Álgebra Lineal
Lectura 12: Transformaciones Lineales; Dominio y Codominio

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020, Rev. Agosto 2021

1. Transformaciones

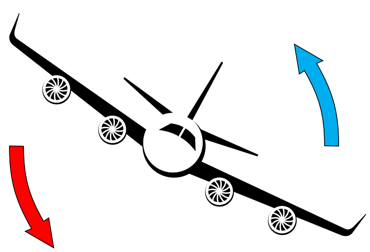

Figura 1. Las transformaciones vectoriales permiten, entre otras cosas, analizar la rotación de objetos para controlarlos.

Cuando se trabaja con una función, implícitamente un número se convierte en otro; es decir, un elemento del dominio se transforma en un elemento del codominio de la función. Este cambio se hace con la regla de correspondencia de la función. Si ahora un elemento de un espacio vectorial U se convierte en un elemento del espacio vectorial V, se define una función vectorial de variable vectorial llamada transformación o aplicación. Las transformaciones estudian fenómenos como el movimiento, las deformaciones, las rotaciones entre otros (figura 1).

Sean los espacios vectoriales U y V. Una transformación $T : U \to V$ es una función vectorial de variable vectorial tal que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \qquad \forall\ \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V$$

Este tipo de funciones pueden analizarse mediante funciones escalares de variable vectorial; es decir, cada componente vectorial depende de múltiples variables pero solo resultará en un escalar. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ una transformación está compuesta de la siguiente manera:

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}$$

Tanto f_1 como f_2 son las componentes de la salida de la función.

Ejemplo. Obtenga la transformación de un vector mediante

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 1 \\ xy \\ z - 2 \end{bmatrix}$$

Al aplicar la regla de correspondencia de la transformación al vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, solo se evalúa como una función multivariable.

$$T\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(-2)+1\\(-2)(1)\\(1)-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

2. Transformación Lineal

2.1. Definición

Si una transformación conserva las operaciones fundamentales en el espacio vectorial (suma de vectores y multiplicación por un escalar) entonces, se vuelve caso de estudio del Álgebra Lineal. Este tipo de transformaciones se conocen como transformaciones lineales.

Sean los espacios vectoriales U y V, ambos bajo el mismo campo K. Una transformación $T:U\to V$ es lineal sí cumple con

- ❑ $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$ (Principio de superposición)
- ❑ $T(\alpha\mathbf{u})=\alpha T(\mathbf{u})$ (Principio de homogeneidad)

Dos transformaciones lineales muy utilizadas y conocidas son la integral y la derivada, ambas definidas en el espacio vectorial de funciones:

$$\frac{d}{dx}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{d}{dx}f+\beta\frac{d}{dx}g$$
$$\int(\alpha f+\beta g)\,dx=\alpha\int f\ dx+\beta\int g\ dx$$

Además de éstas, existe una infinidad de transformaciones lineales pero todas conservan las operaciones entre espacios vectoriales.

Ejemplo. Determine si la transformación

$$F:\mathbb{R}^2\to M_2\Rightarrow F\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\y&-x\end{bmatrix}$$

donde el espacio M_2 está conformado por matrices simétricas de orden dos con elementos reales, es lineal.

Se verificará si se satisfacen la superposición y la homogeneidad.

Superposición:

$$F\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)=F\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+F\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$
$$F\begin{bmatrix}x+a\\y+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\y&-x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&b\\b&-a\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x+a&y+b\\y+b&-x-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+a&y+b\\y+b&-x-a\end{bmatrix}$$

Homogeneidad:

$$F\left(\alpha\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\alpha F\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$
$$F\begin{bmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}x&y\\y&-x\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\alpha x&\alpha y\\\alpha y&-\alpha x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x&\alpha y\\\alpha y&-\alpha x\end{bmatrix}$$

Se observa que F conserva tanto la suma como la multiplicación por un escalar; por lo tanto, es una transformación lineal.

2.2. Dominio y Codominio

Puesto que una transformación lineal es una función, posee todos los elementos comunes a las funciones.

Sea $T : U \to V$ una transformación lineal tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

Dominio. Es el espacio vectorial U que se transforma bajo T.

Codominio. T al ser evaluada con elementos del dominio arroja vectores que pertenecen al espacio vectorial codominio V.

Regla de correspondencia. Es la regla de asignación $T(\mathbf{u})$ que convierte elementos del dominio en elementos del codominio.

Imagen. Es la transformación de $\mathbf{u} \in U$ en su imagen $\mathbf{v} \in V$.

La figura 2 muestra un diagrama de Venn con los elementos de la transformación T.

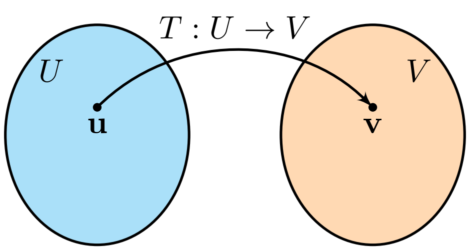

Figura 2

Álgebra Lineal
Lectura 13: Recorrido y Núcleo

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Recorrido de la Transformación Lineal

En una transformación lineal $T : U \to V$ todas las imágenes forman un subespacio vectorial. La razón por la cual es así, radica en el conjunto generador de un espacio vectorial.

Si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ es una base del espacio dominio U, que bajo T genera las imágenes $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2$,... $T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{v}_n$, entonces

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{u} \tag{1}$$

$$T(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n) = T(\mathbf{u})$$

$$\alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{u}_2) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{u}_n) = T(\mathbf{u})$$

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = T(\mathbf{u}) \tag{2}$$

La ecuación (1) es la generación de cualquier vector $\mathbf{u} \in U$. Al aplicarle T a (1) se obtiene la imagen de $\mathbf{u}$ como combinación lineal de las imágenes de la base B; en esencia, (2) es la misma ecuación de generación pero en el espacio codominio V. A pesar que $G = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto que pertenece a V, puede no generarlo completamente. Por lo que al subespacio generado se le llama recorrido.

Sea la transformación lineal $T : U \to V$. El subespacio recorrido es aquél que contiene a todo vector del codominio que, bajo T, es imagen de algún vector del dominio. Es decir,

$$T(U) = \{\mathbf{v} \in V | T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}; \mathbf{u} \in U\}$$

La figura 1 muestra un diagrama de Venn donde aparece el recorrido de la transformación lineal T.

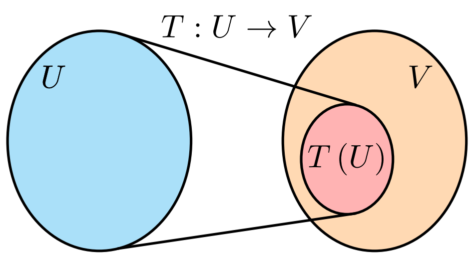

Figura 1

Hay ocasiones que el recorrido de una transformación lineal es igual al codominio, pero no siempre se presenta dicho caso. La única forma en que todo el codominio sea igual al recorrido es cuando una base del dominio tiene como imagen una base del codominio.

Ejemplo. Sean los espacios $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $P_2 = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $K : M_2 \to P_2$, tal que

$$K \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (2a - b)\, x^2 + (a + b + c)\, x + (3b + 2c)$$

Obtenga el recorrido de K.

Es necesario encontrar un conjunto generador del recorrido, el cual se obtiene a partir de una base del dominio. Tomando la base natural

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

se obtienen las imágenes

$$K \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2x^2 + x$$

$$K \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -x^2 + x + 3$$

$$K \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = x + 2$$

$$K \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

El conjunto generador se reduce mediante el espacio renglón

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, el recorrido es

$$a\left(x^2 - 1\right) + b\,(x + 2) = ax^2 + bx + (-a + 2b)$$

$$K\,(M_2) = \left\{ax^2 + bx + (-a + 2b)\,| a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Núcleo de la Transformación Lineal

Existe otro subespacio fundamental dentro de la transformación lineal, el cual permite determinar si al transformar un vector puede devolverse a su estado original.

Bajo una transformación lineal $T : U \to v$, dos vectores $\alpha_1 \mathbf{u}_1, \alpha_2 \mathbf{u}_2 \in U$ tienen imágenes $T\,(\alpha_1 \mathbf{u}_1)$ y $T\,(\alpha_2 \mathbf{u}_2)$ tales que

$$T\,(\alpha_1 \mathbf{u}_1) = T\,(\alpha_2 \mathbf{u}_2) \tag{3}$$

Debido a la superposición en T, la igualdad (3) definirá al vector nulo:

$$\begin{aligned} T\,(\alpha_1 \mathbf{u}_1) &= T\,(\alpha_2 \mathbf{u}_2) \\ T\,(\alpha_1 \mathbf{u}_1) - T\,(\alpha_2 \mathbf{u}_2) &= \mathbf{0} \\ T\,(\alpha_1 \mathbf{u}_1 - \alpha_2 \mathbf{u}_2) &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4}$$

La combinación lineal $\alpha_1 \mathbf{u} - \alpha_2 \mathbf{u}_2$ en (4) genera un subespacio vectorial. Los elementos $\mathbf{u}$ de dicho subespacio pueden expresarse como

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 - \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} \tag{5}$$

Al sustituir (5) en (4),

$$\begin{aligned} T\left(\alpha_1\mathbf{u}_1 - \alpha_2\mathbf{u}_2\right) &= \mathbf{0} \\ T\left(\mathbf{u}\right) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

se obtiene la característica principal del subespacio mencionado: la imagen, bajo T, de todos sus elementos es el vector nulo. Este subespacio es parte del dominio, y es conocido como núcleo.

