $2x+y-z=0$, esto es, todos los puntos del plano cuya representación analítica es la ecuación anterior. Dicho conjunto es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ que puede expresarse como: $P=\{(x, y, 2x+y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Su complemento ortogonal $P_1^{\perp}$ respecto al producto escalar en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de ternas (a, b, c) tales que, $ax+by+c\,(2x+y)=0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, es decir, $x(a+2c)+y(b+c)=0$,

que nos conduce a: $\begin{cases} a + 2c = 0 \Rightarrow & c = -\dfrac{a}{2} \\ b + c = 0 \Rightarrow & b = -c \end{cases}$ esto es: $\dfrac{a}{-2}=\dfrac{b}{-1}=c$; estas dos

ecuaciones son la representación analítica de una recta que contiene al origen y es paralela al vector $\bar{u}=(-2,-1,1)$, a su vez paralelo al vector normal al plano propuesto, que es $\bar{N}=(2,1,-1)$.

En otras palabras, el complemento ortogonal del plano es la recta perpendicular a él que contiene al origen. Al ser un conjunto de puntos (subconjunto de $\mathbb{R}^3$), podemos expresarlo como: $P_1^{\perp}=\left\{(x, y, z) \,\middle|\, \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{-1}=z,\ x, y, z \in \mathbb{R}\right\}=\{(2y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Respecto al producto interno en $\mathbb{R}^3$ definido por

$f(\bar{u}, \bar{v})=u_1v_1+2u_1v_2+2u_2v_1+2u_3v_2+2u_2v_3+u_1v_3+u_3v_1+7u_2v_2+2u_3v_3$

$P_2^{\perp}=\left\{(a, b, c) \mid \big((a, b, c) \mid (x, y, 2x+y)\big)=0\ \forall x, y \in \mathbb{R}\right\}$;

$\big((a, b, c) \mid (x, y, 2x+y)\big)=$

$=ax+2ay+2bx+2cy+2b(2x+y)+a(2x+y)+cx+7by+2c(2x+y)=$

$=x(a+2b+4b+2a+c+4c)+y(2a+2c+2b+a+7b+2c)=$

$= x(3a+6b+5c)+y(3a+9b+4c)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 3a+6b+5c = 0 \\ 3a+9b+4c = 0 \end{cases}$ de estas ecuaciones se obtiene $c = 3b$; $a = -7b$, por lo que $P_2^{\perp} = \{(-7b\,,\, b\,,\, 3b) \mid b \in \mathbb{R}\}$.

Todo vector de un espacio, por ejemplo del $\mathbb{R}^3$, puede expresarse en forma única como la suma de un vector perteneciente a un subespacio, como es $L = \{(x\,,\, 2x\,, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, más otro vector del complemento ortogonal del subespacio. Respecto al producto usual en $\mathbb{R}^3$, $L^{\perp} = \{(3c-2b\,,\, b\,,\, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$; el vector $(1\,,-3\,,\,1) \in \mathbb{R}^3$ puede expresarse en forma única como $\bar{w}+\bar{w}^{\perp}$, donde $\bar{w} \in \{(x\,,\, 2x\,, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y el vector $\bar{w}^{\perp} \in L^{\perp}$, es decir, $\bar{w}^{\perp} \in \{(-2b+3c\,,\, b\,,\, c) \mid b,\, c \in \mathbb{R}\}$, de tal manera que

$$(1\,,-3\,,\,1) = (x\,, 2x\,, -3x) + (-2b+3c\,, b\,, c) \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-2b+3c = 1 \\ 2x+b = -3 \\ -3x+c = 1 \end{cases},\quad \text{resolviendo,}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -5 \\ 0 & -6 & 10 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -1 \\ 0 & -3 & 5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & -1 \end{array}\right],$$

se tiene: $c = -\dfrac{5}{7}$; $b = -1 - \dfrac{6}{7} = -\dfrac{13}{7}$; $x = 1 - \dfrac{26}{7} + \dfrac{15}{7} = -\dfrac{4}{7}$, por lo que:

$$\bar{w} = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{12}{7}\right);\quad \bar{w}^{\perp} = \left(\frac{11}{7}, -\frac{13}{7}, -\frac{5}{7}\right) \quad \text{y} \quad \bar{w} + \bar{w}^{\perp} = (1\,,-3\,,\,1)\,.$$

Como otro ejemplo, consideremos al subespacio $A = \{ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a,\, b \in \mathbb{R}\}$, del espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos, que tiene el complemento ortogonal $A_2^{\perp} = \left\{ mx^2 - \dfrac{3}{2}mx + \dfrac{m}{2} \mid m \in \mathbb{R} \right\}$, respecto al producto interno definido por:

$(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$ para los polinomios $\bar{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $\bar{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

Un vector cualquiera de P_2, como es $5x^2 + 3x - 8$, puede expresarse en forma única como $\bar{w} + \bar{w}^{\perp}$, donde $\bar{w} \in A$ y $\bar{w}^{\perp} \in A_2^{\perp}$, esto es

$$5x^2+3x-8=ax^2+bx-2a+3b+mx^2-\frac{3}{2}mx+\frac{m}{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 5=a+m \\ 3=b-\frac{3}{2}m \\ -8=-2a+3b+\frac{m}{2} \end{cases}$$

resolviendo, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right]$ con lo que $m=-1$;

$b = 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$; $a = 5+1=6$; $-2a+3b = -12+\frac{9}{2}=-\frac{15}{2}$; y resulta que

$\bar{w} = 6x^2+\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}$; $\bar{w}^{\perp} = -x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ $\therefore$ $\bar{w}+\bar{w}^{\perp} = 5x^2+3x-8$.

El subespacio $D=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ del espacio M_2 de las matrices de dos por dos con elementos reales tiene, respecto al producto interno definido en M_2 por $(A \mid B) = tr(AB^T)$, el complemento ortogonal $D_2^{\perp}=\left\{\begin{bmatrix} x & x+3w \\ -x-2w & w \end{bmatrix} \mid x, w \in \mathbb{R}\right\}$.

Dos matrices, pertenecientes a M_2, por ejemplo $J=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $K=\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, pueden expresarse como una suma: $J=W+W^{\perp}$ y $K=W_1+W_1^{\perp}$, donde W, W_1 pertenecen a D y $W^{\perp}$, $W_1^{\perp}$ a $D_2^{\perp}$, esto es, como la suma de las matrices

$\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x & x+3w \\ -x-2w & w \end{bmatrix}$, donde cada una de las variables a, b, x, w

tiene un valor respecto a la matriz J y otro, en general diferente, respecto a la matriz K; para la obtención de esos valores deben resolverse los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} a+x&=0 \\ b+x+3w&=4 \\ a+b-x-2w&=-3 \\ 2a-b+w&=5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a_1+x_1&=-1 \\ b_1+x_1+3w_1&=8 \\ a_1+b_1-x_1-2w_1&=-2 \\ 2a_1-b_1+w_1&=4 \end{aligned}$$

Estos dos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, por lo que pueden resolverse utilizando una matriz *doblemente ampliada*, como lo hacemos a continuación.

