Álgebra Lineal
Lectura 4: Espacio Vectorial

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020, Rev. Agosto 2021

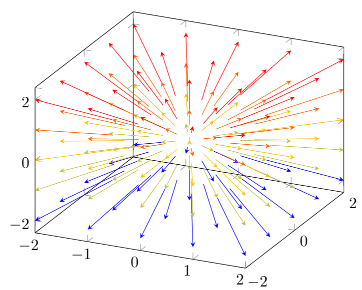

Figura 1. El espacio vectorial es una colección de vectores que poseen diversas propiedades. Sirven para representar fenómenos físicos o lugares geométricos

El concepto de vector es muy conocido. Sin embargo, su definición puede causar confusión pues se tiene la creencia que todo vector es un elemento con magnitud, dirección y sentido; esta definición es correcta en el contexto de la Física. Además, se considera que la representación gráfica del vector es un segmento dirigido o flecha; dicha representación es correcta desde el punto de vista de la Geometría Analítica.

A pesar de lo mencionado, el concepto de vector no es físico ni geométrico. Los vectores fueron propuestos a mediados del siglo XIX por William Hamilton, mientras que los conceptos físicos y geométricos que utilizan vectores son más antiguos (por ejemplo, el concepto de velocidad fue formulado por Galileo mientras que la Geometría Analítica se le atribuye a Descartes).

Durante este curso se estudiarán a los vectores, sus propiedades y funciones que les afectan, siempre desde el contexto algebraico en el cual se establece que un vector es un elemento de un conjunto conocido como espacio vectorial (figura 1).

Los espacios vectoriales siempre han formado parte del entorno físico. Se trata de una estructura algebraica cuyas propiedades permiten a la Física plantear los conceptos de dirección, magnitud y sentido. En el Álgebra Lineal el concepto de vector se enuncia por medio de dos operaciones elementales dentro del espacio vectorial: suma y multiplicación por un número.

Tomando un sistema de ecuaciones lineales como el siguiente,

$$3x + 2y = 1 \tag{1}$$
$$-x + y = -2 \tag{2}$$

su solución puede calcularse al multiplicar a (2) por 3 y sumarla a (1) para obtener una nueva ecuación lineal. Esto quiere decir que las ecuaciones del sistema anterior satisfacen lo que se conoce como el principio de linealidad: conservación de la suma y la multiplicación por un número.

Dentro de un espacio vectorial, todos los elementos deben ser capaces de sumarse y cumplir propiedades de la suma. En el caso de la multiplicación por un número, se requiere un conjunto auxiliar (un campo) que permita a la operación cumplir con otras propiedades. Las operaciones y sus propiedades permiten establecer al espacio vectorial como una estructura algebraica.

Para un conjunto no-vacío V (sus elementos se llaman vectores) y un campo K (sus elementos se llaman escalares) se definen:

- La adición de vectores: $\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ existe un tercer vector $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.
- El producto por un escalar: $\forall\ \mathbf{u}\in V$ y $\forall\ \alpha\in K$ existe un segundo vector $\alpha\mathbf{u}$.

El conjunto V es un espacio vectorial sobre el campo K, si las operaciones definidas cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V$
2. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
3. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
4. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$
5. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
6. $\alpha\mathbf{u}\in V$
7. $(\alpha\beta)\,\mathbf{u}=\alpha\,(\beta\mathbf{u})$
8. $(\alpha+\beta)\,\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$
9. $\alpha\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$
10. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Donde $\mathbf{0}$ es el elemento neutro, conocido como vector nulo.

Ejemplos básicos de espacios vectoriales son polinomios, matrices o funciones. Incluso, los campos son espacios vectoriales por sí mismos.

Al ser una estructura algebraica, dentro de los espacios vectoriales pueden plantearse ecuaciones para ser resueltas. Esto es posible debido a las siguientes propiedades adicionales $\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V,\ \forall\ \alpha,\beta\in K$:

- $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}\Rightarrow\mathbf{v}=\mathbf{w}$
- $\alpha\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}\Rightarrow\mathbf{u}=\mathbf{v}$
- $\alpha\mathbf{u}=\beta\mathbf{u}\Rightarrow\alpha=\beta$
- $(0)\,\mathbf{u}=\alpha\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es el vector nulo y 0 es el cero de K.
- $-\alpha\mathbf{u}=-\,(\alpha\mathbf{u})\Rightarrow\alpha\,(-\mathbf{u})$

Ejemplo. Determine si $\mathbb{R}^2=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales.

Tomando a $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},\mathbf{z}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ la demostración se sigue a continuación.

Propiedad $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in V$:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

El resultado es un elemento de $\mathbb{R}^2$ pues tiene dos componentes reales sin condiciones. Por lo tanto se cumple la propiedad.

Propiedad $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1+z_1\\y_2+z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x_1+y_1+z_1\\x_2+y_2+z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1+z_1\\x_2+y_2+z_2\end{bmatrix}$$

Se llega a una igualdad; por lo tanto, la suma es asociativa.

Propiedad $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 + y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 + y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se llega a una igualdad; por lo tanto, la propiedad se cumple.

Propiedad $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. Se define $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 + e_1 \\ x_2 + e_2 \end{bmatrix} &= \end{aligned}$$

Por igualdad en las componentes

$$\begin{aligned} x_1 + e_1 = x_1 \quad &\Rightarrow \quad e_1 = 0 \\ x_2 + e_2 = x_2 \quad &\Rightarrow \quad e_2 = 0 \end{aligned}$$

Entonces, el vector nulo es $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. La propiedad es válida.

Propiedad $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Se define $-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se aplica la igualdad entre componentes:

$$\begin{aligned} x_1 + u_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_1 = -x_1 \\ x_2 + u_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_2 = -x_2 \end{aligned}$$

El inverso aditivo es $-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$; la propiedad se cumple.

Propiedad $\alpha\mathbf{u} \in V$:

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

El producto de números reales resulta en un número real, por lo que las componentes del vector $\alpha\mathbf{x}$ son reales y la cerradura se satisface.

Propiedad $(\alpha\beta)\,\mathbf{u} = \alpha\,(\beta\mathbf{u})$:

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \alpha \left(\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta x_2 \end{bmatrix} &= \alpha \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se llega a una igualdad, por lo que la propiedad se cumple.

Propiedad $(\alpha + \beta)\,\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$:

$$(\alpha + \beta) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Propiedad $(\alpha+\beta)\,\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}(\alpha+\beta)\,x_1\\(\alpha+\beta)\,x_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta x_1\\\beta x_2\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta x_1\\\alpha x_2+\beta x_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta x_1\\\alpha x_2+\beta x_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Hay igualdad a ambos lados del desarrollo y la propiedad es válida.

Propiedad $\alpha\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\alpha\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\right)&=\alpha\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\\\alpha\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha y_1\\\alpha y_2\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\alpha\,(x_1+y_1)\\\alpha\,(x_2+y_2)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\alpha x_1+\alpha y_1\\\alpha x_2+\alpha y_2\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}\alpha x_1+\alpha y_1\\\alpha x_2+\alpha y_2\end{bmatrix}&=\end{aligned}$$

Por igualdad, se satisface la propiedad.