Sea $T: U \to V$ una transformación lineal. El núcleo es el subespacio del dominio, cuya imagen bajo T es el vector nulo del codominio.

$$N\left(T\right) = \left\{\mathbf{u} \in U | T\left(\mathbf{u}\right) = \mathbf{0}; \mathbf{0} \in V\right\}$$

El diagrama de Venn en la figura 2 muestra al núcleo de T.

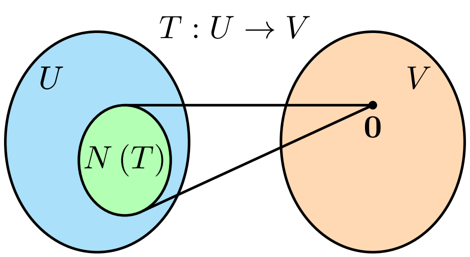

Figura 2

Ejemplo. Obténga el núcleo de la transformación lineal del ejemplo anterior.

De la definición se sabe que $K\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{0}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} K\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \left(2a - b\right)x^2 + \left(a + b + c\right)x + \left(3b + 2c\right) &= 0x^2 + 0x + 0 \end{aligned}$$

de donde se plantea el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrrcl} 2a & -b & & = & 0 \\ a & +b & +c & = & 0 \\ & 3b & +2c & = & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad b = 2a, c = -3a$$

Estas serán las restricciones del núcleo, que pertenece al dominio.

$$\begin{aligned} N\left(K\right) &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| b = 2a, c = -3a; a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & 2a \\ -3a & d \end{bmatrix} \middle| a, d \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

3. Teorema de Dimensiones

El núcleo y el recorrido son subespacios relacionados entre sí, aún cuando pertenezcan a espacios vectoriales diferentes. Esta relación se conoce como el teorema de dimensiones y es fundamental en espacios de dimensión finita, pues indica si una transformación lineal posee o no una inversa.

En una transformación lineal $T: U \to V$ se establece que

$$\dim U = \dim T\left(U\right) + \dim N\left(T\right) \tag{6}$$

La expresión (6) se conoce como el teorema de dimensiones para una transformación lineal. La dimensión del núcleo se llama nulidad y la del recorrido rango.

Álgebra Lineal
Lectura 14: Transformaciones Inyectivas y Suprayectivas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Transformación Inyectiva

Los subespacios núcleo y recorrido son sumamente importantes dentro de las transformaciones lineales. Con ellos se puede determinar si el efecto de modificación de una transformación lineal puede revertirse.

El teorema de dimensiones para una transformación lineal $T : U \to V$ indica que

$$\dim N(T) + \dim T(U) = \dim U$$

Si la nulidad es igual a 0, entonces la dimensión del recorrido es igual a la dimensión del dominio. Ésta característica permite emparejar cada elemento de U con su respectiva imagen bajo T; más específicamente, la transformación lineal relaciona cada elemento del recorrido con un solo elemento del dominio. Para mostrarlo más específicamente, se consideran $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$, tales que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Al aplicarles una transformación T sus imágenes son iguales.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= T(\mathbf{u}_2) \\ T(\mathbf{u}_1) - T(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{0} \\ T(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) &= \mathbf{0} \qquad (1) \end{aligned}$$

La ecuación (1) indica que el vector $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ pertenece al núcleo. Como se indicó que los vectores son iguales, entonces solo el vector nulo pertenece al núcleo; por lo que dicho subespacio tiene dimensión 0. Se corrobora que T relaciona al dominio con el recorrido uno a uno.

Sea $T : U \to V$ una transformación lineal. T es inyectiva, o uno a uno, si para todo par de vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ tales que $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$, sus imágenes bajo T son diferentes entre sí. Es decir, si

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2 \Leftrightarrow T(\mathbf{u}_1) \neq T(\mathbf{u}_2)$$

entonces T es inyectiva. La figura 1 muestra el diagrama de Venn de una transformación inyectiva.

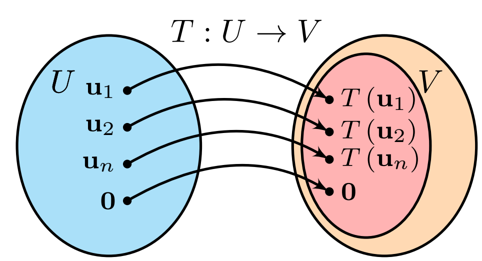

Figura 1

Ejemplo. Determine si la transformación lineal F es inyectiva.

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y-z \\ x-2y+z \end{bmatrix}$$

Al calcular el núcleo de la transformación

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x+y-z \\ x-2y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se llega al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x+y-z&=0 \\ x-2y+z&=0 \end{aligned}$$

cuya solución es $y=3x, z=5x$; el núcleo es

$$N\left(F\right)=\left\{\begin{bmatrix} x \\ 3x \\ 5x \end{bmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$$

La nulidad tiene valor de 1, y en consecuencia la transformación no es inyectiva.

2. Transformación Suprayectiva

Otro tipo de transformación lineal es aquélla que transforme al dominio en todo el codominio; es decir, cuando al transformar una base del dominio se obtendrá un conjunto generador del codominio. El análisis del recorrido permite determinar esta característica: si el recorrido es igual al codominio, entonces la transformación relaciona a todos los elementos del codominio. En otras palabras, el teorema de dimensiones para $T:U\to V$ se redefine como

$$\dim U = \dim V + \dim N\left(T\right) \qquad \Rightarrow \qquad \dim V = \dim T\left(U\right)$$

Sea $T:U\to V$ una transformación lineal. T es suprayectiva, o sobre, si todo $\mathbf{v}\in V$ tiene un asociado en el dominio U. Es decir, si

$$\forall\ \mathbf{v}\in V\ \exists\ \mathbf{u}\in U \ni T\left(\mathbf{u}\right)=\mathbf{v}$$

entonces T es suprayectiva o sobre. La figura 2 ilustra el diagrama de Venn de una transformación suprayectiva.

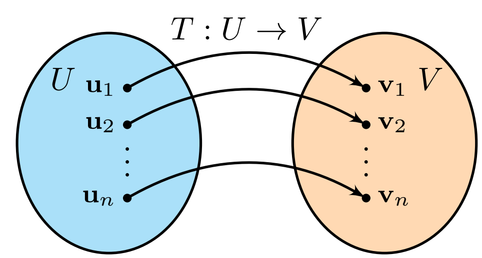

Figura 2

Mediante el teorema de dimensiones y la dimensión del codominio se puede determinar si la transformación $T:U\to V$ analizada es suprayectiva. Pero, también puede analizarse mediante una base $B=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n\}$ del dominio U. La base B posee imágenes bajo T que pueden combinarse linealmente:

$$\alpha_1 T\left(\mathbf{u}_1\right)+\alpha_2 T\left(\mathbf{u}_2\right)+\cdots+\alpha_n T\left(\mathbf{u}_n\right)=\mathbf{v} \qquad \forall\ \mathbf{v}\in V$$

Se obtiene así la ecuación de generación del espacio vectorial V; si la combinación lineal es compatible, entonces la transformación T es suprayectiva.

Ejemplo. Determine si la transformación lineal T es suprayectiva.

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \quad\Rightarrow\quad T\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x+y-z\\ x-2y+z\\ x-y+z\end{bmatrix}$$

Las imágenes bajo T de la base canónica del dominio son

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Se obtiene el conjunto $G=\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$. Si G genera a $\mathbb{R}^3$, entonces la transformación será suprayectiva.

$$\begin{bmatrix}3&1&1\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&-1\\3&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&7&4\\0&-1&0\end{bmatrix}$$
$$\sim\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&-1&0\\0&7&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&-1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

El rango de la matriz es tres, que es la dimensión de $\mathbb{R}^3$; además, al llevar a la matriz a su forma canónica se obtendrá la base canónica. En conclusión, T es suprayectiva.

También existirán transformaciones que sean inyectivas y suprayectivas al mismo tiempo. Éstas son las transformaciones biyectivas, las cuales se mencionarán posteriormente.

Álgebra Lineal
Lectura 15: Matriz Asociada a la Transformación

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Equivalente Matricial en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$

Una transformación lineal posee una regla de correspondencia que permite realizar la transición desde el dominio hasta el codominio. Un ejemplo es la transformación

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y-z \\ 3x+y \\ -2z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

El aspecto interesante de este tipo de reglas de correspondencia es que pueden expresarse de una forma diferente. Considérese un sistema de ecuaciones lineales que puede expresarse de manera matricial como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Una transformación lineal conserva las mismas propiedades que el sistema de ecuaciones, por lo que también puede expresarse de manera matricial:

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

La transformación T se expresaría como:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1}$$

La matriz en (1) es una representación de T que crea exactamente el mismo efecto: relaciona un vector del dominio con su imagen bajo T. Esta representación matricial se conoce como equivalente matricial de una transformación lineal en espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$.