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -9 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -34 & -51 \end{array}\right].$$

De lo anterior, se tiene que:

$$w = \frac{-34}{-17} = +2 \qquad\qquad w_1 = \frac{-51}{-17} = +3$$

$$x = -9 + 4(2) = -1 \qquad\qquad x_1 = -14 + 4(3) = -2$$

$$b = 4 - 3(2) - (-1) = -1 \qquad\qquad b_1 = 8 - 3(3) - (-2) = +1$$

$$a = 0 - (-1) = +1 \qquad\qquad a_1 = -1 - (-2) = +1$$

De donde:

$$a + b = 0 \qquad\qquad a_1 + b_1 = 2$$

$$2a - b = 3 \qquad\qquad 2a_1 - b_1 = 1$$

$$x + 3w = 5 \qquad\qquad x_1 + 3w_1 = 7$$

$$-x - 2w = -3 \qquad\qquad -x_1 - 2w_1 = -4$$

Con lo que:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO

Si $B = \{\bar{b}_1,\ \bar{b}_2,\ \cdots,\ \bar{b}_r\}$ es una base ortonormal de un subespacio W del espacio V, se define *la proyección de un vector* $\bar{v} \in V$ *sobre* W, como: $\bar{v}_w = \sum_{i=1}^{r} (\bar{v} \mid \bar{b}_i)\bar{b}_i$, donde r es la dimensión del subespacio W. La proyección de $\bar{v}$ sobre W depende del producto interno respecto al cual la base B es ortonormal, que debe ser el mismo al que se refiere $(\bar{v} \mid \bar{b}_i)$ de la definición. Debido a ello existe una proyección, en general diferente, por cada producto que se considere.

Siempre es posible determinar una base *ortonormal* de un subespacio respecto a un producto interno. Como puede comprobarse, $B_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{4}{\sqrt{42}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{42}}x - \frac{5}{\sqrt{42}} \right\}$ es una base ortonormal del subespacio $A = \{ ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ del espacio P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, respecto al producto interno definido con: $(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, b_k$, para $\bar{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $\bar{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

Ejemplos:

1. Obtendremos la proyección $\bar{s}_A$ del polinomio, $\bar{s} \in P_2$, $\bar{s} = x^2 - x + 2$

   sobre el subespacio A, $\bar{s}_A = (\bar{s} \mid \bar{b}_1)\bar{b}_1 + (\bar{s} \mid \bar{b}_2)\bar{b}_2$ (donde $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ son los elementos de la base B_3) respecto al producto interno en P_2 para el cual la base B_3 es ortonormal.

   $$(\bar{s} \mid \bar{b}_1) = \left(x^2 - x + 2 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1-1+2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ ; \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{b}_1 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

   $$(\bar{s} \mid \bar{b}_2) = \left(x^2 - x + 2 \,\middle|\, \frac{4}{\sqrt{42}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{42}}x - \frac{5}{\sqrt{42}} \right) = \frac{-7}{\sqrt{42}}\ ; \quad \frac{-7}{\sqrt{42}}\bar{b}_2 = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$$

   $$\therefore\quad \bar{s}_A = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

2. La proyección del vector $\bar{p} = 5x^2 + 3x - 8 \in P_2$ sobre el subespacio

   A es $\bar{p}_A = (\bar{p} \mid \bar{b}_1)\bar{b}_1 + (\bar{p} \mid \bar{b}_2)\bar{b}_2$

$$(\bar{p}\,|\,\bar{b}_1) = \left(5x^2+3x-8 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{3}}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{8}{\sqrt{3}} = 0$$

$$(\bar{p}\,|\,\bar{b}_2) = \left(5x^2+3x-8 \,\middle|\, \frac{4}{\sqrt{42}}x^2+\frac{1}{\sqrt{42}}x-\frac{5}{\sqrt{42}}\right) = \frac{20}{\sqrt{42}}+\frac{3}{\sqrt{42}}+\frac{40}{\sqrt{42}} = \frac{63}{\sqrt{42}};$$

$$\bar{p}_A = 0+\frac{63}{\sqrt{42}}\left(\frac{4}{\sqrt{42}}x^2+\frac{1}{\sqrt{42}}x-\frac{5}{\sqrt{42}}\right) = \frac{252}{42}x^2+\frac{63}{42}x-\frac{315}{42} = 6x^2+\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}.$$

Aquí, $\bar{p}_A$ es el vector $\bar{w} \in A$ que sumado con $\bar{w}^{\perp} \in A^{\perp}$ es igual a $\bar{p}$, obtenido en páginas anteriores. Este resultado es completamente general. Esto es: *la proyección de un vector* $\bar{v} \in V$ *sobre un subespacio* W *de* V *es el vector* $\bar{w} \in W$, *tal que sumado con* $\bar{w}^{\perp} \in W^{\perp}$ *es igual a* $\bar{v}$. Con esto tenemos dos formas diferentes de obtener la proyección de un vector sobre un subespacio.

La proyección $\bar{s}_A$ del vector $\bar{s} = x^2 - x + 2$ del primer ejemplo también la podemos obtener, determinando el vector $\bar{w}_1 \in A$ que, sumado con $\bar{w}_1^{\perp} \in A^{\perp}$, sea igual a $\bar{s}$.

$$\bar{w}_1 = ax^2+bx-2a+3b\,; \quad \bar{w}_1^{\perp} = mx^2-\frac{3}{2}mx+\frac{m}{2}$$

$$\bar{w}_1 + \bar{w}_1^{\perp} = \bar{s} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a+m=1 \\ b-\dfrac{3}{2}\,m=-1 \\ -2a+3b+\dfrac{m}{2}=2 \end{cases}$$; al resolver este sistema se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$ de donde resulta que $m = 1$;

$b = -1+\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$; $a = 1-1 = 0$ $\therefore$ $\bar{w}_1 = \bar{s}_A = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, que ya habíamos obtenido.