Propiedad $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}1\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}(1)x_1\\(1)x_2\end{bmatrix}&=\\\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}&=\end{aligned}$$

La propiedad también se satisface. En vista que las diez propiedades de la definición de espacio vectorial se cumplen, el conjunto $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre el campo de los reales.

De la misma forma que los grupos y campos, en el espacio vectorial no se condicionan reglas de correspondencia específicas de las operaciones. Sin embargo, siempre deben llamarse suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar, y el espacio siempre debe apoyarse en un campo.

Álgebra Lineal
Lectura 5: Subespacio Vectorial

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020, Rev. Agosto 2021

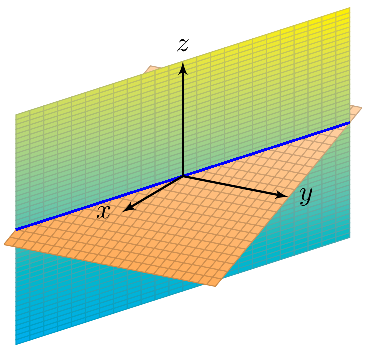

Figura 1. Los planos y las rectas que contienen al origen son subespacios vectoriales.

Todo conjunto posee subconjuntos, cada uno con características propias que le dan identidad. Por ejemplo, el cubo coordenado puede contener subconjuntos que cumplen ciertas características: los planos, las rectas, las curvas y las superficies cumplen con ecuaciones que solo son satisfechas por cierto conjunto de puntos.

Al ser un conjunto, un espacio vectorial tiene una infinidad de subconjuntos; dichos subconjuntos pueden ser por sí mismos espacios vectoriales. Un subconjunto que por sí mismo es un espacio vectorial se llama subespacio vectorial.

> Sea W un subconjunto del espacio vectorial V. W será un subespacio vectorial de V si $\forall$ $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in W$ se satisfacen
>
> 1. $\mathbf{m} + \mathbf{n} \in W$
> 2. $\alpha\mathbf{m} \in W$

El subespacio cumplirá con las 10 propiedades de la definición de espacio vectorial, pero al estar contenido dentro de otro espacio heredará algunas de esas propiedades.

Es importante mencionar que dentro del subespacio las propiedades de la cerradura en la suma de vectores y el vector nulo están relacionadas: si la cerradura se cumple, entonces el vector nulo está contenido en el subconjunto; sin embargo, si el vector nulo está presente, no necesariamente se cumplirá la cerradura.

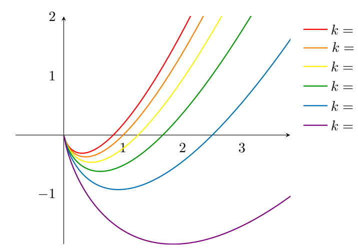

Figura 2. La ecuación diferencial $y' - \frac{y}{x} = 1$ tiene soluciones de la forma $y = x \ln kx$, las cuales forman un subespacio vectorial.

Geométricamente, un subespacio vectorial son rectas y planos que satisfacen la definición (figura 1). Sin embargo, no son los únicos subespacios: las funciones que satisfacen una ecuación diferencial (figura 2), un campo numérico contenido en los números complejos, los polinomios acotados a una condición inicial o las matrices triangulares también forman un subespacio vectorial, siempre y cuando conserven la suma y la multiplicación por un escalar.

Ejemplo. Demuestre que el plano $\pi : x - y + z = 0$ es un subespacio vectorial, mientras que la recta $L : \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$ no lo es.

Ambos lugares geométricos pueden reescribirse como

$$\pi : x - y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x + z$$

$$\therefore \quad \pi = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| y = x + z ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2 + t \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad L = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -2 + t \\ 2t \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

que forman subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

PLANO π

Cerradura para la suma de vectores:

$$\begin{bmatrix} x \\ x + z \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ m + p \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + m \\ (x + m) + (z + p) \\ z + p \end{bmatrix}$$

Si $x + m = a$ y $z + p = b$ entonces

$$\begin{bmatrix} x + m \\ (x + m) + (z + p) \\ z + p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a + b \\ b \end{bmatrix} \in \pi$$

Cerradura para la multiplicación por un escalar:

$$\alpha \begin{bmatrix} x \\ x + z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha x + \alpha z \\ \alpha z \end{bmatrix}$$

Si $\alpha x = a$ y $\alpha z = b$ entonces

$$\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha x + \alpha z \\ \alpha z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a + b \\ b \end{bmatrix} \in \pi$$

RECTA L

Cerradura para la suma de vectores:

$$\begin{bmatrix} t \\ -2 + t \\ 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ -2 + s \\ 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + s \\ -2 + (t + s) \\ 2\,(t + s) \end{bmatrix}$$

Si $t + s = a$ entonces

$$\begin{bmatrix} t + s \\ -4 + (t + s) \\ 2\,(t + s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -2 + a \\ 2a \end{bmatrix} \notin L$$

Se observa que la componente $y = -4 + a$ no coincide con las ecuaciones paramétricas de L; es decir, la suma de dos puntos de la recta no pertenece a dicho lugar geométrico. En consecuencia la recta L no es un subespacio vectorial, en tanto que el plano π sí lo es.

Álgebra Lineal
Lectura 6: Combinación Lineal

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020, Rev. Agosto 2021

1. Combinación Lineal

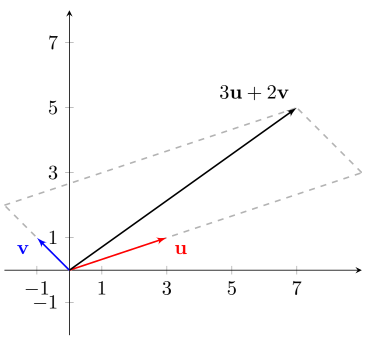

Figura 1. Una combinación lineal usa la suma y la multiplicación por un escalar para crear vectores o verificar si un vector es parte o no de un conjunto.

Un plano está formado por una infinidad de puntos, los cuales requieren al menos dos vectores para obtenerse. También puede verificarse si un punto pertenece al plano o no. En ambos casos se requiere una ecuación vectorial del plano como la siguiente:

$$\mathbf{p} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v} + \mathbf{p}_0 \tag{1}$$

Para obtener un punto, se dan valores a t y s y se simplifica la expresión (1); en caso que se desee verificar si un punto pertenece al plano, se sustituye p y simplifica (1) para resolver un sistema de ecuaciones lineales cuya solución son t y s. En ambos casos se utilizan las operaciones básicas del espacio vectorial: suma de vectores y multiplicación de vector por escalar.

Sean un conjunto de vectores $G = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ y uno de escalares $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$. Una combinación lineal es una expresión de la forma

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{x} \tag{2}$$

El vector $\mathbf{x}$ cualquiera se puede obtener a partir de otros.

Cuando se aplican las dos operaciones a un conjunto de vectores, se realiza una combinación lineal, como muestra la figura 1. Los objetivos son la generación de nuevos vectores y la verificación de pertenencia a un espacio vectorial.