Sean $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ una transformación lineal. La regla de correspondencia de T puede expresarse como

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

donde $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ y $A\mathbf{u} \in \mathbb{C}^m$. A la matriz A se le conoce como equivalente matricial de T.

El equivalente matricial permite establecer un nuevo mecanismo para la transformación de vectores. Mediante esta equivalencia, se observa una relación entre las transformaciones lineales y el álgebra matricial:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) & \qquad T(\alpha\mathbf{u}) &= \alpha T(\mathbf{u}) \\ A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= A\mathbf{u}+A\mathbf{v} & \qquad A(\alpha\mathbf{u}) &= \alpha(A\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Por lo que puede concluirse que las transformaciones lineales son parte del álgebra matricial. Más específicamente, las transformaciones lineales generalizan el uso del álgebra matricial en los conjuntos de elementos que definan la suma y la multiplicación matricial.

La manera de obtener el equivalente debe contemplar el uso de las bases canónicas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo. Obtenga el equivalente matricial de la transformación lineal

$$T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2 \quad\Rightarrow\quad T\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ia-b\\ ia+b+(2-i)c\end{bmatrix}$$

El uso de la base canónica y sus imágenes bajo T permitirá obtener cada columna del equivalente matricial.

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2i\\ i\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 2-i\end{bmatrix}$$

Cada imagen representará una columna de la matriz que representa a T, por lo que

$$A = \begin{bmatrix} 2i & -1 & 0\\ i & 1 & 2-i\end{bmatrix}$$

Así es como la regla de correspondencia se reescribe como

$$T\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & -1 & 0\\ i & 1 & 2-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

Si se usase la base canónica del codominio, también podría construirse el equivalente matricial pero a partir de vectores de coordenadas. Las imágenes de la base del ejemplo, expresadas en términos de la base canónica del codominio son:

$$\begin{bmatrix}2i\\ i\end{bmatrix} = \alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha_1 = 2i\\ \alpha_2 = i\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = \beta_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \beta_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\beta_1 = -1\\ \beta_2 = 1\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}0\\ 2-i\end{bmatrix} = \gamma_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \gamma_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\gamma_1 = 0\\ \gamma_2 = 2-i\end{cases}$$

Al disponer las coordenadas en su forma de vector, efectivamente, se obtiene el equivalente matricial.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & -1 & 0\\ i & 1 & 2-i\end{bmatrix}$$

El uso de vectores de coordenadas generaliza el equivalente matricial más allá de los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$.

2. Matriz Asociada a la Transformación

Tomando una transformación lineal $T:U\to V$, una alternativa a la regla de correspondencia se construye mediante un equivalente matricial formado por vectores de coordenadas.

Tomando a $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ como una base del dominio U y a $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ como una base del codominio V, las imágenes bajo T de la base A pueden expresarse como

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= \alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m1}\mathbf{v}_m \\ T(\mathbf{u}_2) &= \alpha_{12}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m2}\mathbf{v}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{u}_n) &= \alpha_{1n}\mathbf{v}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{mn}\mathbf{v}_m \end{aligned}$$

donde los escalares α_{ij} forman, como se explicó en el apartado anterior, el equivalente matricial a T. Esta matriz se llama matriz asociada a la transformación lineal.

Sean $T : U \to V$ una transformación lineal, $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ una base de U, y $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ una base de V. La matriz asociada a la transformación T referida a las bases A y B se forma con los vectores de coordenadas de las imágenes de A en la base B:

$$M_B^A(T) = \left[\ [T(\mathbf{u}_1)]_B \quad [T(\mathbf{u}_2)]_B \quad \cdots \quad [T(\mathbf{u}_n)]_B\ \right]$$

Esta matriz permite realizar la transformación lineal:

$$[T(\mathbf{v})]_B = M_B^A(T)\,[\mathbf{v}]_A$$

Obsérvese que el equivalente matricial en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ es un caso especial de la matriz asociada: las combinaciones lineales en el codominio se realizan sobre la base la canónica. Este aspecto requiere una aclaración importante sobre el uso de la matriz asociada es el proceso de transformación. En los equivalentes matriciales en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ la imagen se obtiene al multiplicar la matriz por el vector del dominio; eso es posible debido a que las bases referidas son las canónicas. En la matriz asociada generalizada no sucede así, ya que se usan explícitamente vectores de coordenadas. Es un proceso similar al cambio de base mediante la matriz de transición: la multiplicación matricial se realiza sobre vectores de coordenadas, no sobre elementos del espacio vectorial.

La matriz asociada es análoga a la matriz de transición; de hecho, la matriz de transición es un caso especial de la matriz asociada a una transformación lineal.

Por ejemplo, los espacios de color XYZ y RGB (figura 1) se representan por vectores de $\mathbb{R}^3$. Para cambiar del espacio de estímulos visuales rojo (X), azul (Z) e iluminación (Y) a luces roja (R), verde (G) y azul (B) se requiere la transformación lineal

$$A\,[\mathbf{u}]_{RGB} = [\mathbf{u}]_{XYZ}$$

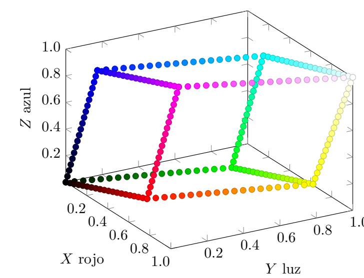

Figura 1. El espacio de color XYZ representa estímulos visuales humanos, mientras que el RGB la descomposición de la luz. Para cambiar de uno a otro se requiere una matriz asociada a una transformación lineal.

donde $\mathbf{u}$ es el color que se desea representar y A es la matriz asociada al cambio de espacio de color, referida a las bases de XYZ y RGB. En otras palabras, se está transformando un vector de color de un espacio vectorial a otro.

Ejemplo. Sea la transformación lineal

$$F : \mathbb{R}^2 \to P_1 \Rightarrow F\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (a+b)\,x + (b-a)$$

donde $P_1 = \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}\}$. Obtenga la matriz asociada a F, referida a las bases $A = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ del dominio y $B = \{x+1, x-1\}$ del codominio, y corrobore que la matriz realiza la transformación de $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

La matriz asociada se forma mediante las imágenes de A como combinación lineal de los elementos de la base B.

$$F\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = x-3 \quad \Rightarrow \quad x-3 = \alpha_1 (x+1) + \alpha_2 (x-1)$$
$$F\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -x+1 \quad \Rightarrow \quad -x+1 = \beta_1 (x+1) + \beta_2 (x-1)$$

Las soluciones para sendos sistemas son $\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = -1 \end{cases}$. Por lo que la matriz asociada es

$$M_B^A(F) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Para realizar la transformación se requiere el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base A:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{x}]_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La transformación de coordenadas se logra mediante el producto de M_B^A y $[\mathbf{x}]_A$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para obtener la imagen de $\mathbf{x}$ bajo F se aplica una combinación lineal con la base del codominio.

$$[F(\mathbf{x})]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(\mathbf{x}) = -3(x+1) + 4(x-1)$$
$$F(\mathbf{x}) = x-7$$

Si se aplica la regla de correspondencia de la transformación F directamente al vector $\mathbf{x}$,

$$F\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (a+b)x + (b-a)$$
$$F\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = (4-3)x + (-3-4)$$
$$F\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = x-7$$

se corrobora que la matriz asociada y la regla de correspondencia son equivalentes.

En los temas siguientes se fundamentará la generalización del álgebra matricial mediante las transformaciones lineales a partir de la matriz asociada.

Álgebra Lineal
Lectura 16: Álgebra de Transformaciones

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020, Rev. Mayo 2023 por Yolotzin Romero Ortiz

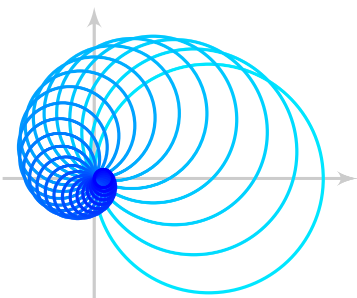

Figura 1. Las operaciones con transformaciones lineales permiten cambiar objetos geométricos como sucede en las animaciones. Aquí se aplica una transformación que rota y escala vectores.

Al ser funciones, las transformaciones lineales pueden operarse entre sí para formar nuevas transformaciones. La única limitante es la naturaleza del dominio y codominio, ya que si no hay compatibilidad la operación no podrá llevarse a cabo.

Si son lineales, las transformaciones conservan las operaciones que pueden llevarse a cabo son las elementales en el espacio vectorial. Estas operaciones permiten plantear problemas que de inicio, pareciesen no estar relacionadas con el álgebra lineal. Por ejemplo, en el planteamiento de ecuaciones diferenciales como $y'' - 2y' + y = 0$, donde se observa que la derivada puede multiplicarse por un escalar y sumarse con otras derivadas. O bien, para aplicar una transformación a un objeto geométrico y que se deforme, tal como muestra la figura 1.

Además, las operaciones con transformaciones lineales estarán fundamentadas en el álgebra matricial, la cual es una generalización de las matrices a cualquier espacio vectorial.