Para determinar una base ortonormal del subespacio D, de dimensión dos, del espacio M_2 de las matrices de orden dos con elementos reales, donde $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, respecto al producto interno definido en M_2 por $(A|B) = tr\,(AB^{\mathrm{T}})$, consideramos como primer elemento un vector que pertenezca a D, por ejemplo: $\bar{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; luego determinamos el segundo elemento $\bar{d}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a-b \end{bmatrix}$, tal que, además de pertenecer a D, satisfaga $(\bar{d}_1|\bar{d}_2) = 0$, es decir,

$$(\bar{d}_1|\bar{d}_2) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a+b \\ b & 2a-b \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} a+b & \cdots \\ \cdots & 4a+b \end{bmatrix} = 5a+2b=0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}a\,;$$

si $a=2$, entonces $b=-5$ con lo que queda $\bar{d}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$. Ahora debemos normalizar los vectores $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$, para lo cual calculamos sus respectivas normas:

$$\|\bar{d}_1\|^2 = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} 1+1 & \cdots \\ \cdots & 4+1 \end{bmatrix} \therefore \|\bar{d}_1\| = \sqrt{7}\ ;$$

$$\|\bar{d}_2\|^2 = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} 4+25 & \cdots \\ \cdots & 9+81 \end{bmatrix} = 119$$

y la norma del segundo vector es $\|\bar{d}_2\| = \sqrt{119}$. Una base ortonormal de D es:

$$B = \left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{119}} & -\frac{5}{\sqrt{119}} \\ -\frac{3}{\sqrt{119}} & \frac{9}{\sqrt{119}} \end{bmatrix}\right\} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}.$$

La proyección de la matriz $J = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ sobre D es, por definición,

$$J_D = (J|\bar{b}_1)\,\bar{b}_1 + (J|\bar{b}_2)\,\bar{b}_2$$

$$(J|\bar{b}_1) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{7}} & \cdots \\ \cdots & \frac{-6+5}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{7}}\ ,\quad \frac{3}{\sqrt{7}}\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$\left(J\,|\,\bar{b}_2\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{119}} & \frac{-3}{\sqrt{119}} \\ \frac{-5}{\sqrt{119}} & \frac{9}{\sqrt{119}} \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} \frac{-20}{\sqrt{119}} & \cdots \\ \cdots & \frac{9+45}{\sqrt{119}} \end{bmatrix} = \frac{34}{\sqrt{119}} \;,$$

$$\frac{34}{\sqrt{119}}\;\bar{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{68}{119} & \frac{-170}{119} \\ \frac{-102}{119} & \frac{306}{119} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-10}{7} \\ \frac{-6}{7} & \frac{18}{7} \end{bmatrix}, \quad \therefore\; J_D = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{10}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{18}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para $K = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, la proyección sobre D es: $K_D = (\,K\,|\,\bar{b}_1\,)\;\bar{b}_1 + (\,K\,|\,\bar{b}_2\,)\;\bar{b}_2$

$$(\,K\,|\,\bar{b}_1\,) = tr\left(\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} \frac{-1+8}{\sqrt{7}} & \cdots \\ \cdots & \frac{-4+4}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} = \frac{7}{\sqrt{7}} \;;\quad \frac{7}{\sqrt{7}}\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\,K\,|\,\bar{b}_2\,) = tr\left(\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{119}} & -\frac{3}{\sqrt{119}} \\ -\frac{5}{\sqrt{119}} & \frac{9}{\sqrt{119}} \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} \frac{-42}{\sqrt{119}} & \cdots \\ \cdots & \frac{42}{\sqrt{119}} \end{bmatrix} = 0 \;;\quad 0\bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las proyecciones J_D y K_D, como puede comprobarse, son respectivamente iguales a W y W_1, obtenidas al final de la sección anterior.

La proyección de un vector sobre un subespacio, como ya se dijo, depende del producto interno considerado, así la proyección del polinomio $\bar{s} = x^2 - x + 2$ sobre el subespacio $A = \left\{ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a\,,\,b \,\in\, \mathrm{R}\right\}$ respecto al producto interno definido por

$(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)\; q(i)$, es diferente de la obtenida al principio de esta sección. Para determinar esta nueva proyección usaremos los dos caminos referidos:

1. Obtendremos los vectores $\bar{w} \in A$ y $\bar{w}^{\perp} \in A_1^{\perp}$ tales que $\bar{s} = \bar{w} + \bar{w}^{\perp}$ donde el complemento ortogonal, obtenido en la sección anterior, es $A_1^{\perp} = \left\{mx^2 - \frac{54}{25}mx + \frac{13}{25}m \mid m \,\in\, \mathbb{R}\right\}$,

$$x^2-x+2=(ax^2+bx-2a+3b)+\left(mx^2-\frac{54}{25}mx+\frac{13}{25}m\right)$$

$$\begin{cases} 1=a+m \\ -1=b-\frac{54}{25}m \\ 2=-2a+3b+\frac{13}{25}m \end{cases}, \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{54}{25} & -1 \\ -2 & 3 & \frac{13}{25} & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{54}{25} & -1 \\ 0 & 3 & \frac{63}{25} & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{54}{25} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{225}{25} & 7 \end{array}\right]$$

$$\frac{225}{25}=9 \quad \therefore \ m=\frac{7}{9} \ ; \quad b=-1+\frac{54}{25}\left(\frac{7}{9}\right)=-1+\frac{42}{25}=\frac{17}{25}, \quad \text{y} \quad a=\frac{2}{9}$$

resultando $\bar{w}=\frac{2}{9}x^2+\frac{17}{25}x+\left(-\frac{4}{9}+\frac{51}{25}\right)=\frac{2}{9}x^2+\frac{17}{25}x+\frac{359}{225}=\bar{s}_A$ que es la proyección buscada.

El vector $\bar{w}^{\perp}$, ortogonal a $\bar{w}$, es: $\bar{w}^{\perp}=\frac{7}{9}x^2-\frac{42}{25}x+\frac{91}{225}$

se puede comprobar que $\bar{w}+\bar{w}^{\perp}=\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{9}\right)x^2+\left(\frac{17}{25}-\frac{42}{25}\right)x+\frac{359+91}{225}=x^2-x+2=\bar{s}$.