La combinación lineal es la generalización de un sistema de ecuaciones lineales, pues expresiones como (1) y (2) involucran varias incógnitas, y cada componente es una ecuación diferente a resolver.

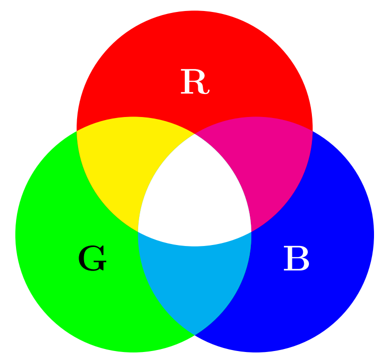

Figura 2. La mezcla aditiva del color es un ejemplo de combinación lineal, pues tres colores primarios generan nuevos colores.

Los ejemplos en los que se presentan las combinaciones lineales son muy variados: planos, rectas, mezcla aditiva de colores (figura 2), cuerpos sujetos a fuerzas e incluso recetas de cocina.

Ejemplo. Sea una pelota colgante, como la mostrada en la figura 3, sostenida por dos cuerdas. El sistema está en reposo y la pelota pesa $W = 7\ [N]$. ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$?

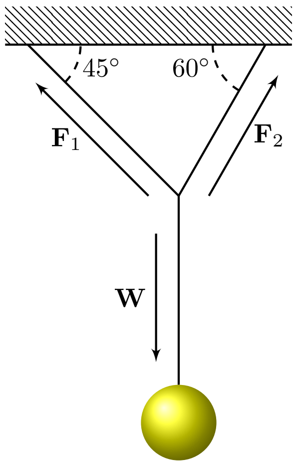

Figura 3

Como el sistema está en equilibrio estático, la resultante de la suma de fuerzas es el vector nulo; es decir

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 - \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

$$F_1 \begin{bmatrix} -\cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{bmatrix} + F_2 \begin{bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es una combinación lineal de fuerzas. Aplicando las operaciones y la igualdad entre vectores, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcl} -0.71F_1 & +0.50F_2 & = & 0 \\ 0.71F_1 & +0.87F_2 & = & 7 \end{array}$$

Este es un sistema compatible determinado, cuya solución proporciona las magnitudes solicitadas: $F_1 = 3.60\ [N]$ y $F_2 = 5.11\ [N]$.

2. Existencia de la Combinación Lineal

El ejemplo anterior ilustra perfectamente que toda combinación lineal desemboca en un sistema de ecuaciones lineales (SEL). De acuerdo a la teoría estudiada en el curso de Álgebra, un sistema de ecuaciones lineales se clasifica en tres tipos de acuerdo a su solución; al estar ligados, los tipos de sistemas se trasladan a las combinaciones lineales para darles una identidad específica en el espacio o subespacio vectorial al que pertenezcan los vectores. La clasificación es la siguiente:

- SEL compatible determinado. La combinación lineal es única; es decir, cada escalar de la combinación posee un único valor.
- SEL compatible indeterminado. Existen múltiples combinaciones lineales; los escalares dependen de parámetros libres.
- SEL incompatible. La combinación lineal no existe.

Ejemplo. Exprese al vector $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ como combinación lineal

a. $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

b. $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

La primera combinación lineal es

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones por escalonamiento se obtienen las siguientes matrices equivalentes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

De esta manera se obtiene que $\alpha_1 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{3}\alpha_3$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\alpha_3$ y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. El SEL es compatible indeterminado, por lo que existen múltiples combinaciones lineales; al seleccionar, por ejemplo, el valor de $\alpha_3 = 2$, una de ellas es

$$-2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La segunda combinación lineal es

$$\beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \beta_1 - 3\beta_2 \\ \beta_1 + 2\beta_2 \\ \beta_1 - \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 - 3\beta_2 &= 2 \\ \beta_1 + 2\beta_2 &= 1 \\ \beta_1 - \beta_2 &= 3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene un resultado diferente al anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$$

El último renglón de la matriz escalonada es una ecuación degenerada, lo cual designa a un SEL incompatible. En conclusión, la combinación lineal no existe.

Álgebra Lineal
Lectura 7: Conjunto Generador

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

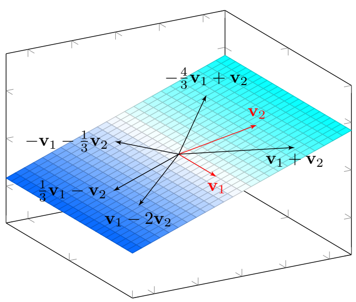

Figura 1. A partir de los vectores directores de un plano (en rojo) se generan nuevos vectores que pertenecen a un espacio vectorial común (el plano).

Mediante una combinación lineal se pueden obtener varios vectores *nuevos* a partir de vectores conocidos. Esto indica que la combinación lineal es una herramienta que permite alcanzar o generar cualquier vector de un espacio vectorial.

Pero, para generar cualquier elemento de un espacio vectorial, se requiere un número específico de vectores. Por ejemplo, para cualquier color se requieren rojo, verde y azul; para las fuerzas, se requieren dos vectores no colineales; un plano debe generarse por al menos dos vectores con direcciones diferentes (véase la figura 1). Por lo tanto, cada conjunto de vectores solo podrá generar un espacio (o subespacio) vectorial específico. Todos los vectores resultantes de las combinaciones lineales presentarán las mismas características

Dado un conjunto de vectores, se puede establecer una infinidad de combinaciones lineales entre sus elementos; cada combinación generará un vector que pertenezca a un espacio vectorial específico. Es entonces, que al conjunto inicial se le conoce como generador de un espacio vectorial.

Sea $G = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores del espacio V. Si la combinación lineal

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{x}$$

tiene solución, entonces el conjunto G será generador de cualquier vector $\mathbf{x} \in V$. Es decir, G es generador del espacio vectorial V.

Un conjunto determinado de m vectores siempre generará un espacio vectorial. Dependiendo de la naturaleza de los vectores y las características que posean sus componentes, el espacio generado puede ser en realidad un subespacio vectorial.

Si el conjunto de vectores $G = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ genera al espacio vectorial V, entonces cualquier vector $\mathbf{x} \in V$ se expresará como combinación lineal de los elementos de G; es decir, la combinación lineal

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_m = \mathbf{x} \tag{1}$$

tiene solución.

En el caso que G no genere a V, entonces existe al menos un vector $\mathbf{x} \in V$ que no puede alcanzarse mediante combinaciones lineales de los elementos de G; es decir, no existe solución para (1).

Este último escenario es evidencia que el conjunto G genera a un espacio vectorial más específico que V; en otras palabras, G genera a un subespacio vectorial. Por ejemplo, un conjunto de tres vectores puede generar a $\mathbb{R}^3$; pero, es posible que no genere a todo ese espacio, más bien genera a un subespacio, como un plano o una recta, que posee características (restricciones) más especificas para cada uno de los elementos que le componen.