1. Suma de Transformaciones Lineales

Esta operación está relacionada con la superposición. El resultado de aplicar una transformación lineal a un elemento del dominio es un vector del codominio, y si dos transformaciones diferentes tienen dominios iguales y codominios iguales, entonces sus respectivos resultados pueden ser sumados, pues pertenecen al mismo espacio vectorial.

Sean las transformaciones lineales $F : U \to V$ y $G : U \to V$. La suma de transformaciones lineales $F + G$ se define como

$$(F + G)(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{u}) \qquad \forall\ \mathbf{u} \in U$$

Se destaca que para esta operación, tanto el dominio como el codominio deben ser el mismo en ambas transformaciones.

Las propiedades importantes de esta operación son:

- Si F y G son lineales, entonces $F+G$ es lineal.
- $M_B^A(F+G) = M_B^A(F) + M_B^A(G)$.

2. Multiplicación de un Escalar por una Transformación Lineal

La segunda operación está relacionada con la homogeneidad. El elemento del codominio que resulta de evaluar una transformación lineal es un vector, el cual es susceptible de multiplicarse por un escalar. Al igual que en la suma de transformaciones, el resultado está preservando la segunda operación del espacio vectorial.

Sean los espacios vectoriales U y V, ambos sobre el campo K, entre los que se define la transformación lineal $F : U \to V$. La multiplicación de una transformación lineal por un escalar αF se establece como

$$(\alpha F)(\mathbf{u}) = \alpha [F(\mathbf{u})] \qquad \forall\ \mathbf{u} \in U$$

Sus propiedades son:

- Si F es lineal, entonces αF es lineal.
- $M_B^A(\alpha F) = \alpha M_B^A(F)$.

Ejemplo. Sean el espacio vectorial real $P_1 = \{ax+b | a, b \in \mathbb{R}\}$ y las transformaciones lineales

$$T : P_1 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow T(ax+b) = \begin{bmatrix} 2a-b \\ 3a+2b \end{bmatrix}$$

$$S : P_1 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow S(ax+b) = \begin{bmatrix} a-3b \\ 4a-b \end{bmatrix}$$

Obtenga la transformación $F : P_1 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F : 3T - S$.

Al aplicar las multiplicaciones:

$$\begin{aligned} 3T(ax+b) &= 3\begin{bmatrix} 2a-b \\ 3a+2b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6a-3b \\ 9a+6b \end{bmatrix} \\ -S(ax+b) &= -\begin{bmatrix} a-3b \\ 4a-b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a+3b \\ -4a+b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, la transformación F es

$$\begin{aligned} F(ax+b) &= \begin{bmatrix} 6a-3b \\ 9a+6b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a+3b \\ -4a+b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5a \\ 5a+7b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Composición de Transformaciones

Al ser funciones, las transformaciones lineales pueden evaluarse con otras transformaciones; la característica de esta operación es que el dominio de una debe ser el codominio de otra. Esta operación es la composición de transformaciones.

Sean las transformaciones lineales $F : U \to V$ y $G : V \to W$. La composición de transformaciones $G \circ F$ se define como

$$(G \circ F)(\mathbf{u}) = G\big(F(\mathbf{u})\big) \qquad \forall\, \mathbf{u} \in U$$

La figura 2 muestra el diagrama de Venn de la composición.

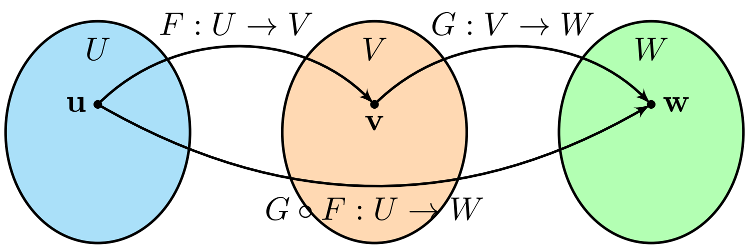

Figura 2

Las propiedades de la composición de transformaciones son:

- Si F y G son lineales, entonces $G \circ F$ también es lineal.
- $H \circ (F + G) = (H \circ F) + (H \circ G)$.
- $(H + E) \circ F = (H \circ F) + (E \circ F)$.
- $\alpha (H \circ F) = (\alpha H) \circ F \Rightarrow H \circ (\alpha F)$.
- $D \circ (H \circ F) = (D \circ H) \circ F$.
- $E \circ I_V = E$ y $I_W \circ E = E$.
- $M_C^A (G \circ F) = M_C^B (G)\, M_B^A (F)$.

La transformación I_X denota la llamada transformación identidad:

$$I : X \to X \Rightarrow I(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in X$$

Ejemplo. Sean las transformaciones lineales

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad P\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ a + b \end{bmatrix}$$

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad Q\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix}$$

$$R : \mathbb{R}^2 \to P_1 \quad \Rightarrow \quad R\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = ax + (a + b)$$

donde $P_1 = \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}\}$. Calcule la transformación $R \circ (2P - Q)$.

Para la suma

$$\begin{aligned} (2P - Q)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} -a \\ a + b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2a \\ 2a + 2b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2a \\ 2a + 3b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para que cualquier composición de transformaciones pueda llevarse a cabo, el dominio de la transformación a la izquierda del símbolo $\circ$ debe ser igual al codominio de la transformación a al derecha; en este ejemplo, la composición puede llevarse a cabo pues $\mathbb{R}^2$ es el dominio de R, que es igual a $\mathbb{R}^2$ ya que es el codominio de $2P - Q$. Entonces, la composición se obtiene al evaluar R con la resta de transformaciones obtenida anteriormente:

$$\begin{aligned} R \circ (2P - Q)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= R(2P - Q) \\ &= R\begin{bmatrix} -2a \\ 2a + 3b \end{bmatrix} \\ &= (-2a)\, x + (-2a + 2a + 3b) \\ &= -2ax + 3b \end{aligned}$$

La regla se correspondencia de la transformación es

$$\big(R \circ (2P - Q)\big) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -2ax + 3b$$

El álgebra de transformaciones permite plantear problemas de la matemática que modelan diversos fenómenos físicos. Tomando un espacio vectorial de funciones, donde se define la derivada como transformación lineal, la composición permite definir derivadas de orden superior

$$(D \circ D)(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y\right) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}y$$

En un espacio de funciones con varias incógnitas independientes, la composición de integrales permite definir integrales reiteradas

$$\begin{aligned} S_1\big(f(x,y)\big) &= \int f(x,y)\ dy \\ S_2\big(g(x,y)\big) &= \int g(x,y)\ dx \\ \Rightarrow \qquad (S_2 \circ S_1)\big(f(x,y)\big) &= \iint f(x,y)\ dy\ dx \end{aligned}$$

En el caso de la derivadas, se pueden plantear ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \big(D \circ (D - 3I) + D - 2I\big)(y) &= 0 \\ \big(D^2 - 2D - 2I\big)(y) &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2}y - 2\frac{d}{dx}y - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Las operaciones con transformaciones son la generalización a diversos espacios vectoriales del álgebra lineal. Tomando a las transformaciones F y G cuyas matrices asociadas son A y B, respectivamente, la suma de trasformaciones define a la suma matricial:

$$(F + G)(\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{u} + B\mathbf{u}$$

Para el caso de la multiplicación por un escalar, es la misma para transformaciones y matrices:

$$(\alpha F)(\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad \alpha A\mathbf{u}$$

Finalmente, la composición de transformaciones generaliza la multiplicación matricial:

$$(F \circ G)(\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad AB\mathbf{u}$$

La relación entre transformaciones lineales y conceptos del álgebra matricial como transposición, inversa, traza se estudiarán más adelante en el curso.

Álgebra Lineal
Lectura 17: Transformación Inversa

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

1. Transformación Identidad

Una de las transformaciones más importantes es la transformación identidad que, como su nombre lo indica, la imagen es idéntica al elemento del dominio del que proviene.

> Sea $I : U \to U$ la transformación lineal identidad, definida como
> $$I(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \qquad \forall\ \mathbf{u} \in U$$

Un aspecto importante es que la matriz identidad siempre será la matriz asociada a I, si es referida a la misma base tanto en dominio como en codominio. En otro caso, no sucederá así.