2. Determinaremos una base F ortogonal de A, para ello, consideramos un elemento cualquiera de A, por ejemplo $\bar{f}_1=x^2-2$, luego obtenemos $\bar{f}_2\in A$ que sea ortogonal a $\bar{f}_1$, es decir, tal que $(\bar{f}_1\,|\,\bar{f}_2)=0$, $\bar{f}_2=ax^2+bx-2a+3b$, dando a la variable x los valores 0, 1 y 2, se tiene:

$$\begin{array}{lll} \bar{f}_1(0)=-2 & \bar{f}_2(0)=-2a+3b & \\ \bar{f}_1(1)=-1 & \bar{f}_2(1)=-a+4b & \text{y al hacer } (\bar{f}_1\,|\,\bar{f}_2)=0, \text{ se llega a} \\ \bar{f}_1(2)=2 & \bar{f}_2(2)=2a+5b & \end{array}$$

$$-2(-2a+3b)+(-1)(-a+4b)+2(2a+5b)=4a-6b+a-4b+4a+10b=9a=0.$$

Esto es, todo elemento de A, formado con $a=0$ y cualquier valor para b, es ortogonal a x^2-2. Un vector puede ser $\bar{f}_2=x+3$, con lo que la base $\{x^2-2\ ,\ x+3\}$ es ortogonal. Ahora, hace falta normalizar a los vectores $\bar{f}_1$ y $\bar{f}_2$ para obtener una base G que sea ortonormal:

$$\|\bar{f}_1\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3 \Rightarrow \bar{g}_1 = \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}$$

para el segundo vector $\|\bar{f}_2\| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \bar{g}_2 = \frac{x}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}}$ y el conjunto $G = \{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$ es la base buscada. La proyección de $\bar{s}$ sobre el subespacio A es, por definición, $\bar{s}_A = \sum_{i=1}^{2} (\bar{s} \mid \bar{g}_i)\bar{g}_i$, ya que

$$\begin{cases} \bar{g}_1(0) = -\frac{2}{3} , & \bar{g}_2(0) = \frac{3}{5\sqrt{2}} ; & \bar{s}(0) = 2 \\ \bar{g}_1(1) = -\frac{1}{3} , & \bar{g}_2(1) = \frac{4}{5\sqrt{2}} , & \bar{s}(1) = 2 \\ \bar{g}_1(2) = \frac{2}{3} , & \bar{g}_2(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} , & \bar{s}(2) = 4 \end{cases}$$

$$(\bar{s} \mid \bar{g}_1) = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow (\bar{s} \mid \bar{g}_1)\bar{g}_1 = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{9}$$

$$(\bar{s} \mid \bar{g}_2) = \frac{6}{5\sqrt{2}} + \frac{8}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{6+8+20}{5\sqrt{2}} = \frac{34}{5\sqrt{2}} \Rightarrow (\bar{s} \mid \bar{g}_2)\bar{g}_2 = \frac{34}{50}x + \frac{102}{50}$$

$$\bar{s}_A = \frac{2}{9}x^2 + \frac{34}{50}x + \frac{718}{450} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{17}{25}x + \frac{359}{225}$$

que es igual a la obtenida con el método anterior.

10. TEOREMA DE PROYECCIÓN

Si W es un subespacio del espacio V y $\bar{v} \in V$, entonces el vector $\bar{w} \in W$ más cercano a $\bar{v}$ es la proyección de $\bar{v}$ sobre W.

En otras palabras: Si $\forall\ \bar{w}_1 \in W$, el vector $\bar{w} \in W$ es tal que $\| \bar{v} - \bar{w} \| \leq \| \bar{v} - \bar{w}_1 \|$, entonces $\bar{w}$ es la proyección $\bar{v}_W$ de $\bar{v} \in V$, sobre el subespacio W de V.

Este teorema nos sugiere utilizar la teoría de máximos y mínimos, que se estudia en cursos de cálculo; así, la proyección $\bar{v}_W$ puede obtenerse como el vector $\bar{w}$ tal que su diferencia con el vector $\bar{v}$ tenga la norma mínima.

Para el último ejemplo de la sección anterior, la proyección de $\bar{s} = x^2 - x + 2$ sobre el subespacio $A = \{ax^2 + bx - 2a + 3b \mid a\ , b \in \mathbb{R}\}$, puede obtenerse también como el vector $\bar{w} \in A$, cuya diferencia con $\bar{s}$ tenga norma mínima, respecto al producto interno considerado.

La diferencia $\bar{s} - \bar{w} = (1 - a)\,x^2 + (-1 - b)\,x + 2 + 2a - 3b$; para $x = 0,\ 1,\ 2$, es

$$\begin{cases} (\bar{s} - \bar{w})\,(0) = 2 + 2a - 3b \\ (\bar{s} - \bar{w})\,(1) = 2 + a - 4b \\ (\bar{s} - \bar{w})\,(2) = 4 - 2a - 5b \end{cases}$$, con lo que para el producto definido por

$(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{i=0}^{2} p(i)\, q(i)$, su norma es función de las variables a y b:

$$\| \bar{s} - \bar{w} \| = \sqrt{(2+2a-3b)^2 + (2+a-4b)^2 + (4-2a-5b)^2} = f(\,a\ , b\,);$$

ahora, debemos determinar los valores de a y de b, tales que $f(\,a\ , b\,)$ sea mínima, para ello, igualamos a cero cada una de las derivadas parciales de f respecto a las variables a y b:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2(2+2a-3b)2 + 2(2+a-4b)1 + 2(4-2a-5b)(-2)}{2\sqrt{(2+2a-3b)^2 + (2+a-4b)^2 + (4-2a-5b)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{2(2+2a-3b)(-3) + 2(2+a-4b)(-4) + 2(4-2a-5b)(-5)}{2\sqrt{(2+2a-3b)^2 + (2+a-4b)^2 + (4-2a-5b)^2}} = 0;$$

con lo que llegamos al sistema $\begin{cases} 4 + 4a - 6b + 2 + a - 4b - 8 + 4a + 10b = 0 \\ -6 - 6a + 9b - 8 - 4a + 16b - 20 + 10a + 25b = 0 \end{cases}$

de la primera ecuación $9a + 0b = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{9}$, de la segunda ecuación se tiene

$0a + 50b = 34 \Rightarrow b = \frac{34}{50} = \frac{17}{25}$, y el vector $\bar{w}$ correspondiente a estos valores es

$\bar{w} = \bar{s}_A = \frac{2}{9}x^2 + \frac{17}{25}x + \frac{359}{225}$ igual a la proyección obtenida con los otros métodos.

Respecto al producto interno en P_2, definido por: $(\bar{p} \mid \bar{q}) = \sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, donde a_k y b_k, son respectivamente los coeficientes de $\bar{p}$ y de $\bar{q}$, la norma de la diferencia $\bar{s} - \bar{w}$, resulta ser

$\| \bar{s} - \bar{w} \| = \sqrt{(1-a)^2 + (-1-b)^2 + (2+2a-3b)^2}$, función de las variables a y b.

$$\| \bar{s} - \bar{w} \| = g(a,b): \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial a} = \dfrac{2(1-a)(-1) + 0 + 2(2+2a-3b)(2)}{2\sqrt{(1-a)^2 + (-1-b)^2 + (2+2a-3b)^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial b} = \dfrac{0 + 2(-1-b)(-1) + 2(2+2a-3b)(-3)}{2\sqrt{(1-a)^2 + (-1-b)^2 + (2+2a-3b)^2}} = 0 \end{cases}$$ que conduce al sistema

$$\begin{cases} -2 + 2a + 8 + 8a - 12b = 0 \\ 2 + 2b - 12 - 12a + 18b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a - 6b = -3 \\ -6a + 10b = 5 \end{cases} \therefore \begin{cases} a = \dfrac{-3+6b}{5} & \ldots(1) \\ b = \dfrac{5+6a}{10} & \ldots(2) \end{cases}$$

al sustituir (1) en (2) y despejar b, resulta $b = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$, con este valor en (1) queda

$a = \dfrac{-3 + 6\left(\frac{1}{2}\right)}{5} = 0$, y se tiene $\bar{w} = \bar{s}_A = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ igual a lo obtenido en la sección anterior.