Ejemplo. Sea el espacio vectorial $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$. Determine si los siguientes conjuntos generan a M.

a. $F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$

b. $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

La combinación lineal que se plantea con los elementos de F es

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \alpha - 3\gamma + \delta & 2\alpha + \beta + \gamma + \delta \\ \alpha + \gamma + \delta & 2\alpha + \beta - \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Como se sabe, esta combinación lineal arroja un sistema de ecuaciones lineales (SEL) que, si tiene solución, el conjunto genera a M.

La matriz escalonada del SEL de la combinación lineal es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \\ 2 & 1 & 0 & -1 & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -2a+b \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -a+c \\ 0 & 1 & 6 & -3 & -2a+d \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -2a+b \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -a+c \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b-d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b-d \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -a+c \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & a \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -2a+b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b-d \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -a-4b+c+4d \end{bmatrix}$$

Se observa que en el escalonamiento no existen ecuaciones degeneradas, por lo que la matriz representa a un SEL compatible. No importa si el sistema es determinado o indeterminado, la generación del espacio se da cuando existe solución. En conclusión, el conjunto F genera al espacio vectorial M.

Para el conjunto G la combinación lineal con el vector genérico es

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \alpha - 2\gamma & \alpha - 2\gamma \\ -2\alpha + 3\beta + 3\gamma & -\alpha + 3\beta + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Nuevamente, hay que escalonar la matriz de coeficientes del sistema para verificar la generación del espacio. La matriz escalonada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & a \\ 1 & 0 & -2 & b \\ -2 & 3 & 3 & c \\ -1 & 3 & 1 & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 3 & -1 & 2a+c \\ 0 & 3 & -1 & a+d \end{bmatrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 3 & -1 & 2a+c \\ 0 & 0 & 0 & a+c-d \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 3 & -1 & 2a+c \\ 0 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & a+c-d \end{array}\right]$$

Ahora se tienen dos ecuaciones degeneradas, las cuales muestran que el SEL es incompatible y en consecuencia la combinación lineal no existe. Se concluye que el conjunto G no puede generar al espacio vectorial M.

Sin embargo, G por sí mismo puede generar un subespacio que estará contenido en M. El subespacio tendrá la misma forma que el vector genérico de M, pero estará sujeto a restricciones que le den su propia identidad.

Para determinar a este subespacio, se fuerza al sistema a que tenga solución. Esta situación se logra al sustituir los renglones degenerados de la matriz de coeficientes por renglones formados por ceros. Para lograr esta condición, los términos no nulos de las ecuaciones degeneradas se igualan a cero obteniéndose las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} a-b&=0 \\ a+c-d&=0 \end{aligned}$$

Este nuevo SEL tendrá una solución que fungirá como un conjunto de restricciones para conocer al subespacio vectorial que se genera. De esta forma, se obtiene

$$b=a \qquad\qquad d=a+c$$

Por lo tanto, aunque G no genere a M, sí genera al subespacio

$$L(G)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\middle| b=a, d=a+c; a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

que puede reescribirse como

$$L(G)=\left\{\begin{bmatrix} a & a \\ c & a+c \end{bmatrix}\middle| a,c\in\mathbb{R}\right\}$$

El número de ecuaciones degeneradas arroja el número de restricciones que el subespacio generado debe cumplir. Puede verificarse que los elementos del conjunto G satisfacen las restricciones encontradas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a \\ c & a+c \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} a=1 \\ c=-2 \end{array} \quad \begin{array}{c} a=1 \\ a+c=-1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a \\ c & a+b \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} a=0 \\ c=3 \end{array} \quad \begin{array}{c} a=0 \\ a+c=3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a \\ c & a+c \end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} a=-2 \\ c=3 \end{array} \quad \begin{array}{c} a=-2 \\ a+c=1 \end{array}$$

La notación que habitualmente se utiliza para denotar al espacio o subespacio generado es $L(G)$, donde L viene del inglés *linear span* e implica que el subespacio depende de las combinaciones lineales que pueden realizarse con G. La notación se lee como el subespacio de combinaciones lineales del conjunto G.

Otra notación común es $\operatorname{span}(G)$, que en inglés se lee como *span of set* G (espacio del conjunto G).

Álgebra Lineal
Lectura 8: Independencia Lineal

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020, Rev. Agosto 2021

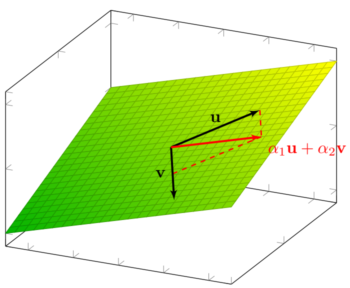

Figura 1. Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son independientes y pueden generar otros vectores del plano, como $\alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}$.

Todo conjunto de vectores puede generar más vectores a partir de combinaciones lineales; incluso dentro del mismo conjunto pueden existir combinaciones lineales entre los elementos. Esta característica es sumamente importante, ya que permite enlazar conceptos del Álgebra como la inversa de una matriz, los tipos de soluciones en los sistemas de ecuaciones lineales o la geometría de planos y rectas.

Por ejemplo, un plano debe ser generado por dos vectores no colineales, como se muestra en la figura 1. Ésta característica es necesaria para generar las dos direcciones que todo plano posee: un largo y un ancho. Algebraicamente, la naturaleza geométrica de no colinealidad significa que los vectores son independientes. Si alguno de los vectores que generan el plano fuese una combinación lineal de otro, entonces esa independencia no existiría y el plano no podría generarse.

Sea el conjunto $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$. A es linealmente independiente si al combinar los elementos del conjunto en la expresión

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{1}$$

todos los escalares α_i son nulos; en el caso contrario los vectores serán linealmente dependientes. La combinación lineal (1) se conoce como ecuación de dependencia lineal.

En otras palabras, un conjunto es linealmente independiente si no existen combinaciones lineales entre sus vectores; es decir, cada vector existe por sí mismo dentro del conjunto.

El camino más simple para determinar si un conjunto es linealmente independiente es la inspección visual de los elementos a analizar. Si se detecta dependencia lineal, existirá alguna de las combinaciones lineales siguientes:

- un vector como múltiplo de otro,
- un vector como suma de otros, o
- un vector como suma de múltiplos de otros vectores.

Sin embargo, son pocos los escenarios en los cuales la inspección visual es efectiva. La definición de independencia lineal señala que al plantear la ecuación de dependencia lineal, el conjunto será independiente si todos los escalares son nulos. Como se trata de una combinación lineal igualada al vector nulo, la ecuación de dependencia arrojará un sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya solución son los valores de los escalares. Si la solución solo contiene valores nulos, entonces se habla de la solución trivial y por lo tanto, el sistema es compatible determinado; la independencia lineal es indicativo de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo compatible determinado.

Con esto se puede dictaminar que la independencia lineal de un conjunto de vectores presenta estas características:

- no hay combinaciones lineales entre vectores.
- la solución de la ecuación de dependencia lineal es la trivial.

Complementando con la teoría de sistemas de ecuaciones lineales, también se cumplen las siguientes características:

- los vectores definen un sistema de ecuaciones lineales homogéneo compatible determinado.
- después de escalonar, se tienen el mismo número de ecuaciones que de escalares (incógnitas).
- si la matriz de coeficientes es cuadrada, entonces su determinante es diferente de cero y en consecuencia posee inversa.