2. Transformación Inversa

Considerando ahora la transformación identidad y una transformación como la derivada, ambas definidas en el espacio vectorial $F = \{ae^{2x} + bxe^{2x} | a, b \in \mathbb{R}\}$, las imágenes bajo la derivada de dos funciones linealmente independientes son

$$D\left(3e^{2x}\right) = 6e^{2x} \tag{1}$$
$$D\left(-xe^{2x}\right) = -e^{2x} - 2xe^{2x} \tag{2}$$

Si se desea recuperar la función original de (1), simplemente se aplica una transformación lineal T que divida entre 2:

$$T\left(6e^{2x}\right) = \frac{1}{2}\left(6e^{2x}\right) \Rightarrow 3e^{2x} \tag{3}$$

Para la imagen (2) es más complicada la reversión del cálculo. Tomando como auxiliar a (3), se encuentra la imagen bajo T de $y = xe^{2x}$:

$$\begin{aligned}
T\left(-2xe^{2x} - e^{2x}\right) &= -xe^{2x} \\
-2T\left(xe^{2x}\right) - T\left(e^{2x}\right) &= -xe^{2x} \\
-2T\left(xe^{2x}\right) - \frac{1}{6}T\left(6e^{2x}\right) &= -xe^{2x} \\
-2T\left(xe^{2x}\right) &= -xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} \\
T\left(xe^{2x}\right) &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}
\end{aligned}$$

Por lo que la regla de correspondencia de T es

$$T\left(ae^{2x}+bxe^{2x}\right)=a\frac{1}{2}e^{2x}+b\left(-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}\right)$$

Al aplicar la regla de correspondencia obtenida a las imágenes de las funciones originales

$$\begin{aligned}T\left(6e^{2x}\right)&=(6)\frac{1}{2}e^{2x}+(0)\left(-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}\right)\\&=\frac{6}{2}e^{2x}\\&=3e^{2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T\left(-e^{2x}-2xe^{2x}\right)&=(-1)\frac{1}{2}e^{2x}+(-2)\left(-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}\right)\Rightarrow -xe^{2x}\\&=-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{2}{4}e^{2x}-\frac{2}{2}xe^{2x}\\&=-xe^{2x}\end{aligned}$$

se recuperan dichos elementos del dominio.

Este análisis concluye que puede recuperarse un elemento del dominio a partir del elemento del recorrido obtenido bajo una transformación lineal. Sin embargo, no siempre es posible revertir los efectos de la transformación lineal original. A este concepto se le denomina transformación lineal inversa.

Sea $F:U\rightarrow V$ una transformación lineal. La transformación lineal, denotada como $F^{-1}:V\rightarrow U$, es conocida como la transformación lineal inversa de F, y se define como

$$F^{-1}\circ F=I_U \qquad\qquad F\circ F^{-1}=I_V$$

donde I_U es la transformación identidad en U, e I_V es la transformación identidad en V.

Es decir,

$$F^{-1}\big(F\left(\mathbf{u}\right)\big)=\mathbf{u} \qquad \forall\ \mathbf{u}\in U$$

y

$$F\big(F^{-1}\left(\mathbf{v}\right)\big)=\mathbf{v} \qquad \forall\ \mathbf{v}\in V$$

En la figura 1 se muestra el diagrama de Venn de la inversa.

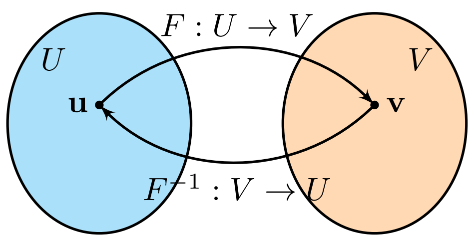

Figura 1

Dentro de las propiedades de la transformación inversa se encuentran:

- Si F es lineal, entonces F^{-1} (si existe) también es lineal.
- F^{-1} existe, si $M_B^A\left(F\right)$ es no-singular.
- F^{-1} es única.
- $\left(F^{-1}\right)^{-1}=F$.
- $\left(T\circ F\right)^{-1}=F^{-1}\circ T^{-1}$.
- $\left(\alpha F\right)^{-1}=\alpha^{-1}F^{-1}$; siendo $\alpha\neq 0\in K$.
- $M_A^B\left(F^{-1}\right)=\left[M_B^A\left(F\right)\right]^{-1}$.

La cuestión de saber si una transformación lineal es invertible se convierte en un análisis del núcleo y del recorrido. Para determinar si una transformación lineal T tiene inversa, se cumplen las siguientes características:

- El núcleo de T tiene dimensión nula, y la dimensión del recorrido de T es igual a la dimensión del codominio y a su vez, igual a la dimensión del dominio.

- ❑ T es inyectiva y suprayectiva.
- ❑ La matriz asociada a T es no-singular.
- ❑ La matriz asociada no posee valores propios nulos.

Ejemplo. Sea la transformación lineal $F : \mathbb{R}^3 \to P_2$ tal que

$$F\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = (2a-b)\,x^2 + cx + (-b+c)$$

donde $P = \{mx^2 + nx + p | m, n, p \in \mathbb{R}\}$. Determine su transformación inversa, si es que existe.

Tomando a

$$(2a-b)\,x^2 + cx + (-b+c) = mx^2 + nx + p$$

entonces

$$m = 2a - b, \qquad n = c, \qquad p = -b + c$$

donde a, b, c (coeficientes del vector en el dominio) deben estar en términos de m, n, p (coeficientes de la imagen).

$$a = \frac{1}{2}(m+b) \tag{4}$$

$$b = c - p \tag{5}$$

$$c = n \tag{6}$$

El valor de c está dado por (6). Al sustituir (6) en (5) se obtiene el valor de b, mientras que a se obtiene al sustituir (5) y (6) en (4):

$$a = \frac{1}{2}(m+n-p), \qquad b = n - p, \qquad c = n$$

Por lo tanto, la transformación inversa es

$$F^{-1}\left(mx^2 + nx + p\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(m+n-p) \\ n-p \\ n \end{bmatrix}$$

Un método alternativo es invertir la matriz asociada a F y obtener la regla de correspondencia. Para la matriz asociada se utilizarán las bases $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B = \{x^2, x, 1\}$.

$$F\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1\left(x^2\right) + \alpha_2\,(x) + \alpha_3\,(1)$$

$$F\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -x^2 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \beta_1\left(x^2\right) + \beta_2\,(x) + \beta_3\,(1)$$

$$F\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_1\left(x^2\right) + \gamma_2\,(x) + \gamma_3\,(1)$$

Con esto, la matriz asociada es

$$M_B^A\,(F) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si esta matriz posee inversa, entonces la inversa estará asociada a la transformación inversa. El determinante de $M_B^A\,(F)$ es

$$\left|M_B^A\,(F)\right| = 2$$

por lo que existe la transformación inversa, y su matriz asociada es

$$M_A^B\left(F^{-1}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&-2\\0&2&0\end{bmatrix}$$

Para obtener la regla de correspondencia la combinación lineal para el vector de coordenadas es desde el espacio P_1 hasta el espacio $\mathbb{R}^3$:

$$mx^2+nx+p=\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha_1=m\\ \alpha_2=n\\ \alpha_3=p\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&-2\\0&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\n\\p\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}m+n-p\\2n-2p\\2n\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la regla de correspondencia de la inversa es

$$F\left(mx^2+nx+p\right)=\frac{1}{2}(m+n-p)\,\hat{\mathbf{i}}+(n-p)\,\hat{\mathbf{j}}+n\hat{\mathbf{k}}$$

$$F\left(mx^2+nx+p\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(m+n-p)\\n-p\\n\end{bmatrix}$$

La cual es igual a la obtenida anteriormente por despejes.

2.1. Isomorfismo

La inversión de transformaciones permite fundamentar los espacio vectoriales isomorfos: espacios vectoriales que poseen las mismas propiedades y cada vector conserva sus propias características, ya sea en un espacio o en otro.

Una transformación lineal $F:U\to V$ que es inyectiva y suprayectiva se conoce como isomorfismo. Se le denota como Is, y los espacios vectoriales U y V son isomorfos entre sí; es decir $U\cong V$.

Los espacios isomorfos permiten trabajar las propiedades de un espacio vectorial en otro. En el ejemplo anterior, la transformación invertible F hace que el espacio de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales sea isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

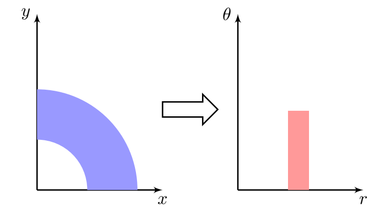

Figura 2. La transformación entre coordenadas cartesianas y polares posee una inversa que puede convertir regiones de un sistema al otro y viceversa.

En un caso más avanzado, en Cálculo Vectorial se maneja la llamada matriz jacobiana o gradiente generalizado. Esta matriz designa la inversión de una transformación, con más de una variable, alrededor de un punto del dominio dado. Además, permite una relación invertible entre sistemas de coordenadas curvilíneas (véase la figura 2).

Álgebra Lineal
Lectura 18: Efectos Geométricos de las Transformaciones Lineales

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

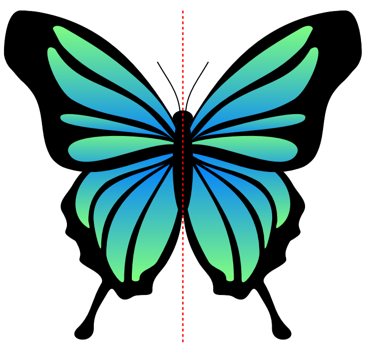

Figura 1. Una mariposa es un ejemplo de equidistancia y reflexión en la naturaleza, la cual puede estudiarse con base en una recta que define la característica de la simetría.

El Álgebra Lineal contiene conceptos, que en muchos casos aparentan no tener conexión evidente con la Física u otras ramas de la Matemática. Al estudiar estos conceptos es posible que se consideren muy abstractos, aunque en realidad, implícitamente ya se manejan en diversas ramas de la Ciencia. Uno de estos aspectos implícitos es la geometría de las transformaciones en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$. Existen diversos efectos entre los que se incluyen la simetría, la rotación o el escalamiento entre otros.