Como último ejemplo determinaremos, por los *tres* métodos, la proyección del vector $\bar{v} = (2+i\,,\ 5i\,,\ -1-i\,,\ 2) \in \mathbb{C}^4$ sobre el subespacio $U = \{(z\,, \omega\,, -2z-\omega\,, z+\omega) \mid z\,, \omega \in \mathbb{C}\}$, respecto al producto usual en $\mathbb{C}^4$: $(\bar{x} | \bar{y}) = \sum_{j=1}^{4} x_j \bar{y}_j$ donde $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ y $\bar{y}_j$ es el conjugado de la componente jotaésima del vector $\bar{y}$.

1. Obtendremos el complemento ortogonal de U, determinando la relación entre a, b, c y d, tal que (a, b, c, d), elemento genérico de $U^{\perp}$, sea ortogonal a (z , w , $-2z - w$, $z + w$) para toda pareja $z, w \in \mathbb{C}$, esto es (($z, w, -2z - w, z + w$) | (a, b, c, d)) = 0 con lo que

$$z\bar{a} + w\bar{b} + (-2z - w)\bar{c} + (z+w)\bar{d} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{a} - 2\bar{c} + \bar{d} = 0 \\ \bar{b} - \bar{c} + \bar{d} = 0 \end{cases}.$$

Considerando el conjugado de ambos miembros en cada una de las ecuaciones, resulta:

$\begin{cases} \overline{\bar{a} - 2\bar{c} + \bar{d}} = \bar{0} & \ldots(1) \\ \overline{\bar{b} - \bar{c} + \bar{d}} = \bar{0} & \ldots(2) \end{cases}$. Ya que el conjugado de una suma es la suma de los conjugados de los sumandos y el conjugado de un producto es el producto de los conjugados de los factores, se tiene: $\overline{\bar{a} - 2\bar{c} + \bar{d}} = \bar{\bar{a}} - \overline{2\bar{c}} + \bar{\bar{d}}$. Como $\bar{\bar{a}} = a$; $\bar{2} = 2$, la ecuación (1) queda como $a - 2c + d = 0 \ldots(3)$. De manera semejante, la ecuación (2) se convierte en $b - c + d = 0 \ldots(4)$, de aquí $d = c - b \ldots(5)$, sustituyendo en (3), tenemos $a - 2c + c - b = 0 \Rightarrow c = a - b$, ésta sustituida en (5) resulta $d = a - 2b$.

Así, el complemento ortogonal de U, respecto al producto interno usual en $\mathbb{C}^4$, es el subconjunto de $\mathbb{C}^4$: $U^{\perp} = \{(a, b, a-b, a-2b) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$. Ahora, la proyección de $\bar{v}$ sobre U es el vector $\bar{u} \in U$, cuya suma con $\bar{u}^{\perp} \in U^{\perp}$, es igual a $\bar{v}$, esto es $\bar{u} + \bar{u}^{\perp} = \bar{v}$, o sea, $(z, w, -2z - w, z + w) + (a, b, a - b, a - 2b) = (2 + i, 5i, -1 - i, 2)$, que conduce al sistema $\begin{cases} z + a = 2 + i \\ w + b = 5i \\ -2z - w + a - b = -1 - i \\ z + w + a - 2b = 2 \end{cases}$; al resolverlo por medio de matrices se obtiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5i \\ -2 & -1 & 1 & -1 & -1-i \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5i \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 3+i \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -i \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2+i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5i \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3+6i \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

de la tercera ecuación, $3a = 3 + 6i \Rightarrow a = 1 + 2i$ y de la última, $3a - 3b = 3$, es decir, $a - b = 1 \Rightarrow b = a - 1 = 1 + 2i - 1 = 2i$, de la segunda ecuación $w + b = 5i$, con lo que $w = 5i - 2i = 3i$, y de la primera, $z + a = 2 + i$, o sea, $z = 2 + i - a = 1 - i$; con estos valores de z y de w, $-2z - w = -2 + 2i - 3i = -2 - i$; $z + w = 1 - i + 3i = 1 + 2i$, el vector $\bar{u}$, la proyección requerida es: $\bar{u} = \bar{v}_U = (1 - i, 3i, -2 - i, 1 + 2i)$.

2. Otra forma de obtener $\bar{v}_U$ es aplicando la definición de proyección sobre un subespacio, para lo cual es necesario conocer una base ortonormal de U, que llamaremos B. Primero formamos una base $A=\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$, ortogonal. El vector $\bar{a}_1$ lo obtenemos dando valores a z y w, por ejemplo, $z=1$ y $w=\text{i} \Rightarrow \bar{a}_1=(1, i, -2-i, 1+i)$.

El vector $\bar{a}_2$ debe ser tal que $\bar{a}_2 \in U$ y además $(\bar{a}_2 \mid \bar{a}_1)=0$, aplicando el producto interno queda: $z(1)+w(-\text{i})+(-2z-w)(-2+\text{i})+(z+w)(1-\text{i})=0$; y efectuando operaciones resulta $z-wi+4z+2w-2zi-wi+z+w-zi-wi=0$;

$z(6-3i)+w(3-3i)=0$ de aquí, $w=\dfrac{-6+3i}{3-3i}z=\dfrac{3(-2+i)}{3(1-i)}z=\dfrac{(-2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}z$

$w=\dfrac{(-2-1)+(-2+1)i}{2}z$; $w=\left(-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)z$.