El último punto permite concluir que la existencia de la matriz inversa solo es posible cuando hay independencia lineal.

Ejemplo. Determine si el conjunto

$$A = \left\{3x^2 + x + 1, x + 1, x^2 - 2x\right\}$$

es linealmente independiente.

De acuerdo a lo estudiado, si al plantear la ecuación de dependencia lineal entre los elementos del conjunto se obtiene una solución trivial, el conjunto es independiente; en caso contrario será dependiente.

$$\alpha_1\left(3x^2 + x + 1\right) + \alpha_2(x + 1) + \alpha_3\left(x^2 - 2x\right) = 0x^2 + 0x + 0$$

El sistema de ecuaciones se obtiene por igualdad en polinomios:

$$(3\alpha_1 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_2) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{array}{cccccc} 3\alpha_1 & & +\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & -2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 0 \end{array}$$

Como la matriz de coeficientes del sistema es cuadrada, entonces puede calcularse su determinante y con su valor establecer una decisión sobre la naturaleza del conjunto:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - (1 - 6) \quad \Rightarrow \quad 6$$

Como el determinante es diferente de cero, entonces el SEL homogéneo es compatible determinado y solo le satisface la solución trivial; por lo tanto, el conjunto es linealmente independiente.

Obviamente, si no se cumplen las condiciones de la independencia lineal, el conjunto de vectores que se analice será dependiente. Pero, se puede abundar más en las implicaciones que tiene cuando, algún vector depende de otros. Partiendo de la definición de independencia lineal, un conjunto de vectores es linealmente dependiente si:

- existe, al menos, una combinación lineal entre vectores involucrados.
- existen múltiples soluciones a la ecuación de dependencia lineal.

La dependencia lineal en los sistemas de ecuaciones se refleja en:

- un sistema de ecuaciones lineales homogéneo compatible indeterminado.
- una matriz de coeficientes escalonada donde existen más incógnitas (escalares) que ecuaciones.
- un determinante nulo y una matriz de coeficientes sin inversa, si ésta última es cuadrada.

Un punto importante a destacar en la dependencia lineal es la existencia del vector nulo. Por definición, la presencia de $\mathbf{0}$ indica dependencia lineal pues la ecuación de dependencia lineal implica que dicho vector es combinación de otros. Además, suponiendo que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ son independientes, la ecuación de dependencia lineal del conjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n, \mathbf{0}\}$ es

$$\begin{aligned} \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n + \alpha_{n+1}\mathbf{0} &= \mathbf{0} \\ (0)\,\mathbf{v}_1 + (0)\,\mathbf{v}_2 + \cdots + (0)\,\mathbf{v}_n + \alpha_{n+1}\mathbf{0} &= \\ \alpha_{n+1}\mathbf{0} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

donde α_{n+1} puede tomar cualquier valor; eso hace al conjunto A linealmente dependiente debido a la presencia del vector nulo.

Ejemplo. Determine si el conjunto

$$B = \left\{x^2 + x + 1, -2x^2 + 2, x^2 + 3x + 5\right\}$$

es linealmente dependiente o independientes.

Si al plantear la ecuación de dependencia lineal entre los elementos del conjunto se obtienen múltiples soluciones, el conjunto es dependiente.

$$\alpha_1\left(x^2 + x + 1\right) + \alpha_2\left(-2x^2 + 2\right) + \alpha_3\left(x^2 + 3x + 5\right) = 0$$

Al plantear el sistema de ecuaciones

$$(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3)\,x^2 + (\alpha_1 + 3\alpha_3)\,x + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3) = 0$$

$$\begin{array}{cccrc} \alpha_1 & -2\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & & +3\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & +2\alpha_2 & +5\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

se obtiene el siguiente escalonamiento

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cccc} \alpha_1 & +3\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Al escalonar se obtiene un SEL equivalente con dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que la solución trivial no es la única que satisface al sistema pues éste es indeterminado; en consecuencia el conjunto es linealmente dependiente. Puede verificarse que el tercer polinomio del conjunto es una combinación lineal de los dos primeros:

$$3\left(x^2 + x + 1\right) + \left(-2x^2 + 2\right) = x^2 + 3x + 5$$

Álgebra Lineal
Lectura 9: Base y Dimensión del Espacio Vectorial

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Base del Espacio Vectorial

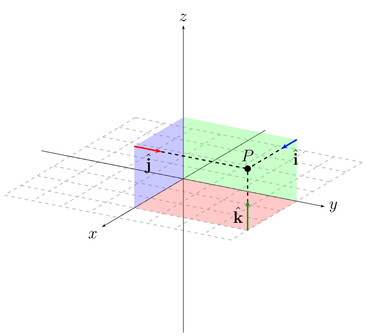

Figura 1. Los vectores $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son una base del espacio $\mathbb{R}^3$: la base canónica del sistema xyz.

Todo conjunto de vectores tiene una única naturaleza: linealmente dependiente o independiente. Para que un plano exista se requieren dos vectores que vayan en diferente dirección; es decir, que uno no se múltiplo del otro. Esta característica señala que debe existir independencia lineal entre los vectores directores del plano. Si se usan más vectores, se obtendrá dependencia lineal; si usan menos, no se generará al plano. Por lo tanto, el número mínimo de vectores necesarios para generar un plano es dos; en otras palabras, un plano se genera con dos vectores linealmente independientes.

De esta forma, la construcción de un espacio vectorial se da a partir de un número mínimo de vectores; es decir, un conjunto generador que es linealmente independiente. Éste conjunto se llama base.

El conjunto $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ es una base del espacio vectorial V, si es un conjunto generador linealmente independiente.

Las bases generan espacio vectoriales, pero poseen una característica fundamental: inducen la posibilidad de ubicar cada vector dentro del espacio vectorial. Es decir, una base forma un sistema de referencia dentro del espacio vectorial. Considerando que un conjunto puede tener una infinidad de bases, entonces existe una infinidad de sistemas de referencia en el espacio vectorial.

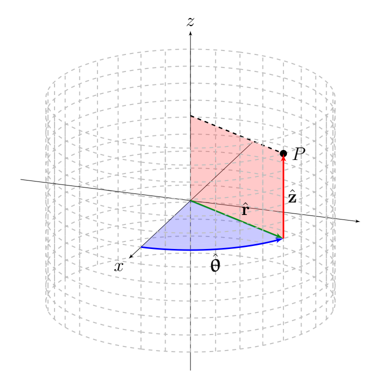

Figura 2. Las coordenadas cilíndricas forman otra base dentro de $\mathbb{R}^3$: $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$.

Un ejemplo de varias referencias serían los sistemas de coordenadas. Dentro del espacio que define nuestro entorno las coordenadas pueden ser rectangulares, cilíndricas o esféricas. Las coordenadas rectangulares (figura 1) son las referencias cartesianas usuales (x, y, z), las coordenadas cilíndricas (figura 2) poseen una componente angular y dos componentes de distancia (r, θ, z), mientras que las coordenadas esféricas son una componente de distancia y dos angulares (ρ, θ, φ). Estos sistemas de referencia pueden representar un mismo punto (y en consecuencia un vector) de tres formas diferentes.

