# Álgebra Lineal
# Lectura 28: Adjunto de un Operador Lineal

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

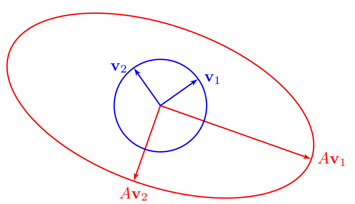


Figura 1. La descomposición en valores singulares es la extensión de la diagonalización a una matriz de orden $m \times n$, basada en el teorema espectral. Geométricamente, transforma una circunferencia en una elipse.

A lo largo del curso se han estudiado los espacios vectoriales, las transformaciones lineales y los productos internos. Estos elementos permiten describir el entorno de los conjuntos a partir de las operaciones de suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar. Esos conceptos resultarán de gran importancia al momento de plantear y definir los tipos especiales de operadores lineales y las últimas bases del álgebra matricial.

Un elemento central del Álgebra Lineal es estudiar la importancia del producto interno con los operadores lineales. Se recordará que un espacio vectorial $V$ con producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ permite establecer la métrica dentro del espacio vectorial, y que un operador lineal $T : V \to V$ permite transformar el espacio vectorial dentro de sí mismo. Si se mezclan esos conceptos en uno solo, se establece el operador adjunto que permite generalizar los conceptos de métrica de la transformación, conjugación-transposición, diagonalización de matrices hermíticas o conceptos más avanzados como la descomposición en valores singulares (fígura 1).

Sea el espacio vectorial $V$ donde se definen un operador lineal $T : V \to V$ y un producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Para $T$ se cumple que

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T^*(\mathbf{v}) \rangle$$

donde $T^*$ es el operador adjunto de $T$.

El operador adjunto se basa en la generalización de la matriz transpuesta-conjugada, y que permite establecer la relación entre el operador lineal y el producto interno en el espacio vectorial normado (con métrica).

Las propiedades de un operador adjunto son:

- ❏ $(S^*)^* = S$.
- ❏ Si $S$ tiene inverso, entonces $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$.
- ❏ $S^* + T^* = (S + T)^*$.
- ❏ $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$; $\overline{\alpha}$ es el conjugado de $\alpha$.
- ❏ $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

- Si $T^* = T$, se dice que el operador es autoadjunto.
- $M_B^B(T) = \left(\overline{\left[M_B^B(T^*)\right]}\right)^T$, donde se aplica la transposición-conjugación y $B$ es una base ortonormal bajo el producto interno definido.

Existen varias formas de obtener el operador adjunto; todas ellas están referidas al producto interno, y a una base ortonormal.

***Ejemplo***. Sean el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$ y el operador lineal

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z \\ -x+2y+z \\ -y+z \end{bmatrix}$$

Obtenga el operador adjunto de $F$

---

**Reducción e igualación**

Se basa en la definición del operador adjunto utilizando la aplicación del producto interno a la regla de correspondencia del operador. En este caso se considera que el adjunto es un operador genérico $F^*\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$.

$$\langle F(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, F^*(\mathbf{v})\rangle$$

$$\left\langle F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, F^*\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right\rangle$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} x-z \\ -x+2y+z \\ -y+z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}\right\rangle$$

$$(x-z)a + (-x+2y+z)b + (-y+z)c = xp + yq + zr$$

Al desarrollar el lado izquierdo de la última expresión se agrupan términos en $x$, $y$ y $z$.

$$\begin{aligned} xa - za - xb + 2yb + zb - yc + zc &= xp + yq + zr \\ x(a-b) + y(2b-c) + z(b-a+c) &= \end{aligned}$$

Al igualar término a término la parte izquierda con la derecha (según la variable factorizada) se obtienen las componentes del adjunto:

$$xp = x(a-b) \qquad yq = y(2b-c) \qquad zr = z(-a+b+c)$$

donde $p = a-b$, $q = 2b-c$ y $r = -a+b+c$. Finalmente, la regla de correspondencia del operador adjunto a $F$ es

$$\begin{aligned} F^*\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ F^*\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a-b \\ 2b-c \\ -a+b+c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Combinación lineal con base ortonormal**

Este método considera la definición del operador adjunto en conjunto con una de sus primitivas: la base ortonormal. El operador $F^*\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{w}$ puede expresarse como combinación lineal de los elementos de una base ortonormal, como por ejemplo la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\mathbf{w} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nótese que este proceso es proyectar el operador adjunto sobre la base ortonormal.