1. Simetría

La simetría puede encontrarse fácilmente en la naturaleza: una mariposa (como en la figura 1), un copo de nieve, un helecho, un trébol, en el reflejo que produce un espejo, etc. La simetría puede modelarse mediante vectores y una transformación lineal; el lugar de referencia puede ser un punto, una recta o un plano. Adicionalmente a la transformación lineal, se utilizan otros conceptos como el producto interno o la proyección ortogonal.

Ejemplo. Obtenga una transformación lineal que convierta un punto $A(x, y)$ cualquiera del plano en su simétrico con respecto a la recta, $y = -\frac{1}{2}x$.

La regla de correspondencia de la transformación se calculará mediante la base $C = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, de la cual se calcularán los simétricos de sus elementos. Con base en la figura 2, donde se muestra la geometría de A y su simétrico, el procedimiento a seguir consiste en 1) obtener la componente vectorial (proyección) de los elementos de C sobre un vector director de la recta dada, 2) encontrar el vector distancia entre el vector $\mathbf{e}_i$ de la base y su componente vectorial, y 3) restar el vector distancia a la componente vectorial para encontrar el simétrico al vector $\mathbf{e}_i$ de la base.

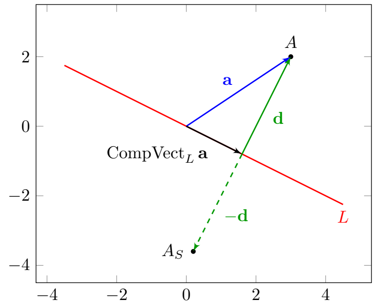

Figura 2

La recta como subespacio es $L = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$, donde $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un vector director. Para el vector $\mathbf{e}_1$ se tiene que

$$\operatorname{CompVect}_{\mathbf{v}} \mathbf{e}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El vector distancia $\mathbf{d}_1$, entre $\mathbf{e}_1$ y su componente vectorial, es

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= \mathbf{e}_1 - \operatorname{CompVect}_{\mathbf{v}} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{d}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ya puede calcularse el vector simétrico a $\mathbf{e}_1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \operatorname{CompVect}_{\mathbf{v}} \mathbf{e}_1 - \mathbf{d}_1 \\ &= \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}_1 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para el vector $\mathbf{e}_2$ se sigue el mismo procedimiento, donde con la componente vectorial

$$\operatorname{CompVect}_{\mathbf{v}} \mathbf{e}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y el vector distancia

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{d}_2 &= \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

se obtiene el simétrico para $\mathbf{e}_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_2 &= \operatorname{CompVect}_{\mathbf{v}} \mathbf{e}_2 - \mathbf{d}_1 \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{s}_2 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los vectores simétricos $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ son las respectivas imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ bajo la transformación buscada. Mediante la combinación lineal

$$\begin{aligned} x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ xT \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + yT \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \frac{x}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \frac{y}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la transformación lineal buscada es

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3x - 4y \\ -4x - 3y \end{bmatrix}$$

2. Rotación

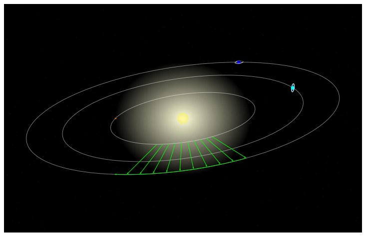

Figura 3. La rotación permite dibujar objetos como planetas o sus órbitas (asumiendo que son esféricos y circulares, respectivamente) a partir de un punto.

Otro efecto geométrico interesante es la rotación. Cuando en un sistema de coordenadas se rotan los puntos un determinado ángulo, se puede modelar la trayectoria circular que recorre un móvil y estudiar el movimiento; incluso, se pueden crear complejos dibujos con un sólo punto y una transformación que permita rotarlo en diferentes ángulos (como lo describe la figura 3). La rotación, por sí sola, sólo afecta la posición del vector y nunca su tamaño.

Ejemplo. Obtenga la transformación lineal para rotar un punto $A(x,y)$ un ángulo de $\varphi = 45°$ en sentido antihorario.

En la figura **??** se ilustra la geometría de un punto A que se rota en sentido antihorario.

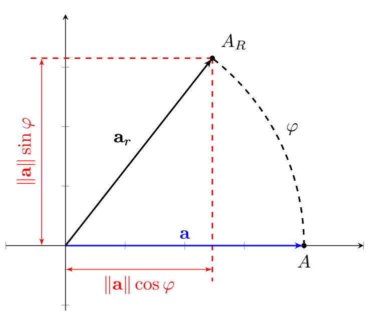

Figura 4

Nuevamente se recurrirá a la base $C = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ para calcular la transformación por combinación lineal. De acuerdo a la figura 4, las componentes del vector rotado se calculan mediante la multiplicación de la magnitud del vector $\mathbf{e}_i$ a rotar por el coseno y el seno del ángulo.

De esta manera, la rotación de $\mathbf{e}_1$ se calcula como

$$\mathbf{r}_1 = \|\mathbf{e}_1\| \begin{bmatrix} \cos 45° \\ \sin 45° \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el vector $\mathbf{e}_2$ es lo mismo, con la salvedad que el ángulo de rotación se mide desde el eje y. Ahora, x está asociada al seno en el segundo cuadrante (con abscisa negativa), mientras que y lo está al coseno.

$$\mathbf{r}_2 = \|\mathbf{e}_2\| \begin{bmatrix} -\sin 45° \\ \cos 45° \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, por combinación lineal de las imágenes,

$$\begin{aligned} x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ xT \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + yT \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{y}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \end{aligned}$$

La transformación buscada es

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x - y \\ x + y \end{bmatrix}$$

Este tipo de transformaciones permiten dibujar un objeto en tiempo real con base en la transformación y unos pocos datos del objeto, en lugar de concebirlo completamente antes de mostrarse.

3. Otros Efectos

Otras transformaciones pueden modificar las dimensiones de los puntos que conforman un objeto, como las homotecias (escalamientos) y en algunos casos también combinar una rotación con un escalamiento. La figura 5 muestra una espiral que mezcla dos efectos geométricos.

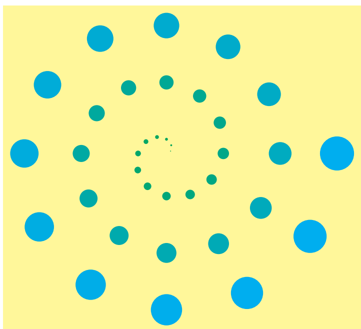

Figura 5. La espiral es resultado de la composición de una transformación que crea rotación y una transformación que crea escalamiento, aplicadas recursivamente.

Tomando en cuenta que la rotación afecta la orientación del vector y el escalamiento afecta el tamaño, ambas pueden componerse para formar la espiral: el vector rota al mismo tiempo que cambia su tamaño. Mediante la matriz de escalamiento,

$$E(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (1)$$

y la matriz que crea la rotación antihoraria con ángulo de 45°,

$$R(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

se obtiene la transformación de la espiral. Al multiplicar (1) y (2), se obtiene la transformación buscada:

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Esta transformación generará una espiral si al aplicarla a un vector $\mathbf{v}$, se aplica a la imagen resultante del paso anterior; en otras palabras, si se obtiene la transformación

$$T(T(\cdots T(\mathbf{v})\cdots)) = T^n(\mathbf{v})$$

Al aplicar la composición sucesivamente, se obtiene un algoritmo recursivo: una operación o proceso que se repite sobre sí mismo sucesivamente hasta alcanzar un nivel determinado.

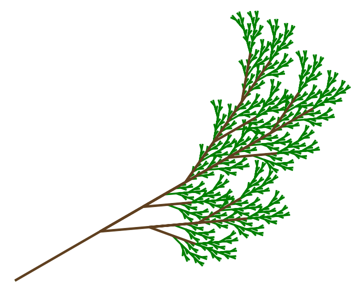

Figura 6. El fractal es la recursión de una forma a diferentes escalas. Aquí se muestra una rama generada a partir de la recursividad de fractales.

Un campo actual para el desarrollo geométrico de las transformaciones lineales recursivas son los fractales, ya que éstos pueden generarse utilizando sucesivamente dicha transformación sobre una imagen; es decir, recursividad mediante composición de transformaciones (como se obtuvo con la espiral).

Un fractal no es más que un objeto semigeométrico que se repite a diferentes escalas sucesivamente. Sus características son: 1) posee detalle a cualquier escala de observación, 2) es autosimilar, y 3) se define mediante un simple algoritmo recursivo.

La Geometría de Fractales permite representar de una manera más exacta las formas que existen en la naturaleza. Por ejemplo, el centro de un girasol, un helecho, la concha de un nautilus o la rama de un árbol como la mostrada en la figura 6.

Álgebra Lineal
Lectura 19: Valores y Vectores Propios

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020, Rev. Agosto 2021

1. Operador Lineal

Existen transformaciones lineales cuyo dominio y codominio es el mismo espacio vectorial. Son llamados operadores lineales.