El conjunto $B = \left\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$ es la base fundamental del espacio $\mathbb{R}^3$, llamada también base canónica. B puede generar y ubicar a cualquier vector del espacio, tal cual como se muestra en la figura 1, donde el punto P es ubicado gracias a los vectores canónicos, además de poseer un vector de posición:

$$P(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Para determinar si un conjunto es una base, se debe verificar que es generador del espacio vectorial y posee independencia lineal. Ambas características pueden probarse en un solo paso al considerar la naturaleza de los sistemas de ecuaciones. La relación entre generación y dependencia lineal establece que, si la combinación lineal es:

- un sistema compatible determinado, entonces el conjunto es generador y hay independencia lineal.
- un sistema compatible indeterminado, entonces el conjunto es generador pero es linealmente dependiente.
- un sistema incompatible, el conjunto no genera a un espacio sino un subespacio; al descartar las ecuaciones degeneradas se evalúa el tipo de sistema, compatible determinado para independencia y compatible indeterminado para dependencia.

Este criterio se basa en el hecho que la combinación lineal para generación del espacio es genérica. Esta generalización incluye al vector nulo, que al sustituirlo en la combinación lineal se obtiene la ecuación de dependencia lineal. La relación entre la generación de espacio y la dependencia lineal yace en el concepto de sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado.

Ejemplo. Sea el espacio vectorial $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2a+b & a-b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ sobre el campo de los reales. De los siguientes conjuntos, determine cuál forma una base de A:

a. $G_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \right\}$.

b. $G_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Para que formen una base, ambos conjuntos deben ser generadores del espacio vectorial y linealmente independientes. Para G_1, la combinación lineal que debe plantearse es

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a+b & a-b \end{bmatrix}$$
$$2\alpha_1 - 3\alpha_2 = a$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = b$$
$$5\alpha_1 - 4\alpha_2 = 2a + b$$
$$\alpha_1 - 5\alpha_2 = a - b$$

Al resolver el sistema, el escalonamiento indicará tanto la dependencia lineal como la generación del espacio.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & a \\ 1 & 2 & b \\ 5 & -4 & 2a+b \\ 1 & -5 & a-b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & -3 & a \\ 5 & -4 & 2a+b \\ 1 & -5 & a-b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & -7 & a-2b \\ 0 & -14 & 2a-4b \\ 0 & 7 & -a+2b \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & -7 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema ya está escalonado; no existen ecuaciones degeneradas por lo que G_1 sí genera a A; el sistema además es compatible determinado, lo cual designa independencia lineal. Se concluye que G_1 es una base del espacio vectorial A.

Para G_2 el proceso de análisis es el siguiente.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a+b & a-b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + \alpha_3 &= a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= b \\ 7\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 2a+b \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 &= a-b \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 7 & 2 & 3 & 2a+b \\ 2 & -2 & 0 & a-b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & -6 & -2 & a-3b \\ 0 & -12 & -4 & 2a-6b \\ 0 & -6 & -2 & a-3b \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b \\ 0 & -6 & -2 & a-3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es compatible, por lo que G_2 genera a A. Sin embargo, al tener dos ecuaciones (renglones) y tres incógnitas (columnas), el sistema es indeterminado y en consecuencia hay dependencia lineal. Se concluye que G_2 no es base del espacio vectorial A.

2. Dimensión del Espacio Vectorial

Una pregunta interesante sobre las bases es: ¿cuántos vectores debe tener una base para generar un espacio vectorial determinado? La respuesta radica en el número n de vectores necesarios para asegurar que se generará completamente al espacio vectorial que se estudie en cada caso. Es el concepto de dimensión del espacio vectorial.

Sea el espacio vectorial V, cuyas bases contienen n vectores. La dimensión de V es igual a n y se denota como

$$\dim V = n$$

A pesar que la base del espacio vectorial no es única, la dimensión siempre será la misma: todas las bases tienen el mismo número de vectores.

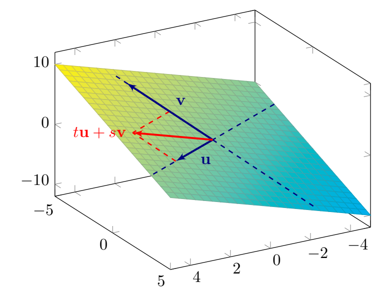

Figura 3. Un plano es un subespacio de dimensión dos, ya que cualquiera de sus puntos se alcanza mediante combinación lineal de, específicamente, dos vectores directores: $\mathbf{p} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$.

La dimensión es de suma importancia, pues indica el número mínimo de vectores que se requieren para generar un espacio o subespacio vectorial. Por ejemplo, si se considera un plano, sus bases siempre poseen 2 vectores pues es el número necesario de vectores directores que generan al plano (véase la figura 3).

La dimensión también nos indica el número máximo de elementos que todo conjunto linealmente independiente posee: en un espacio vectorial de dimensión m, todo conjunto linealmente independiente tendrá un máximo de m vectores (puede contener un número menor de elementos); cualquier conjunto con más elementos siempre será linealmente dependiente. Un caso muy particular es el subespacio nulo (solo contiene al vector nulo); su dimensión es 0, ya que no hay independencia lineal en dicho subespacio.

Ejemplo. Determine una base y la dimensión del subespacio generado por el conjunto

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

La combinación lineal de generación del espacio es

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Mediante el escalonamiento del sistema de ecuaciones se obtiene el espacio generado.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & x \\ 2 & 1 & -4 & y \\ 1 & 1 & -3 & z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & z \\ 2 & 1 & -4 & y \\ 3 & 1 & -5 & x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & z \\ 0 & -1 & 2 & y-2z \\ 0 & -2 & 4 & x-3z \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & z \\ 0 & -1 & 2 & y-2z \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{bmatrix}$$

Con el escalonamiento se ha encontrado la restricción $x-2y+z=0$ del subespacio. Además, al retirar la ecuación degenerada, el sistema de ecuaciones resulta ser indeterminado, lo que indica dependencia lineal. Con base en las características que se desprenden de la dimensión, el espacio $L(G)$ debe tener dimensión menor a 3 (el número de vectores del conjunto G)

Como la restricción representa a la ecuación cartesiana de un plano, eso indica que se genera con dos vectores independientes; por lo tanto, la dimensión es 2.

Para seleccionar una base, se deben tomar dos vectores que sean linealmente independientes, por lo que se puede descartar un vector del conjunto original G para seleccionar la base. De esta forma se obtiene que

$$L(G) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| x-2y+z=0; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\dim L(G) = 2$$
$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Hasta el momento se ha visto que la combinación lineal, la dependencia lineal y el conjunto generador están relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales. La dimensión también lo está, pues representa al número de renglones no nulos que quedan en la matriz escalonada. También puede calcularse como el número de ecuaciones iniciales menos el número de ecuaciones degeneradas encontradas.

Con base en una dimensión n, se pueden seleccionar n vectores arbitrarios del espacio para formar la base. Solo hay que cuidar que el conjunto seleccionado no sea linealmente dependiente.