Al aplicar la definición de operador adjunto a cada uno de los sumandos, y considerando que $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = F^* \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, se pueden simplificar los términos y llegar al operador.

$$\begin{aligned} F^* \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \left\langle F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= (a-b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-a+3b}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{a+b-2c}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ésta última combinación lineal ya es el adjunto sin simplificar.

$$F^* \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -a+3b \\ -a+3b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ a+b-2c \\ -a-b+2c \end{bmatrix}$$

$$F^* \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ 2b-c \\ -a+b+c \end{bmatrix}$$

**Matriz Asociada al Operador**

En este caso se hace uso de la matriz asociada al operador lineal original, tomando como referencia una base ortonormal.

Para la base $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ la matriz asociada a $F$ se toma mediante las imágenes:

$$F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que la matriz asociada es

$$M_C^C(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

que al transponerla y conjugarla será la matriz asociada al adjunto.

$$M_C^C\left(F^*\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ 2b-c \\ -a+b+c \end{bmatrix}$$

Finalmente, se obtiene la regla de correspondencia del adjunto.

$$F^* \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ 2b-c \\ -a+b+c \end{bmatrix}$$

En los tres casos, la regla de correspondencia es la misma.

Se debe aclarar que, al igual que la norma y el ángulo entre vectores, si el producto interno cambia, entonces cambiará el adjunto. Independientemente de eso, un operador lineal $T$ solo posee un adjunto $T^*$ para cada producto interno definido.

# Álgebra Lineal
# Lectura 29: Operadores Normal y Autoadjunto

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

## 1. Operador Normal

Dentro de los operadores adjuntos existen algunos que son especiales por sus características, ya sea porque representan a un tipo especial de matriz, por la conservación de la norma bajo el producto interno o por la relación existente entre sus valores y vectores propios.

En el espacio vectorial $V$ se definen el operador lineal $T : V \to V$ y un producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. $T$ es un operador normal si

$$T \circ T^* = T^* \circ T$$

En términos de sus matrices asociadas

$$M_B^B(T)\, M_B^B(T^*) = M_B^B(T^*)\, M_B^B(T)$$

donde $B$ es una base ortonormal.

Así como el álgebra de transformaciones formaliza al álgebra matricial, y el operador adjunto a la conjugación-transposición, el operador normal permite establecer que puede existir la conmutación en la multiplicación matricial. En ciertos tipos especiales de matrices existe la conmutación en el producto matricial, lo cual se engloba en las matrices normales. Solo debe aclararse que la multiplicación matricial a tratar es entre una matriz y su conjugada-transpuesta. No debe confundirse el término normal para un operador con el término geométrico (perpendicular), ya que son dos conceptos totalmente diferentes.

Las propiedades del operador normal son:

- ❑ $\|T(\mathbf{v})\| = \|T^*(\mathbf{v})\|$.
- ❑ Si $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, entonces $T^*(\mathbf{v}) = \overline{\lambda}\mathbf{v}$, donde $\overline{\lambda}$ es el conjugado de $\lambda$.
- ❑ Si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son valores propios diferentes de $T$, entonces $E(\lambda_1)$ es ortogonal a $E(\lambda_2)$.

***Ejemplo***. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual. Determine si el operador lineal

$$F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad \Rightarrow \quad F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ix - (1+i)\,y \\ (1-i)\,x - 3iy \end{bmatrix}$$

es normal.

Una base ortonormal bajo el producto interno usual es $B = \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \right\}$, por lo tanto

$$F \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+i \end{bmatrix} \qquad F \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 3 \end{bmatrix}$$

Al expresar a cada imagen como combinación lineal de la base $B$, las matrices asociadas a $F$ y a su adjunto son

$$M_B^B(F) = \begin{bmatrix} -2i & -1-i \\ 1-i & -3i \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_B^B(F^*) = \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{bmatrix}$$

Al multiplicar ambas matrices en diferente orden, se corrobora si existe la conmutación.

$$\begin{aligned} M_B^B(F)\, M_B^B(F^*) &= \begin{bmatrix} -2i & -1-i \\ 1-i & -3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -5-5i \\ 5+5i & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_B^B(F^*)\, M_B^B(F) &= \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2i & -1-i \\ 1-i & -3i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -5-5i \\ 5+5i & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como la conmutación en la multiplicación de las matrices asociadas se cumple, el operador $F$ es normal.

Los operadores normales se dividen en diferentes tipos, los cuales se ajustan al tipo de matriz que poseen. El ejemplo recién trabajado es uno de esos tipos especiales: un operador antihermítico.

Los diferentes tipos de operadores pueden complementarse y trabajar juntos para definir conceptos como el teorema espectral, que hace uso de los llamados operadores ortogonales y operadores autoadjuntos.

# 2. Operador Autoadjunto

Un tipo de operadores lineales normales son los operadores autoadjuntos, los cuales permiten definir lo que es el teorema espectral.

Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno definido. El operador lineal $T : V \to V$ es autoadjunto si

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{v}) \rangle$$

***Ejemplo***. Determine si el operador lineal

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2x \end{bmatrix} \tag{1}$$

es autoadjunto bajo el producto interno

$$\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

---

Se determinará si $T$ es autoadjunto con la definición de adjunto.

$$\left\langle T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, T^* \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle$$

Tomando en cuenta que $T^* \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ la definición de adjunto se desarrolla a continuación.

$$\begin{bmatrix} y & 2x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2x+2y & 2x+y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y & x+y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$
$$2xa + 2ya + 2xb + yb = 2xm + ym + xn + yn$$

A ambos lados de la igualdad existen los términos comunes $x$ y $y$, los que permitirán plantear un sistema de ecuaciones para encontrar el adjunto.

$$2xa + 2ya + 2xb + yb = 2xm + ym + xn + yn$$
$$(2a+2b)\,x + (2a+b)\,y = (2m+n)\,x + (m+n)\,y$$

Por igualdad término a término se obtiene el sistema de ecuaciones

$$2a + 2b = 2m + n \tag{2}$$
$$2a + b = m + n \tag{3}$$

Al restar las ecuaciones (2) y (3) se obtiene $m$:

$$(2a+2b) - (2a+b) = (2m+n) - (m+n)$$
$$b = m$$

Y al sustituir $m = b$ en (3) se obtiene el adjunto completo.

$$2a + b = m + n$$
$$2a + b = b + n$$
$$2a = n$$

Por lo que el adjunto es

$$T^*\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

$$T^*\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \end{bmatrix}$$

Al comparar con (1) se observa que $T$ es autoadjunto.

# Álgebra Lineal
# Lectura 30: Tipos Especiales de Operadores

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

Los operadores lineales pueden clasificarse de acuerdo a la matriz asociada que posean, siempre referida a una base ortonormal. Un operador normal será:

- simétrico, si su matriz asociada es simétrica.
- antisimétrico, si su matriz asociada es antisimétrica.
- hermítico, si su matriz asociada es hermítica.
- antihermítico, si su matriz asociada es antihermítica.
- ortogonal, si su matriz asociada es ortogonal.
- unitario, si su matriz asociada es unitaria.

Todos los tipos especiales de operadores son normales, y esta naturaleza está condicionada al producto interno utilizado.

## 1. Operadores Hermíticos y Simétricos

Dentro de los tipos especiales de operadores lineales están aquéllos cuya matriz asociada no cambia cuando se transpone y conjuga. Este tipo de operadores se llaman simétricos y hermíticos, y cumplen con la definición de operador autoadjunto.

El operador lineal $T : V \to V$ es hermítico bajo el producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{v}) \rangle$$

donde la matriz asociada a $T$, referida a la base ortonormal $B$, cumple que

$$M_B^B(T) = \left[ M_B^B(T) \right]^*$$

Entonces, se concluye que un operador es hermítico si su matriz asociada es hermítica.

En general, los operadores hermíticos se definen sobre los números complejos. Cuando el operador lineal está definido en un espacio vectorial real, la conjugación definida por el adjunto es descartada y solo la transposición entra en acción. Esto quiere decir que las matrices simétricas son un caso particular de las matrices hermíticas. Hay que aclarar que una matriz simétrica con entradas complejas no representa a un operador lineal simétrico, ya que al tener elementos complejos forzosamente debe cumplir con la definición de operador hermítico. Por lo tanto, dicho caso de matrices no está asociada a un operador hermítico.

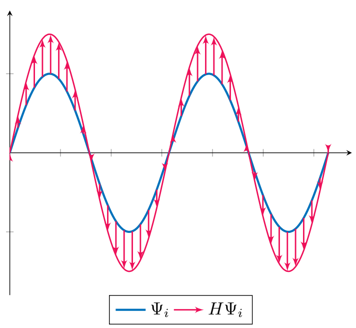


Figura 1. El operador hamiltoniano, $H\Psi_i = E_i\Psi_i$, obtiene el valor propio $E$ de la función propia $\Psi$, donde $\Psi$ representa el estado de un sistema y $E$ su energía.

Una de las propiedades más trascendentes de un operador hermítico son sus valores propios, los cuales siempre son reales. Para mostrar esto, tomando que $T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ y $T = T^*$, se aplica la definición de adjunto.

$$\begin{aligned}
\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle &= \langle \mathbf{u}, T^*(\mathbf{u})\rangle \\
\langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{u})\rangle \\
\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}\rangle \\
\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \overline{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \\
\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \overline{\lambda}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= 0 \\
\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= 0
\end{aligned}$$

Como la norma de un vector no puede ser nula, entonces la condición $\lambda - \overline{\lambda} = 0$ se cumple cuando $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que efectivamente, un operador hermítico solo posee valores propios reales.