Se puede dar a z cualquier valor complejo, así, si $z=2$, resulta $w=-3-i$; $-2z-w=-1+i$; $z+w=-1-i$. Un vector $\bar{a}_2$ ortogonal a $\bar{a}_1$ es $\bar{a}_2=(2, -3-i, -1+i, -1-i)$. Ahora, debemos normalizar los vectores de la base A, para tener la base B ortonormal.

$$\|\bar{a}_1\| = \sqrt{1(1)+i(-i)+(-2-i)(-2+i)+(1+i)(1-i)} = \sqrt{1+1+5+2}=\sqrt{9}=3$$

el vector $\bar{b}_1=\dfrac{1}{\|\bar{a}_1\|}\bar{a}_1=\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{i}{3}, \dfrac{-2-i}{3}, \dfrac{1+i}{3}\right)$

$$\|\bar{a}_2\|=\sqrt{2(2)+(-3-i)(-3+i)+(-1+i)(-1-i)+(-1-i)(-1+i)}=\sqrt{4+10+2+2}=\sqrt{18}$$

$\|\bar{a}_2\|=3\sqrt{2}$, el vector $\bar{b}_2=\dfrac{1}{\|\bar{a}_2\|}\bar{a}_2=\left(\dfrac{2}{3\sqrt{2}}, \dfrac{-3-i}{3\sqrt{2}}, \dfrac{-1+i}{3\sqrt{2}}, \dfrac{-1-i}{3\sqrt{2}}\right)$

$$(\bar{v}\mid\bar{b}_1)=(2+i)\frac{1}{3}+5i\left(-\frac{i}{3}\right)+(-1-i)\left(-\frac{2}{3}+\frac{i}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{i}{3}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{i}{3}+\frac{5}{3}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)-\frac{i}{3}+\frac{2}{3}i+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i=\frac{12}{3}+0\,i=4$$

$$(\bar{v}\mid\bar{b}_1)\ \bar{b}_1=4\ \bar{b}_1=\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}i, -\frac{8}{3}-\frac{4}{3}i, \frac{4}{3}+\frac{4}{3}i\right)$$

$$(\bar{v}\,|\,\bar{b}_2) = (2+i)\frac{2}{3\sqrt{2}} + 5i\left(-\frac{3}{3\sqrt{2}} + \frac{i}{3\sqrt{2}}\right) + (-1-i)\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{i}{3\sqrt{2}}\right) + 2\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{i}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{2i}{3\sqrt{2}} - \frac{15i}{3\sqrt{2}} - \frac{5}{3\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) + \frac{2i}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{2i}{3\sqrt{2}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} - \frac{9i}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}$$

$$(\bar{v}\,|\,\bar{b}_2)\,\bar{b}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3i}{\sqrt{2}}\right)\bar{b}_2 =$$

$$= \left(-\frac{2}{6} - \frac{2(3i)}{6}\,,\, \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)i\,,\, \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right)i\,,\, \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right)i\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - i\,,\, \frac{5}{3}i\,,\, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\,,\, -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right)$$

$$\bar{v}_U = \left(\frac{4}{3}\,,\, \frac{4}{3}i\,,\, -\frac{8}{3} - \frac{4}{3}i\,,\, \frac{4}{3} + \frac{4}{3}i\right) + \left(-\frac{1}{3} - i\,,\, \frac{5}{3}i\,,\, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\,,\, -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\right),$$

así que $\bar{v}_U = (\,1-i\,,\,3i\,,\,-2-i\,,\,1+2i\,)$.

3. Para aplicar el tercer método, debemos obtener la diferencia $\bar{v} - \bar{u}$, donde el vector $\bar{u}$ es del subespacio U, esto es: $\bar{v} - \bar{u} = (\,2+i-z\,,\,5i-w\,,\,-1-i+2z+w\,,\,2-z-w\,)$, ya que, $z, w \in \mathbb{C}$, podemos expresarlos como $\begin{cases} z = m+ni \\ w = p+qi \end{cases}$ donde $m\,,n\,,\,p\,,q \in \mathbb{R}$

$$\bar{v} - \bar{u} = ((2-m)+(1-n)i, -p+(5-q)i, (-1+2m+p)+(-1+2n+q)i, (2-m-p)+(-n-q)i)$$

cuya norma es:

$$\sqrt{(2-m)^2+(1-n)^2+(-p)^2+(5-q)^2+(-1+2m+p)^2+(-1+2n+q)^2+(2-m-p)^2+(-n-q)^2}$$

Esta norma es una función (que podemos llamar f) de las variables $m\,,n\,,p\,,q$. Al igualar a cero cada una de las cuatro derivadas parciales de f, se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones, cuya solución nos da los valores de $m\,,n\,,p$ y q, correspondientes al vector de U que es la proyección $\bar{v}_U$.

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{2(2-m)(-1)+2(-1+2m+p)(2)+2(2-m-p)(-1)}{2f(m,n,p,q)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m}=\frac{-2+m-2+4m+2p-2+m+p}{f(m,n,p,q)}=0 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{-1+n-2+4n+2q+n+q}{f(m,n,p,q)}=0 \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{p-1+2m+p-2+m+p}{f(m,n,p,q)}=0 \qquad \ldots(3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}=\frac{-5+q-1+2n+q+n+q}{f(m,n,p,q)}=0 \qquad \ldots(4)$$

al multiplicar por $f(m,n,p,q)$ las cuatro ecuaciones, y simplificar términos llegamos a

$$\begin{cases} 6m+3p=6 & \Rightarrow \quad 2m+p=2 & \ldots(1') \\ 6n+3q=3 & \Rightarrow \quad 2n+q=1 & \ldots(2') \\ 3m+3p=3 & \Rightarrow \quad m+p=1 & \ldots(3') \\ 3q+3n=6 & \Rightarrow \quad q+n=2 & \ldots(4') \end{cases}$$

Si restamos (3') de (1'), $m=1$. Sustituyendo este valor en (3'), se tiene $p=0$. De (2') $q=1-2n$ que, sustituido en (4'), da $1-2n+n=2 \Rightarrow n=-1 \;\therefore\; q=3$.

De lo anterior: $z=1-i$; $w=3i$; $-2z-w=-2-i$; $z+w=1+2i$. El vector $\bar{u}\in U$, más cercano a $\bar{v}$, es $\bar{u}=\bar{v}_U=(1-i\,,3i\,,-2-i\,,1+2i)$; igual a la proyección obtenida con los métodos anteriores.

11. MÍNIMOS CUADRADOS

El método de *mínimos cuadrados* se utiliza para representar con un modelo matemático la relación entre variables de las que se conoce, en forma empírica, un conjunto de valores.

x	y
-1	5
0	4
1	6
3	1
4	3
6	-1

Entonces, si de manera experimental se tiene el conjunto de seis parejas de valores x , y de la tabla de la derecha y por conocimiento del experimento, podemos suponer que la relación entre estas variables es lineal, necesitamos la pendiente m y la ordenada al origen b de la recta de ecuación $y_1 = mx + b$, tal que esa pareja $(m\ ,b)$ sea la *más próxima* a la solución del sistema $\begin{cases} -m+b=5 \\ 0m+b=4 \\ m+b=6 \\ 3m+b=1 \\ 4m+b=3 \\ 6m+b=-1 \end{cases}$ (que es incompatible) .