Un operador lineal T es una transformación lineal cuyo dominio y codominio son el espacio vectorial V; es decir

$$T : V \to V \quad \Rightarrow \quad T(\mathbf{v}) \in V,\ \forall\ \mathbf{v} \in V$$

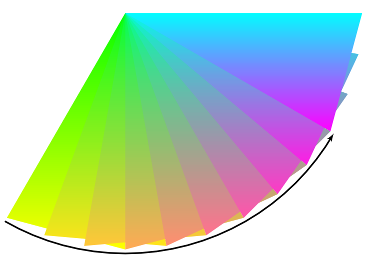

Figura 1. Un operador lineal altera la geometría o el color.

La derivada y la integral son ejemplos de operadores lineales dentro del espacio vectorial de funciones, pues ambas transforman funciones en otras funciones.

Otro ejemplo de operador lineal es la multiplicación matricial dentro de un espacio vectorial de matrices de orden n específico. Si se aplica sobre vectores de los espacios $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ se tendrá la herramienta indispensable para crear efectos geométricos y de transformación de color, tal como se ilustra en la figura 1

2. Valores y Vectores Propios

Dentro del operador lineal existen vectores especiales que están relacionados con su imagen. Por ejemplo, en un operador lineal como $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y \\ x+3y \end{bmatrix}$ las siguientes imágenes son importantes

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nótese que bajo la transformación ambos vectores han aumentado su tamaño; es decir, las imágenes son múltiplos de los vectores originales. Este efecto geométrico sobre vectores en específico da lugar a los conceptos de valor y vector propio.

Sean V un espacio vectorial sobre un campo K y un operador lineal $T : V \to V$. Al vector $\mathbf{v} \in V$ se le llama vector propio y al escalar $\lambda \in K$ se le llama valor propio, si

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

En todos los operadores lineales se obtendrán valores y vectores propios asociados a un subespacio en particular. Sin embargo, no cualquier tipo de vector puede satisfacer esta característica.

Ejemplo. Para el operador lineal

$$H : P_1 \to P_1 \Rightarrow H(ax+b) = (4a-5b)x + (2a-3b)$$

demuestre que sus valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$.

Por el concepto de valor y vector propio se tiene que

$$H(ax+b) = (4a-5b)x + (2a-3b) \quad \Rightarrow \quad -1(ax+b)$$

y se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4a - 5b &= -a \\ 2a - 3b &= -b \end{aligned}$$

La solución es indeterminada con la restricción $a = b$; es decir, $ax+a$. En este caso, si se obtiene la imagen del vector $\mathbf{p} = ax + a$, ésta se trata de:

$$\begin{aligned} H(ax+a) &= (4a-5a)x + (2a-3a) \\ &= -ax - a \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento con el valor de 2,

$$H(ax+b) = (4a-5b)x + (2a-3b) \quad \Rightarrow \quad 2(ax+b)$$

las ecuaciones a resolver son

$$\begin{aligned} 4a - 5b &= 2a \\ 2a - 3b &= 2b \end{aligned}$$

La solución arroja la restricción $2a = 5b$; es decir, $5bx + 2b$ cuya imagen es

$$\begin{aligned} H(5bx+2b) &= (20b-10b)x + (10b-6b) \\ &= 10bx + 4b \end{aligned}$$

En este ejemplo, los valores propios son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ que están asociados a los vectores $\mathbf{v}_1 = ax+a$ y $\mathbf{v}_2 = 5bx+2b$, respectivamente.

Los vectores y valores propios poseen las siguientes propiedades:

- En la transformación identidad $I : V \to V$ los vectores propios están asociados al valor 1.
- En la transformación nula $O : V \to V$ todos los vectores propios se asocian al valor 0.
- Si $N(T) \neq \{\mathbf{0}\}$ entonces, todos sus elementos son vectores característicos del valor 0.
- El valor propio $\lambda = 0$ indica que la transformación no tiene inversa.
- Para vectores propios $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de T asociados al valor propio λ:
  1. el escalar λ es único para esos vectores.
  2. el vector $\alpha\mathbf{v}$ es un vector propio asociado a λ.
  3. el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ también es un vector propio asociado a λ.

La última propiedad establece la definición de un subespacio vectorial. En consecuencia el conjunto de vectores propios asociados a un valor propio determinado constituye un subespacio vectorial llamado espacio característico o propio. Si $T : V \to V$ es un operador lineal y λ es un valor característico de T, entonces el conjunto

$$E(\lambda) = \{\mathbf{v} | \mathbf{v} \in V, T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$$

se llama espacio característico asociado al valor λ.

ACLARACIÓN: el vector nulo debe pertenecer a un subespacio; sin embargo, los vectores propios no pueden asociarse a varios valores propios. Este choque de conceptos se debe a la singularidad que representa el vector nulo en el espacio vectorial. por lo que se recomienda tomar con cuidado el concepto de espacio característico.

2.1. Polinomio Característico; Obtención de Valores y Vectores Propios

En el ejemplo anterior se dieron como datos los valores propios. Sin embargo, no es común conocer los valores y los vectores involucrados, por lo que se requiere una manera de saber a qué valor propio le corresponde un espacio característico específico.

De forma matricial, el concepto de valor y vector propio es

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1}$$

que no es otra cosa que una ecuación matricial, donde A puede ser la matriz asociada a un operador lineal $T : V \to V$ o una matriz cualquiera. La diferencia de (1) con la ecuación matricial usual $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es que se tienen dos incógnitas: el vector propio $\mathbf{v}$ y el valor propio λ. Partiendo de (1), se puede restar a ambos lados λ y factorizar el vector propio:

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \\ A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ (A - \lambda I)\,\mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2}$$

La expresión en (2) es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, el cual puede tener única o múltiples soluciones.

Analizando las propiedades de los vectores propios, no es correcto asumir que (2) posea solución única ya que, como se observó en el ejemplo del apartado anterior, existen múltiples vectores propios que forman un subespacio. Por lo tanto, (2) es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo compatible indeterminado.

Un sistema indeterminado posee una característica fundamental: existe dependencia lineal entre sus renglones o columnas, que para sistemas cuadrados se traduce en una matriz de coeficientes con determinante nulo. Por lo tanto, los valores característicos se obtienen del determinante

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{3}$$

Al desarrollar (3) se obtendrá un polinomio conocido como ecuación característica, cuyas raíces serán los valores propios.

Una vez conocidos los valores propios se pueden sustituir, uno a uno, en (2) para resolver el sistema de ecuaciones y encontrar las condiciones que satisfacen al subespacio característico asociado a cada valor característico. Cabe mencionar que el número máximo de valores característicos que pueden hallarse es igual o menor al orden de la matriz, y en consecuencia es igual o menor a la dimensión del espacio vectorial donde se define el operador lineal.

Ejemplo. Obtenga los valores y vectores propios de la matriz

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones a resolver es

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(-2-\lambda)(1-\lambda) - 4 =$$
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \therefore \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$$

Al sustituir en la ecuación matricial los valores obtenidos y resolver el sistema de ecuaciones indeterminado resultante:

$$\lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad x = y$$
$$\lambda_1 = -3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad x = -4y$$

Finalmente, los espacios característicos son:

$$E(2) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$
$$E(-3) = \left\{ \begin{bmatrix} -4y \\ y \end{bmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$$

Los valores propios son una herramienta importante para el modelado y la resolución de problemas y fenómenos. Algunos ejemplos del uso de los valores propios son: efectos geométricos, control de sistemas físicos de segundo orden, optimización de funciones, estudio de grafos, vibraciones, compresión de imágenes, física cuántica o propagación de una enfermedad infecciosa entre otros (véase la figura 2).

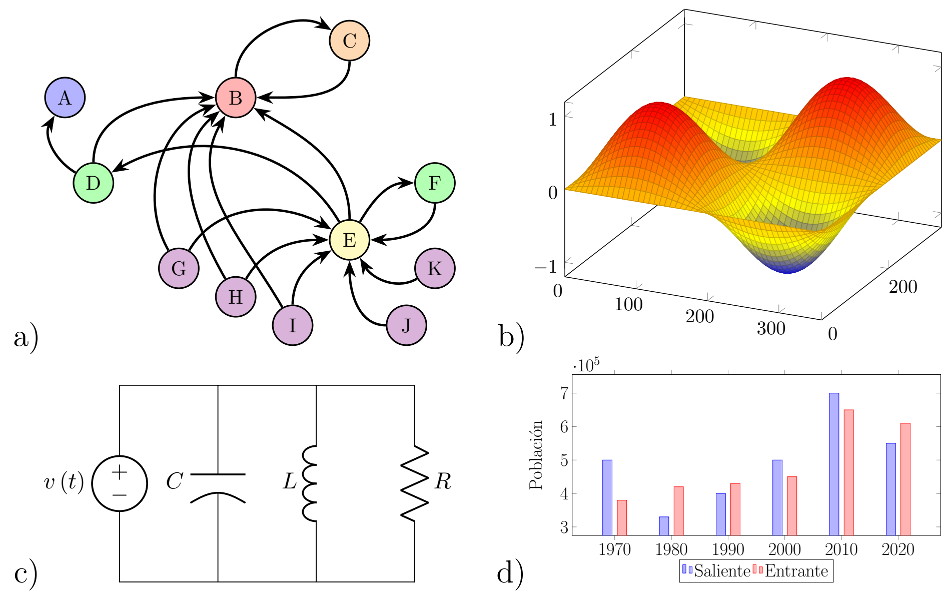

Figura 2. a) los autovalores de la matriz de adyacencia de un grafo permiten identificar al nodo principal (B, en rojo); b) los autovalores de la matriz hessiana permiten caracterizar máximos y mínimos de funciones multivariable; c) los valores propios del modelo en variables de estado de un circuito eléctrico RLC permiten conocer el tipo de respuesta a un voltaje alterno de entrada; d) los vectores propios de una matriz de Markov permiten conocer la evolución de poblaciones.