***Ejemplo***. Bajo el producto interno usual en el espacio $\mathbb{R}^2$, determine si el operador lineal $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x+2y \\ 2x+4y \end{bmatrix}$ es hermítico.

---

La base ortonormal es $B = \left\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\right\}$, y al obtener sus imágenes bajo el operador se obtiene

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Las matrices asociadas a $T$ y a su adjunto son

$$M_B^B(T) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad M_B^B(T^*) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo se obtiene la misma matriz, por lo que el operador $T$ es hermítico, más específicamente, simétrico.

Un operador hermítico sumamente importante en la mecánica cuántica es el operador Hamiltoniano, definido como

$$\hat{H}\Psi_i = E_i\Psi_i$$

el cuál está asociado a la energía de un sistema, véase la figura 1.

# 2. Operadores Antihermíticos y Antisimétricos

De la misma forma que un operador lineal puede ser hermítico, existen operadores lineales cuya matriz asociada es antihermítica.

El operador lineal $T : V \to V$ es antihermítico bajo el producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ si

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, -T(\mathbf{v})\rangle$$

donde la matriz asociada a $T$, referida a la base ortonormal $B$, cumple que

$$M_B^B(T) = -\left[M_B^B(T)\right]^*$$

Cuando se trabaja en el campo real, las matrices antisimétricas son un caso especial de las matrices antihermíticas. Las matrices antisimétricas forzosamente deben tener entradas reales para representar a un operador antisimétrico.

***Ejemplo***. Determine si el operador lineal

$$F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad \Rightarrow \quad F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3ix + (1-i)\,y \\ (-1-i)\,x - 2iy \end{bmatrix}$$

es antihermítico bajo el producto escalar ordinario en $\mathbb{C}^2$.

---

Nuevamente, una base ortonormal es $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Las imágenes

$$F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3i \\ -1-i \end{bmatrix} \qquad F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i \\ -2i \end{bmatrix}$$

forman la matriz asociada a $F$ y la de su adjunto:

$$M_B^B(F) = \begin{bmatrix} 3i & 1-i \\ -1-i & -2i \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_B^B(F^*) = \begin{bmatrix} -3i & -1+i \\ 1+i & 2i \end{bmatrix}$$

Se observa que una matriz es la conjugada-transpuesta negativa de la otra, por lo que $F$ es un operador antihermítico.

## 3. Operadores Unitarios y Ortogonales

Cuando un operador normal incluye el concepto de transformación inversa, se presenta el caso de los operadores que satisfacen

$$T \circ T^* = T^* \circ T \quad \Rightarrow \quad I$$

Se habla de operadores unitarios y ortogonales.

Un operador lineal $T : V \to V$ es unitario bajo el producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

donde la matriz asociada a $T$, referida a la base ortonormal $B$, cumple que

$$\left[ M_B^B(T) \right]^{-1} = \left[ M_B^B(T) \right]^*$$

En términos de operadores lineales, si $T^* = T^{-1}$ entonces $T$ es un operador unitario. La diferencia entre operador unitario y ortogonal, nuevamente, es el campo de definición: $\mathbb{C}$ para un operador unitario, y $\mathbb{R}$ para uno ortogonal.

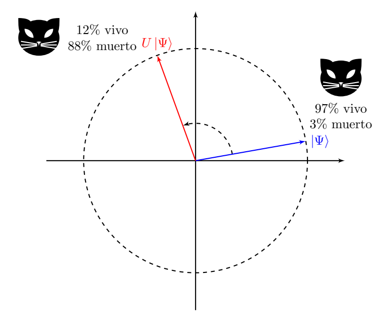


Figura 2. El ejemplo del gato de Schrödinger ilustra el estado superpuesto cuántico. Dicho estado debe tener norma unitaria, y solo los operadores unitarios pueden modificar el estado sin modificar la norma.

Una característica importante del operador unitario (u ortogonal) se presenta en las columnas de su matriz asociada: tomándolas como vectores, forman una base ortonormal. Es decir, si $B = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \cdots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$ es una base ortonormal, entonces

$$U = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{e}}_n \end{bmatrix}$$

es una matriz unitaria en el campo complejo (u ortogonal en $\mathbb{R}$).

Bajo este tipo de operadores yace uno de los problemas más conocidos de la mecánica cuántica: el gato de Schödinger (figura 2). Considerando que una partícula subatómica, por ejemplo el electrón, puede estar en una combinación lineal de estados

$$\alpha |a\rangle + \beta |b\rangle = |\psi\rangle$$

donde los escalares $\alpha$ y $\beta$ son números complejos, los sumandos son vectores normalizados y el resultado de la combinación lineal también debe estar normalizado. Si se requiere transformar el estado en el que se encuentra $|\psi\rangle$, debe conservarse la norma unitaria y eso solo es posible mediante un operador lineal unitario.