El sistema en forma matricial es $A\bar{u}=\bar{y}$, donde $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$; $\bar{u}=\begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}$, $\bar{y}=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

El primer miembro: $A\bar{u}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1m & + & b \\ 0m & + & b \\ 1m & + & b \\ 3m & + & b \\ 4m & + & b \\ 6m & + & b \end{bmatrix}$; que es igual a: $m\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

es decir, $A\bar{u}$ es una combinación lineal de las columnas de A. Con esto, el sistema sólo tiene solución si el vector de términos independientes pertenece al espacio generado por las columnas de A. Ese espacio es, en este ejemplo, un subespacio de $\mathbb{R}^6$ (en general de $\mathbb{R}^n$ donde n es el número de parejas de datos) que llamaremos W. La información que tenemos es un vector $\bar{y}=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ que pertenece a $\mathbb{R}^6$, pero no a W; entonces, la solución $(m\ ,b)$

del sistema la obtenemos con el vector $\bar{y}_1 \in W$ *más próximo* a $\bar{y}$ (considerando el producto interno usual en $\mathbb{R}^6$, el producto punto).

El vector *más próximo* es la proyección de $\bar{y}$ sobre W, o sea, $\bar{y}_1$ tal que la norma de la diferencia $\bar{y} - \bar{y}_1$, sea mínima; para esto, se requiere que sea *mínima* la suma de los *cuadrados* de los valores de dicha diferencia (debido a que se emplea el producto punto). Ésta es la razón del nombre del método (figura 1).

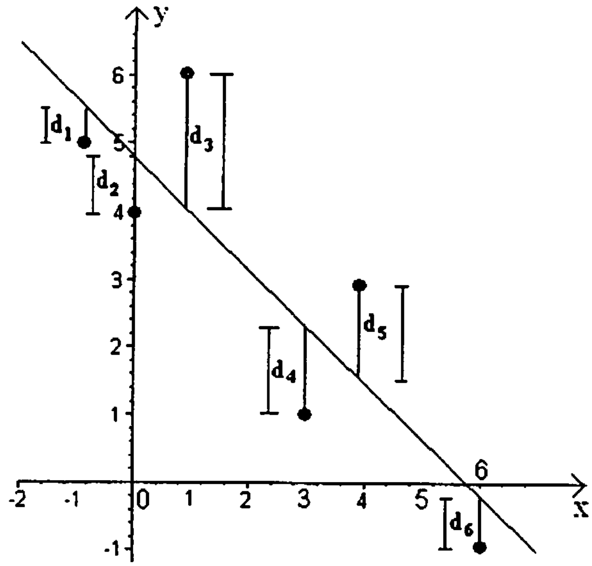

FIGURA 1

Por otra parte, el vector $\bar{y}$ es igual a la suma $\bar{y}_1 + \bar{g}$, del vector $\bar{y}_1 \in W$, más otro (que aquí llamamos $\bar{g}$) perteneciente al complemento ortogonal $W^{\perp}$ del espacio W. El vector $\bar{g}$ debe ser ortogonal a todos los vectores (columnas de A) que generan W: $\overline{(C_1)_A} \cdot \bar{g} = 0$; $\overline{(C_2)_A} \cdot \bar{g} = 0$. Estas dos ecuaciones forman el sistema

$$\begin{cases} a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + a_{31}g_3 + a_{41}g_4 + a_{51}g_5 + a_{61}g_6 = 0 \\ a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + a_{32}g_3 + a_{42}g_4 + a_{52}g_5 + a_{62}g_2 = 0 \end{cases}$$ que expresado matricialmente es $A^{\mathrm{T}}\bar{g} = \bar{0}$.

Ya que $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{g}$, $\bar{g} = \bar{y} - \bar{y}_1 = \bar{y} - A\bar{u}$, resulta $A^T(\bar{y} - A\bar{u}) = \bar{0} \Rightarrow A^T\bar{y} - A^T A\bar{u} = \bar{0}$ y tenemos el sistema $A^T A\bar{u} = A^T\bar{y}$ compatible, con el que obtenemos la solución $\bar{u} = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}$.

Para nuestro ejemplo: $$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 13 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T\bar{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} 63 & 13 \\ 13 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \end{bmatrix};$$

al resolverlo obtenemos $\begin{cases} m \approx -0.8325 \\ b \approx \ \ 4.8038 \end{cases}$ y la recta que "mejor se ajusta" al conjunto de datos empíricos con el método de ***mínimos cuadrados*** tiene la ecuación $y_1 \approx -0.8325x + 4.8038$.

Si ahora tenemos la tabla de valores de la derecha, la matriz A es:

x	y
-2	0
-1	2
0	1
1	2
3	3

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \; ; \quad A^T A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} ;$$

$$A^T \bar{y} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

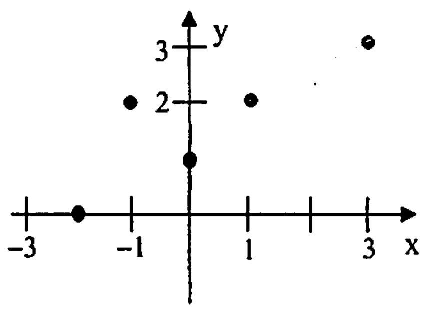

FIGURA 2

Entonces, para obtener la ecuación de la recta que mejor se ajusta por mínimos cuadrados al conjunto de valores de la tabla, sólo debemos resolver el sistema: $A^T A \bar{u} = A^T \bar{y}$,

es decir $\begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m = 0.5 \\ b = 1.5 \end{cases}$

$\therefore \; y_1 = 0.5x + 1.5$ cuya gráfica puede verse en la figura 2.

Como un tercer ejemplo consideremos el conjunto de valores dados por la tabla de la derecha, cuya gráfica (figura 3) nos sugiere "ajustarle" un polinomio de segundo grado $y_1 = p(x) = ax^2 + bx + c$ del cual obtendremos sus tres coeficientes a, b, c, aplicando el método.

x	y
-3	-1
-2	1
-1	2
1	3
3	1
5	0

La matriz A tiene tres columnas: la primera, los coeficientes de la incógnita a (los cuales son el cuadrado de los valores de x); la segunda, los coeficientes de b (valores de x); y la tercera, los coeficientes de c.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 1 & 9 & 25 \\ -3 & -2 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 805 & 117 & 49 \\ 117 & 49 & 3 \\ 49 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T\bar{y}=\begin{bmatrix} 9 & 4 & 1 & 1 & 9 & 25 \\ -3 & -2 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix};\ \bar{u}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix} 805 & 117 & 49 \\ 117 & 49 & 3 \\ 49 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\quad \text{resolviendo}$$

el sistema se obtiene $\bar{u}\approx\begin{bmatrix} -0.1953 \\ 0.4225 \\ 2.3841 \end{bmatrix}$

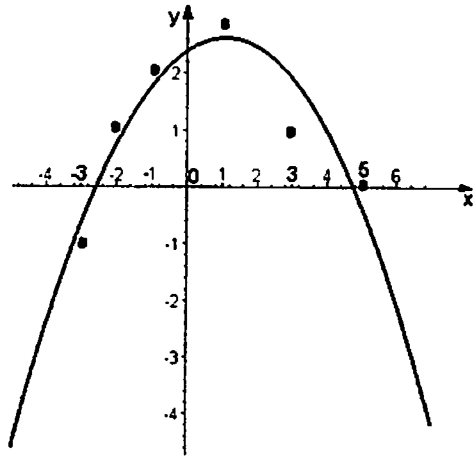

FIGURA 3

y el polinomio es: $p\approx -0.1953x^2+0.4225x+2.3841$.