Álgebra Lineal
Lectura 10: Vector de Coordenadas y Matriz de Transición

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Vector de Coordenadas

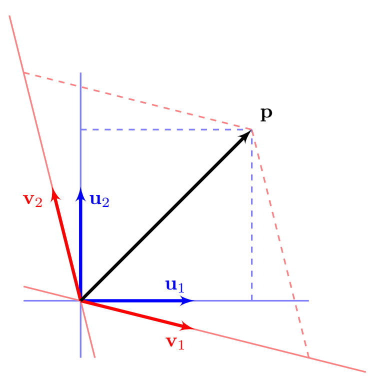

Figura 1. Una base es un sistema de referencia que ubica a cada vector del espacio vectorial.

La base no solamente genera nuevos vectores, también es un sistema de referencia para ubicarlos en el espacio vectorial. Por ejemplo, un punto P en el plano coordenado xy tiene coordenadas $P(x, y)$; con vectores, el vector de posición $\mathbf{p}$ puede expresarse como la combinación lineal

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Sin embargo, no es la única combinación lineal, pues con otro par de vectores linealmente independientes se construye otra base para referencia (véase la figura 1), tal que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Las coordenadas permiten la ubicación de un objeto en un sistema de referencia. Usualmente se utilizan sistemas cuyos ejes forman ángulos de 90° entre sí; la base de la combinación (1) tradicionalmente se utiliza como referencia en el citado plano xy. Pero (2) es otro sistema de referencia que puede utilizarse para ubicar el mismo punto, sin importar que los ejes no sean perpendiculares. Las combinaciones (1) y (2) se realizan con bases del espacio vectorial, lo cual introduce el concepto de vector de coordenadas en una base determinada.

Sea una base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ del espacio vectorial V, donde el vector $\mathbf{x} \in V$ puede expresarse como

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{x} \tag{3}$$

A los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ en (3) se les llama coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base B. Si se establece un orden en las coordenadas, entonces se habla del vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ referido a la base B:

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Es importante recalcar que si una base A tiene los mismos elementos que una base B pero en diferente orden, entonces son bases diferentes y por lo tanto los vectores de coordenadas en sendas bases son diferentes. Tanto la base como el vector de coordenadas tienen orden.

Ejemplo. Determine el vector de coordenadas de $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6+i \\ 1-i \end{bmatrix}$ referido a la base

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3-i \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Por combinación lineal

$$\begin{bmatrix} -6+i \\ 1-i \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3-i \\ 0 \end{bmatrix}$$

se produce el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{llcl} \alpha_1 & +(3-i)\alpha_2 & = & -6+i \\ i\alpha_1 & & = & 1-i \end{array}$$

que al resolverse da como solución $\alpha_1 = -1-i$ y $\alpha_2 = \frac{1}{10}(-17+i)$. El vector de coordenadas buscado es $[\mathbf{v}]_A = \dfrac{1}{10} \begin{bmatrix} -10-10i \\ -17+i \end{bmatrix}$.

2. Matriz de Transición

Al existir diferentes sistemas de coordenadas es útil conocer una forma para cambiar entre uno y otro. Como ya se mencionó, las coordenadas se refieren a una base; entonces, el cambio entre sistemas de referencia es equivalente al cambio entre bases de un espacio vectorial.

Por ejemplo, considerando un espacio vectorial V con bases

$$A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$$
$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$$

cada elemento de A puede expresarse como combinación lineal de los elementos de B:

$$\mathbf{u}_1 = \kappa_1 \mathbf{v}_1 + \kappa_2 \mathbf{v}_2 \tag{4}$$
$$\mathbf{u}_2 = \sigma_1 \mathbf{v}_1 + \sigma_2 \mathbf{v}_2 \tag{5}$$

Por otro lado, un vector $\mathbf{p} \in V$ puede expresarse como combinación lineal de los elementos de la base A e independientemente de los elementos de la base B:

$$\mathbf{p} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \tag{6}$$
$$\mathbf{p} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 \tag{7}$$

Se puede sustituir las ecuaciones (4) y (5) en (6), e igualar a (7).

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \\ \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 &= \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \\ &= \alpha_1 (\kappa_1 \mathbf{v}_1 + \kappa_2 \mathbf{v}_2) + \alpha_2 (\sigma_1 \mathbf{v}_1 + \sigma_2 \mathbf{v}_2) \\ &= \alpha_1 \kappa_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_1 \kappa_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_2 \sigma_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \sigma_2 \mathbf{v}_2 \\ \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 &= (\alpha_1 \kappa_1 + \alpha_2 \sigma_1) \mathbf{v}_1 + (\alpha_1 \kappa_2 + \alpha_2 \sigma_2) \mathbf{v}_2 \end{aligned} \tag{8}$$

En la ecuación (8) los coeficientes se igualan término a término para obtener un sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcll} \beta_1 & = & \alpha_1 \kappa_1 & +\alpha_2 \sigma_1 \\ \beta_2 & = & \alpha_1 \kappa_2 & +\alpha_2 \sigma_2 \end{array}$$

Este sistema puede expresarse en forma matricial, de tal forma que pueden ubicase los vectores de coordenadas de las combinaciones lineales (4) a (7):

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \sigma_1 \\ \kappa_2 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

La matriz de orden 2 obtenida se conoce como matriz de transición o matriz de cambio de base.

Sea el espacio vectorial V sobre un campo K, del cual dos de sus bases son $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ y $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$. La matriz transición de la base A a la base B está formada a partir de los vectores de coordenadas de los elementos de A referidos a B:

$$M_B^A = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_1]_B & [\mathbf{u}_2]_B & \cdots & [\mathbf{u}_n]_B \end{bmatrix}$$

El cambio de coordenadas se define mediante la multiplicación matricial

$$M_B^A [\mathbf{p}]_A = [\mathbf{p}]_B \qquad \forall\ \mathbf{p} \in V$$

Entre las bases A y B se conserva la siguiente propiedad

$$M_A^B = \left(M_B^A\right)^{-1}$$

La matriz de transición permite cambiar de referencia en forma ágil. Sistemas de coordenadas como el cartesiano, cilíndrico o esférico cambian de coordenadas mediante este tipo de matriz.

Ejemplo. Obtenga la matriz de transición de la base $C = \{xe^x, xe^x + 2e^x\}$ a la base $D = \{xe^x + e^x, e^x\}$, y verifique el cambio de coordenadas para $f(x) = -xe^x + 2e^x$.