***Ejemplo***. Bajo el producto interno usual en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, determine si $G\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3x+4y \\ 4x+3y \\ 5z \end{bmatrix}$ es ortogonal.

---

Las imágenes de la base canónica bajo el operador lineal son

$$G\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz asociada y su transpuesta son:

$$M_B^B(G) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_B^B(G^*) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo se obtiene la misma matriz, pues el operador es autoadjunto (simétrico); puede decirse que además de ser ortogonal y simétrico, es un operador involutivo ($A = A^{-1}$).

Para verificar que efectivamente es ortogonal, se multiplicarán las matrices de $G$ y $G^*$.

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9+16 & -12+12 & 0 \\ -12+12 & 16+9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9+16 & -12+12 & 0 \\ -12+12 & 16+9 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$
$$= I$$

Nótese que existe ortogonalidad entre cada columna de la matriz asociada, y cada columna se encuentra normalizada.

# Álgebra Lineal
# Lectura 31: Descomposición Espectral

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

Dentro de los operadores normales, los hermíticos (o simétricos) representan un caso especial que permite comprender fenómenos físicos como las ondas.

Se ha estudiado que la diagonalización de matrices solo es posible cuando existe una base de vectores propios del espacio vectorial, y no todas las matrices cumplen con esta condición. En espacios de dimensión finita, un caso particular de la diagonalización son las matrices simétricas en el campo real, y las matrices hermíticas en el campo de los números complejos. La diagonalización para este par de tipos especiales de matrices se enuncia como el teorema espectral.

En el espacio vectorial $V$ con producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, la matriz hermítica $A$ es ortogonalmente diagonalizable; es decir

$$D = U^* A U$$

donde $U$ es una matriz unitaria.

Se denomina teorema espectral puesto que $A$ puede descomponerse en otras matrices (llamadas espectros) asociadas a cada uno de los vectores propios. Las propiedades del teorema son:

- $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \cdots + \lambda_n A_n$ (descomposición espectral).
- $I = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$.
- $\langle A_i, A_j \rangle = 0, \ \forall \ i \neq j$.

donde la matriz $A_i$ es la matriz de proyección ortogonal del vector genérico $\mathbf{v} \in V$ sobre el espacio característico $E(\lambda_i)$.

Debe hacerse hincapié en el hecho que este teorema solo es aplicable a matrices simétricas o hermíticas (o bien, operadores autoadjuntos) bajo una base ortonormal $B$. Las matrices espectro también serán simétricas o hermíticas, y pueden obtenerse a partir de la propia base $B$, ya que cada espectro se calcula en cada espacio característico.

Considerando que $B = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \cdots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$ es una base ortonormal de vectores propios de la matriz $A$, el teorema espectral también puede expresarse como la inversión de la diagonalización

$$A = UDU^* \tag{1}$$

donde $U$ es la matriz unitaria

$$U = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{e}}_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

y $D$ es la matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Al realizar la multiplicación matricial, sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene

$$\begin{aligned} A &= UDU^* \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{e}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^* \\ \hat{\mathbf{e}}_2^* \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{e}}_n^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\hat{\mathbf{e}}_1 & \lambda_2\hat{\mathbf{e}}_2 & \cdots & \lambda_n\hat{\mathbf{e}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^* \\ \hat{\mathbf{e}}_2^* \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{e}}_n^* \end{bmatrix} \\ A &= \lambda_1\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1^* + \lambda_2\hat{\mathbf{e}}_2\hat{\mathbf{e}}_2^* + \cdots + \lambda_n\hat{\mathbf{e}}_n\hat{\mathbf{e}}_n^* \end{aligned} \tag{4}$$

El producto $\hat{\mathbf{e}}_i\hat{\mathbf{e}}_i^*$ es una matriz cuadrada hermítica, la cual es la matriz proyección $A_i$.

En términos de operadores lineales, la descomposición espectral se representa mediante la combinación lineal

$$T(\mathbf{v}) = \lambda_1 \operatorname{Proy}_{E(\lambda_1)} \mathbf{v} + \lambda_2 \operatorname{Proy}_{E(\lambda_2)} \mathbf{v} + \cdots + \lambda_n \operatorname{Proy}_{E(\lambda_n)} \mathbf{v} \tag{5}$$

Para la expresión matricial (4) de la descomposición espectral se requiere una base ortonormal, en tanto que para la expresión en operadores lineales (5) solo requiere de una base ortogonal.