2.2. Valores Propios de la Matriz Inversa

Existen algunos teoremas importantes sobre valores y vectores característicos que permiten describir a los operadores lineales o matrices, y que están relacionados con algunas de las definiciones que ya se han estudiado como el núcleo o la transformación lineal inversa.

Si A una matriz cuadrada invertible con valores propios λ, entonces los valores propios de A^{-1} son $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ y ambas matrices comparten los mismos vectores propios.

Primero, hay que considerar la definición de valores y vectores propios:

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \tag{4}$$

Si ahora se aplica esta definición con la matriz inversa, entonces

$$A^{-1}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} \tag{5}$$

Ahora se multiplica (5) por la matriz A a ambos lados de la igualdad, aplicando la propiedad de homogeneidad:

$$\begin{aligned} A^{-1}\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{u} \\ A\left(A^{-1}\mathbf{u}\right) &= A\left(\alpha\mathbf{u}\right) \\ \mathbf{u} &= \alpha A\mathbf{u} \end{aligned} \tag{6}$$

Al sustituir (4) en (6) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha A\mathbf{u} \\ \mathbf{u} &= \alpha\lambda\mathbf{u} \\ 1 &= \alpha\lambda \\ \frac{1}{\lambda} &= \alpha \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

De este resultado se desprende un corolario que involucra espeççificamente al valor propio $\lambda = 0$ y al núcleo del operador lineal. Para ello se considera que si $\lambda = 0$ entonces $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ no existe.

Si $T : V \to V$ es un operador lineal no invertible, entonces $\lambda = 0$ es uno de sus valores propios y su espacio característico asociado es el núcleo de T.

Para este caso, partiendo de la definción con el valor propio $lambda = 0$ y el vector característico $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se obtiene la definición de núcleo:

$$\begin{aligned} T\left(\mathbf{v}\right) &= \lambda\mathbf{v} \\ &= 0\mathbf{v} \\ T\left(\mathbf{v}\right) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v} \in N\left(T\right)$ y éste es diferente del vector nulo, entonces el núcleo tiene dimensión mayor a cero y T no es inyectiva. Por lo tanto, T no tiene inversa. $\blacksquare$

Otra forma de mostrar este hecho es al aplicar los valores propios de la inversa:

$$\begin{aligned} T\left(\mathbf{v}\right) &= 0\mathbf{v} \\ T^{-1}\Big(T\left(\mathbf{v}\right)\Big) &= T^{-1}\left(0\mathbf{v}\right) \\ \mathbf{v} &= 0T^{-1}\left(\mathbf{v}\right) \\ \frac{1}{0}\mathbf{v} &= \alpha\mathbf{v} \end{aligned}$$

Por lo que $\alpha = \frac{1}{0}$ indica que no puede calcularse la inversa de $T\left(v\right)$, concluyendo que T no posee inversa. $\blacksquare$

Álgebra Lineal
Lectura 20: Diagonalización de Matrices

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020, Rev. Agosto 2021

1. Matrices Similares

Del mismo modo que existen espacios vectoriales isomorfos entre sí, existen matrices que comparten ciertas características en común y que permiten simplificar operaciones de una en otra matriz (por ejemplo, la potenciación matricial). Este tipo especial de matrices, se llaman matrices similares.

> Dos matrices cuadradas de orden n, denominadas A y D, son similares si
>
> $$CD = AC$$
>
> donde la matriz C debe ser invertible para despejar a D.

Las propiedades de las matrices similares incluyen: determinantes iguales, trazas iguales y mismo polinomio característico, por lo que tendrán los mismos valores propios.

Un operador lineal puede tener matrices asociadas similares. Para determinar este tipo de matrices se necesitan los valores propios pues, como se mencionó, las matrices similares poseen el mismo polinomio característico. Tomando un operador lineal $T : U \to U$ y una base B de U, la cual está formada por vectores propios $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ asociados, respectivamente, a los valores propios $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, una matriz asociada a T puede obtenerse mediante las imágenes de los vectores propios:

$$T(\mathbf{u}_1) = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \qquad \Rightarrow \qquad [\lambda_1 \mathbf{u}_1]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$T(\mathbf{u}_n) = \lambda_n \mathbf{u}_n \qquad \Rightarrow \qquad [\lambda_n \mathbf{u}_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz asociada a T, referida a la base de vectores propios B es una matriz cuya diagonal contiene a cada uno de los valores característicos pertenecientes al operador lineal y asociados a la base en cuestión:

$$M_B^B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Si la base B existe, entonces la matriz asociada diagonal similar existe.

Ejemplo. Sea el operador lineal

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y \\ x+3y \end{bmatrix}$$

Determine si T posee una matriz asociada diagonal.

Sea la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$; a partir de ella se obtendrá una matriz asociada:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 2$ pues los vectores de B son vectores propios de T. La matriz asociada es una matriz diagonal:

$$M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En la matriz asociada diagonal se presentan los valores propios, pues la base B son dos de los vectores propios del operador T. Esta representación puede o no existir, dependiendo de los espacios característicos.

El orden de aparición de los valores se decide según el orden de la base: si el orden de la base es $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$, entonces los valores aparecerán en la matriz como $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$; si el orden es $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4, \cdots, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n$, los valores propios aparecerán como $\lambda_2, \lambda_4, \cdots, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$.

2. Diagonalización de Matrices

En el concepto de similaridad de matrices, C está formada con una base de vectores propios dispuestos en columna; en tanto, la matriz diagonal D contiene a los valores propios del operador lineal.

Un operador lineal $T : U \to U$ es diagonalizable, si existe una base B de U formada por vectores propios de T. La diagonalización se expresa como

$$D = C^{-1}AC$$

La diagonalización de operadores lineales, o de matrices en forma general, es una herramienta que permite la solución de diversos problemas. Dos ejemplos significativos son: 1) predicción de un instante determinado para un fenómeno a partir de ecuaciones en diferencias, cuando los eventos futuros requieren de información de eventos anteriores (como el crecimiento de una población) la diagonalización simplifica las operaciones matriciales para un cálculo más eficiente; 2) rotación de un sistema coordenado para el análisis de

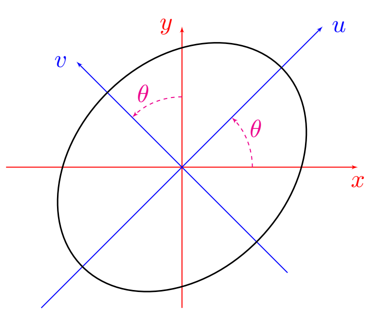

Figura 1. La rotación de ejes coordenados se logra mediante la diagonalización de una matriz simétrica que represente a la curva. Los vectores propios forman los nuevos ejes coordenados.

cónicas oblicuas, pues la diagonalización permite encontrar ecuaciones de las curvas en otro sistema de coordenadas que hacen más eficiente su análisis (véase la figura 1).

Ejemplo. Determine si la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable.

Primero se obtendrán los valores propios de la matriz:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)\left(\lambda^2-4\right) \\ 0 &= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) \\ \therefore \quad & \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Con los valores propios se obtendrán los espacios característicos:

Para $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Este espacio característico es $E(-2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$.

Para $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad z = x + y$$

$E(-2) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$ es el espacio característico de este valor.

Como el orden de la matriz es 3, entonces la base de vectores propios contiene tres elementos. Al computar las dimensiones de los espacios característicos se verifica la igualdad

$$\begin{gathered} \dim E(-2) + \dim E(2) = \dim B \\ 1 + 2 = 3 \end{gathered}$$

Esta igualdad indica que la matriz puede diagonalizarse; la matriz que diagonaliza a B está formada por la base que contiene a los vectores propios

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in E(-2) \\ \mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in E(2) \end{aligned}$$

Por lo que la matriz diagonalizadora es

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la comprobación

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

se observa que el orden de los valores propios es consistente con el orden que se dio a la base de vectores propios.

Como se mencionó anteriormente, no todas las matrices tienen una matriz similar diagonal. Las condiciones necesarias para que una matriz A sea diagonalizable son:

- los valores propios son diferentes entre sí.
- la suma de las dimensiones de los espacios característicos es igual al orden de la matriz.
- existe una base del espacio vectorial formada por vectores propios.

Las últimas dos condiciones son equivalentes, y al cumplir una se cumple la otra. Si se cumple la primera condición, implica que las demás se satisfacen. Por otro lado, las matrices simétricas o hermíticas son diagonalizables ortogonalmente, en tanto que las matrices escalares son diagonalizables por ser múltiplos de la matriz identidad.