El sentido es de C a D, entonces C es combinación lineal de D:

$$\begin{aligned} xe^x &= \alpha_1 (xe^x + e^x) + \alpha_2 (e^x) \\ xe^x + 2e^x &= \beta_1 (xe^x + e^x) + \beta_2 (e^x) \end{aligned}$$

Al resolver cada sistema de ecuaciones se obtiene

$$[xe^x]_D = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad [xe^x + 2e^x]_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de transición es

$$M_D^C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la verificación del cambio de coordenadas. El vector de coordenadas en la base se C se calcula con la siguiente combinación lineal:

$$\alpha_1 (xe^x) + \alpha_2 (xe^x + 2e^x) = -xe^x + 2e^x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

El cambio de coordenadas se logra al multiplicar la matriz M_D^C por el vector de coordenadas $[f]_C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

El vector de coordenadas resultante pertenece a f, pero está referido a los elementos de la base D. Por lo tanto, la combinación lineal con esta base recuperará a la función f.

$$\begin{aligned} \beta_1 (xe^x + e^x) + \beta_2 (e^x) &= -xe^x + 2e^x \\ -1 (xe^x + e^x) + 3 (e^x) &= \\ -xe^x - e^x + 3e^x &= -xe^x + 2e^x \end{aligned}$$

Se corrobora que efectivamente se realizó un cambio de coordenadas de la bse C a la base D.

Para cambiar de coordenadas entre sistemas de referencia perpendiculares se realiza mediante combinaciones lineales entre los vectores de las respectivas bases. Utilizando el cambio entre coordenadas cartesianas y esféricas, las bases involucradas para sendos sistemas son $A = \left\{ \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}} \right\}$ y $B = \left\{ \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\}$, y las respectivas combinaciones lineales son obtenidas a partir de la ecuación vectorial de una esfera y sus derivadas parciales; este tema no se tratará sino hasta el curso de Cálculo Vectorial. Las combinaciones lineales entre bases son:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\rho}} &= \cos\theta \sin\varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \sin\varphi \hat{\mathbf{j}} + \cos\varphi \hat{\mathbf{k}} \\
\hat{\boldsymbol{\varphi}} &= \cos\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{j}} - \sin\varphi \hat{\mathbf{k}} \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\sin\theta \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}$$

Cuando se requiera cambiar de coordenadas del sistema esférico al sistema cartesiano, se utiliza la matriz de transición:

$$M_A^B = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

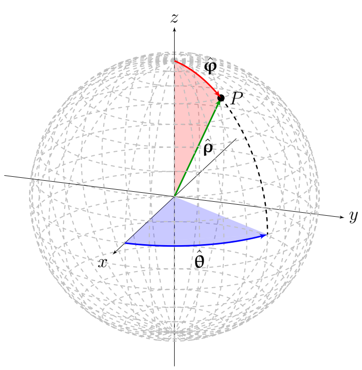

Figura 2. El cambio de coordenadas rectangulares a esféricas se realiza entre las bases $\left\{ \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}} \right\}$ y $\left\{ \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\}$.

Esta matriz es ortogonal, por lo que solo basta transponerla para invertirla y cambiar coordenadas de cartesianas a esféricas.

La importancia de saber qué relación existe entre ambas bases radica en el problema que se esté analizando: por ejemplo, las coordenadas esféricas tienen una gran aplicación en astronomía, en campos vectoriales como el gravitatorio o eléctrico, y si se requiere establecer un análisis en el plano cartesiano debe existir una forma de conversión (transición) de un sistema a otro.

Para cerrar esta aplicación, el sistema de coordenadas esférico posee tres vectores: una distancia radial (ρ), un ángulo de colatitud (elevación) φ y un ángulo azimutal (desplazamiento lateral) θ. La forma tridimensional de este sistema se muestra en la figura 2.

Álgebra Lineal
Lectura 11: Espacios Renglón y Columna

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

Una matriz A por sí misma puede generar dos espacios vectoriales: el primero se forma por combinaciones lineales de los renglones, y el segundo al considerar en las combinaciones las columnas.

1. Espacio Renglón

Sea una matriz A de orden $m \times n$, tal que su representación en renglones es

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^T \end{bmatrix}$$

Cuando se toman los renglones como vectores, se plantea una combinación lineal de la forma

$$\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + \alpha_m \mathbf{r}_m = \mathbf{x}$$

Si se analiza a detalle esta combinación lineal, se observará que se trata de transformaciones elementales sobre los renglones; es decir, el escalonamiento de la matriz descubre las posibles combinaciones lineales que pueden realizarse con los renglones de una matriz.

El espacio renglón de una matriz A de orden $m \times n$ es el espacio vectorial que contiene todas las combinaciones lineales entre los renglones de A:

$$L_R(A) = \left\{ \mathbf{x} \middle| \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{r}_i \right\}$$

Para obtener la dimensión del espacio renglón basta con escalonar la matriz hasta obtener el número de renglones linealmente independientes. Dicho número también es conocido como rango de la matriz A, denotado como $R(A) = \dim L_R(A)$.

Ejemplo. Obtenga el espacio renglón de la matriz

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

así como su dimensión.

Para obtener una base del espacio se llevará la matriz a su forma canónica escalonada.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El escalonamiento arrojó dos renglones independientes. Al combinarlos con escalares genéricos se obtendrá el espacio renglón de F.

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{bmatrix}$$
$$\therefore \qquad L_R(F) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

La dimensión es 2, lo cual coincide con el número de renglones linealmente independientes en la matriz canónica escalonada.

2. Espacio Columna

Como las matrices son un arreglo bidimensional, también se puede considerar la expresión en columnas de la misma matriz A de orden $m \times n$ que se planteó anteriormente:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$$

la combinación lineal queda en términos de las columnas

$$\beta_1 \mathbf{c}_1 + \beta_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \beta_n \mathbf{c}_n = \mathbf{y}$$

El espacio columna de una matriz A de orden $m \times n$ es el espacio vectorial que contiene todas las combinaciones lineales entre las columnas de A:

$$L_C(A) = \left\{ \mathbf{y} \middle| \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{c}_i \right\}$$

Los espacios columna y renglón no son iguales, pero sus dimensiones sí lo son:

$$\dim L_R(A) = \dim L_C(A) \quad \Rightarrow \quad R(A)$$

El único caso donde ambos espacios son iguales es en matrices simétricas o que posean inversa.

Ejemplo. Obtenga el espacio columna de la matriz del ejemplo anterior.

En este caso, se necesita transponer la matriz para trabajar con sus columnas como si fueran renglones. Esto se hace por comodidad.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nuevamente, la combinación lineal es con escalares genéricos.

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\-\frac{3}{7}\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\\frac{1}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\-\frac{3}{7}a+\frac{1}{7}b\end{bmatrix}$$

$$\therefore \qquad L_C\left(F\right)=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\-\frac{3}{7}a+\frac{1}{7}b\end{bmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

Los espacios son diferentes entre sí, pero ambos tienen dimensión 2.

No es necesario llevar el escalonamiento de la matriz a la forma canónica escalonada, pero es buena práctica, ya que se obtendrá la llamada base natural del espacio renglón o columna: la combinación lineal de los renglones (o columnas) será precisa y no tendrá ambigüedad en las restricciones del espacio vectorial.

La base natural es muy común en subespacios de $\mathbb{R}^n$, ya que las restricciones que caracterizan a los subespacios impiden que los coeficientes conformen una matriz identidad.

En el caso que una base natural pueda formar a la matriz identidad como la forma canónica escalonada, entonces se conoce como base canónica. El conjunto $B=\left\{\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}\right\}$ es la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$:

$$\hat{\mathbf{i}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \hat{\mathbf{j}}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \hat{\mathbf{k}}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$