***Ejemplo***. Obtenga la descomposición espectral de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

Los valores y espacios característicos de $A$ son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$, por lo que cada espacio característico es

$$\begin{aligned} E(0) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -ix \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{C} \right\} \\ E(1) &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\} \\ E(2) &= \left\{ \begin{bmatrix} -iy \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \middle| y \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

Ahora, $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base ortonormal de vectores propios que permitirán encontrar las matrices de proyección.

$$\begin{aligned} A_1 &= \hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \end{bmatrix} \\ A_1 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1^* \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_3 &= \hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_1^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
A_3 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para calcular la descomposición espectral se multiplica cada valor propio por su respectiva matriz de proyección:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\lambda_1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\lambda_3}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{0}{2} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ésta es la descomposición espectral buscada.

En el caso de operadores lineales, se puede aplicar la proyección sobre los espacios característicos.

***Ejemplo***. Obtengas la descomposición espectral del operador lineal

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \end{bmatrix}$$

bajo el producto escalar ordinario.

---

En este caso los valores propios del operador son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$, donde sus respectivos espacios característicos son

$$\begin{aligned}
E(1) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \\
E(3) &= \left\{ \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Para obtener los operadores proyección, el vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ debe proyectarse sobre cada espacio característico. Las proyecciones son las siguientes:

$$\mathrm{Proy}_{E(1)}\, \mathbf{v} = \frac{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x + y \\ x + y \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Proy}_{E(3)}\, \mathbf{v} = \frac{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - y \\ -x + y \end{bmatrix}$$

Para obtener la descomposición, se arma la combinación lineal.

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\lambda_1}{2}\begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} + \frac{\lambda_2}{2}\begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \end{bmatrix}$$
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \end{bmatrix}$$

Por matrices se puede obtener la misma descomposición.

Muchos fenómenos físicos pueden descomponerse de manera que queden expresados como combinación lineal de sus componentes más básicas. La figura 1 muestra la descomposición de ondas acústicas y la figura 2 la descomposición para ondas ópticas, las cuales al combinarse linealmente crean el sonido y la luz blanca que percibimos. Éste análisis de los espectros de ondas es posible debido al análisis de Fourier, que está fundamentado en la base $B = \{\sin kt, \cos kt\}$ ortogonal bajo el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(t)\, g(t)\, dt$$

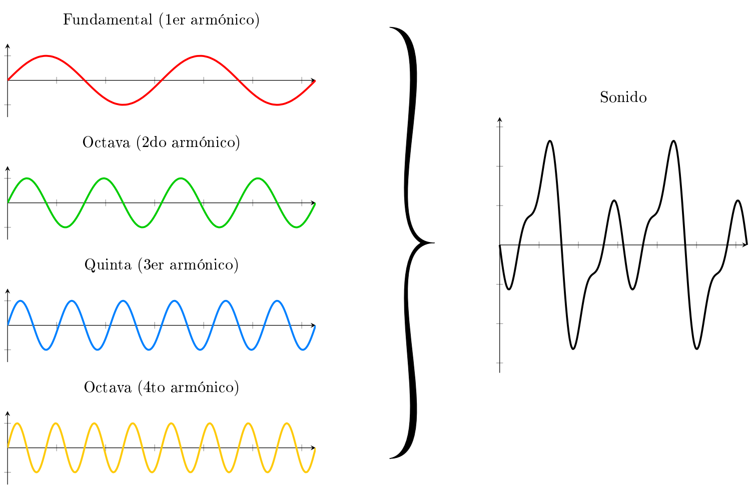


Figura 1. Un sonido puede descomponerse en diferentes ondas, llamadas armónicos, y es lo que da origen a las notas musicales.

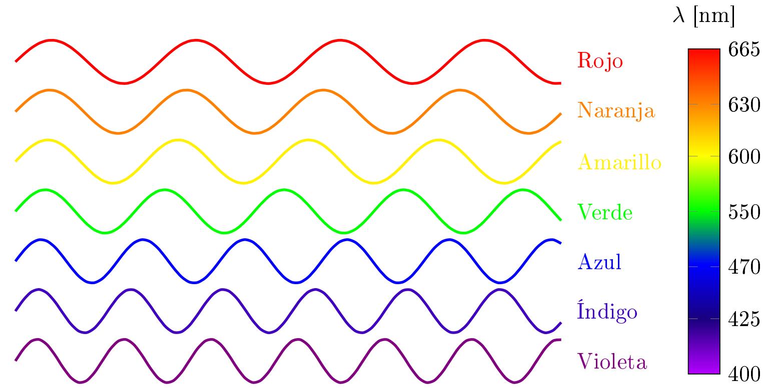


Figura 2. El espectro visible de la luz, tiene cada color asociado a un valor propio. Mediante combinación lineal, se obtiene la onda electromagnética completa.