Veamos otra situación: los datos de la tabla representan una relación que no corresponde, como en los ejemplos anteriores, a una polinomial (figura 4).

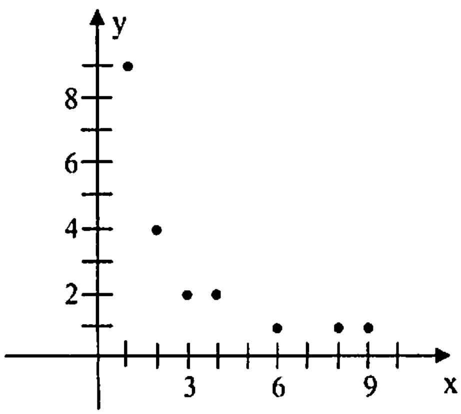

FIGURA 4

x	y
1	9
2	4
3	2
4	2
6	1
8	1
9	1

La relación se acerca más a una exponencial: $y_1 = ae^{bx}$, con la cual no se llega a un sistema de ecuaciones lineales ni es posible manejarlo matricialmente. Entonces, consideramos los logaritmos naturales de cada uno de los miembros de la igualdad $y_1 = ae^{bx}$ y obtenemos $Ly_1 = La + bx$, ahora buscamos el vector $\overline{Ly}_1 \in W$, más cercano al vector $\overline{Ly}$ de los datos.

x	y	Ly
1	9	2.197
2	4	1.386
3	2	0.693
4	2	0.693
6	1	0
8	1	0
9	1	0

Con esto tenemos: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\\ 1 & 4\\ 1 & 6\\ 1 & 8\\ 1 & 9\end{bmatrix}$ (primera columna, coeficientes de La ; segunda columna, coeficientes de b);

$$\bar{u}=\begin{bmatrix}La\\ b\end{bmatrix};\quad A^TA=\begin{bmatrix}7 & 33\\ 33 & 211\end{bmatrix};\quad A^T\overline{Ly}=\begin{bmatrix}4.97\\ 9.81\end{bmatrix};\quad \left(A^TA\right)^{-1}=\frac{1}{388}\begin{bmatrix}211 & -33\\ -33 & 7\end{bmatrix};$$

$$\bar{u}=\left(A^TA\right)^{-1}A^T\overline{Ly}\approx\frac{1}{388}\begin{bmatrix}211 & -33\\ -33 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4.97\\ 9.81\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1.868\\ -0.246\end{bmatrix};$$

$La\approx 1.868 \;\Rightarrow\; a\approx 6.48 \;\therefore\; y_1\approx 6.48e^{-0.246x}$.

El método también es útil si los valores empíricos son coordenadas polares, como en el ejemplo siguiente.

Se tiene el conjunto de valores θ y r dados a la derecha, al representarlos gráficamente (figura 5) se aproximan a un segmento de cónica cuya ecuación polar es:

$r=\dfrac{a}{1-b\cos\theta}$ .... (1) ; además, dependiendo del valor de la constante b, la ecuación representa una elipse, una parábola o una hipérbola. La ecuación (1) puede escribirse como: $r-rb\cos\theta=a \;\Rightarrow\; r=(r\cos\theta)b+a$ ésta, en coordenadas cartesianas, corresponde a la ecuación de una recta cuya variable independiente es $r\cos\theta$ y cuya variable dependiente es r. Con esto, para obtener la solución (b , a) necesitamos una matriz A que tiene como primera columna los productos $r\cos\theta$, los

θ	r
$\frac{1}{6}\pi=30°$	4.0
$\frac{1}{4}\pi=45°$	4.0
$\frac{1}{3}\pi=60°$	3.4
$\frac{1}{2}\pi=90°$	3.0
$\frac{7}{12}\pi=105°$	2.6
$\frac{2}{3}\pi=120°$	2.6

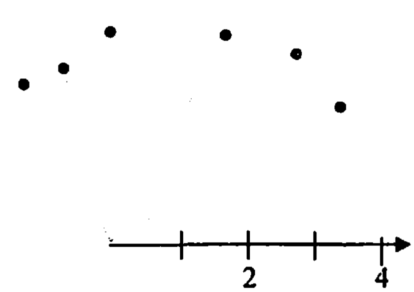

FIGURA 5

cuales para el ejemplo son aproximadamente: $\begin{array}{c} r\cos\theta \\ \hline 3.4641 \\ 2.8284 \\ 1.7000 \\ 0 \\ -0.6729 \\ -1.3000 \end{array}$.

Así,

$$A^TA \approx \begin{bmatrix} 3.4641 & 2.8284 & 1.7000 & 0 & -0.6729 & -1.3000 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.4641 & 1 \\ 2.8284 & 1 \\ 1.7000 & 1 \\ 0 & 1 \\ -0.6729 & 1 \\ -1.3000 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 25.0326 & 6.0196 \\ 6.0196 & 6 \end{bmatrix};$$

$$A^Tr \approx \begin{bmatrix} 3.4641 & 2.8284 & 1.7000 & 0 & -0.0.6729 & -1.3000 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3.4 \\ 3.0 \\ 2.6 \\ 2.6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 25.8205 \\ 19.6000 \end{bmatrix}.$$

El sistema queda: $\begin{bmatrix} 25.0326 & 6.0196 \\ 6.0196 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 25.8205 \\ 19.6000 \end{bmatrix}$; del que obtenemos $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.32 \\ 2.94 \end{bmatrix}$.

Debido a que la constante b resultó positiva y representa la *excentricidad* en la ecuación polar de la cónica, los puntos pertenecen a una curva que se *acerca* a un segmento de hipérbola con ecuación polar: $r_1 \approx \dfrac{2.94}{1-0.32\cos\theta}$.

Esta obra se terminó de imprimir
en marzo de 2009
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 500 ejemplares impresos en offset
con papel bond de 75 gramos, de 28 × 21.5 cm.

Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ingeniería