Estos problemas requieren descomposición de ondas: en astrofísica y astronomía se analiza la composición de planetas o estrellas mediante luz en elementos; en geología y geofísica, los espectros de ondas pueden atravesar el suelo y ser absorbidas o no por los materiales del subsuelo, para saber qué se está atravesando. Estos problemas plantean el teorema espectral en espacios de dimensión infinita.

Figura 3. La descomposición en valores singulares extiende la descomposición espectral, y permite comprimir una imagen con los valores singulares $\sigma$. La imagen de la perrita a la derecha posee menos valores $\sigma$ (está más comprimida) y pierde nitidez.

Incluso una imagen puede comprimirse mediante descomposición espectral para matrices rectangulares. Este problema se conoce como descomposición en valores singulares, donde una imagen cualquiera posee valores singulares $\sigma$ tales que $\sigma = \sqrt{\lambda}$ (raíz de valores propios). Los valores singulares poseen información de la imagen, y si se descartan algunos, se podrá comprimir una imagen pero perderá nitidez (véase la figura 3).

# Álgebra Lineal
# Lectura 32: Aplicación a las Formas Cuadráticas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Enero 2020

## 1. Forma Cuadrática

Una forma cuadrática es una expresión que permite definir elementos geométricos (cónicas o superficies), algebraicos (matrices definidas positivas o negativas), lineales (producto interno) o funcionales (máximos y mínimos).

Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es una función escalar de variable vectorial en la cual todos sus términos no independientes tienen grado dos, y está definida como

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^T A \mathbf{p}$$

donde $A$ es una matriz simétrica y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

Con esta definición, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la matriz simétrica $A$ la forma cuadrática $f$ puede expandirse como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) &= \mathbf{p}^T A \mathbf{p} \\ f(x, y) &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ b & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ f(x, y) &= \begin{bmatrix} Ax + by & bx + Cy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ f(x, y) &= Ax^2 + 2bxy + Cy^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

El coeficiente con término mixto en (1) puede reemplazarse mediante el cambio $2b = B$. De esta forma, la expresión (1) es

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \qquad (2)$$

En Geometría Analítica, la expresión (2) se conoce como la parte cuadrática de la ecuación general de segundo grado para dos variables. Entonces, parte de la ecuación general de segundo grado es una forma cuadrática, que siempre tendrá una representación matricial mediante una matriz simétrica. Los coeficientes con términos mixtos son los valores de los triángulos de la matriz multiplicados por dos, y los coeficientes cuadráticos puros son los elementos de la diagonal principal.

A continuación se analizarán dos casos de aplicación en las formas cuadráticas: la rotación de ejes coordenados y los tipos de matrices simétricas (o hermíticas) que pueden presentarse. Éste último tema es fundamental para el estudio de máximos y mínimos en Cálculo Multivariable.

## 2. Rotación de Ejes Coordenados

Ya que una forma cuadrática tiene una matriz simétrica asociada, ésta última está sujeta al teorema espectral, y por lo tanto es diagonalizable. La matriz simétrica $A$ de la forma cuadrática

$$f(\mathbf{m}) = \mathbf{m}^T A\mathbf{m} \tag{3}$$

es diagonalizable mediante la matriz ortogonal $U$. Al sustituir la diagonalización $A = UDU^T$ en (3), la forma cuadrática toma una representación donde solo hay coeficientes en la diagonal principal:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{m}) &= \mathbf{m}^T A\mathbf{m} \\ f(\mathbf{m}) &= \mathbf{m}^T UDU^T\mathbf{m} \end{aligned} \tag{4}$$

Los productos de $\mathbf{m}$ y $U$ se agrupan, y por propiedades de la transposición matricial, (4) se reescribe como

$$\begin{aligned} f(\mathbf{m}) &= \mathbf{m}^T UDU^T\mathbf{m} \\ &= \left(\mathbf{m}^T U\right) D \left(U^T\mathbf{m}\right) \\ f(\mathbf{m}) &= \left(U^T\mathbf{m}\right)^T D \left(U^T\mathbf{m}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

El producto $U^T\mathbf{m}$ en (5) puede sustituirse por el vector $\mathbf{n}$ para que la forma cuadrática dependa de él:

$$f(\mathbf{n}) = \mathbf{n}^T D\mathbf{n} \tag{6}$$

El cambio vectorial $U^T\mathbf{m} = \mathbf{n}$ es un cambio de coordenadas mediante una matriz de transición. El vector $\mathbf{m}$ en la forma cuadrática de (3) está referido a la base canónica, en tanto que $\mathbf{n}$ está referido a la base ortonormal de vectores propios que forman la matriz $U$.

Desde el punto de vista geométrico, la forma cuadrática (3) representa una elipse o una hipérbola con centro en el origen; si estuvieran presentes los coeficientes lineales, puede además representar a una parábola.

Se sabe que una cónica (o superficie cónica) con términos mixtos presentes se encuentra en una posición oblicua al sistema coordenado $xy$. Esto hace muy difícil su identificación, y es necesario rotar el sistema coordenado para analizar el lugar geométrico.

A pesar que (3) y (6) son diferentes entre sí, representan al mismo lugar geométrico (la misma cónica, o superficie cónica) pero ubicado en diferente sistema de referencia (diferente base). Es decir, el proceso de diagonalización de la forma cuadrática ha rotado el sistema coordenado $xy$ y lo ha convertido en el sistema $uv$. Debe aclararse que el nuevo sistema de coordenadas tiene ejes ortogonales (debido al teorema espectral) y éstos se alinean a los ejes de la cónica.

***Ejemplo***. Sea la curva $C$ representada por la ecuación

$$C: \qquad 7x^2 + 48xy - 7y^2 = 1$$

Obtenga una ecuación de $C$ sin el término mixto.

---

La figura 1 muestra la curva representada por la ecuación $C$.

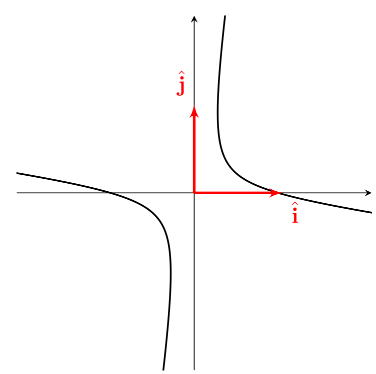


Figura 1

La ecuación de $C$ en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 24 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

de la cual, sus valores propios son $\lambda_1 = 25$ y $\lambda_2 = -25$; los respectivos espacios característicos son:

$$E(25) = \left\{ \begin{bmatrix} 4x \\ 3x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$
$$E(-25) = \left\{ \begin{bmatrix} -3y \\ 4y \end{bmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$$

La base ortonormal $B = \left\{ \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ está formada por vectores propios. A pesar que no se indica el sentido de giro o si el sistema $uv$ es izquierdo o derecho, se seleccionaron los vectores mencionados para asegurar que $uv$ es el sistema $xy$ rotado en sentido antihorario. Para encontrar la ecuación pedida, la diagonalización se aplica mediante la matriz ortogonal

$$U = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

La ecuación buscada es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 1 \\ \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 75 \\ -75 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= 1 \\ \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= 1 \\ 25u^2 - 25v^2 &= 1 \end{aligned}$$

cuya gráfica en el sistema $uv$ se muestra en la figura 2.

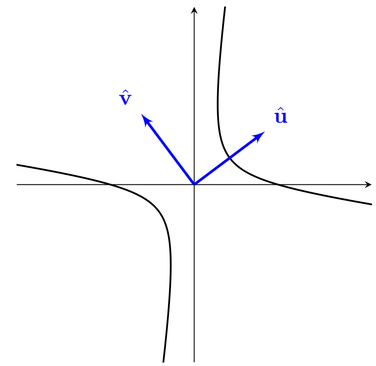


Figura 2

Se recuerda que $U^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ es un cambio de coordenadas por matriz de transición del sistema $xy$ al sistema $uv$.

La curva es una hipérbola equilátera, con longitud de semiejes igual a $\frac{1}{5}$. Nótese que los valores propios indican la longitud de los semiejes, así como el tipo de cónica: valores propios con signos contrarios indican una hipérbola; valores propios con mismo signo una elipse o ningún lugar geométrico.

# 3. Matrices Definidas

Las matrices simétricas y hermíticas pueden clasificarse de acuerdo a la naturaleza de sus valores propios. Esta clasificación permite aprovechar propiedades de las matrices fuera del álgebra lineal como lo es en Geometría Analítica y Cálculo Multivariable. Incluso, estas matrices pueden tener aplicaciones hacia el producto interno, que redundantemente permite definirles con el teorema espectral.

Una matriz $A$ hermítica (o simétrica) de orden $n$ es definida positiva si $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ (o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) no nulo se satisface que $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} > 0$; es decir, $A$ define un producto interno en $\mathbb{C}^n$ (o $\mathbb{R}^n$).

Las propiedades de las matrices definidas positivas son:

- sus valores propios siempre son positivos.
- su determinante siempre es positivo.
- sus menores principales siempre son positivos.

Una matriz $A$ hermítica (o simétrica) de orden $n$ es definida negativa si $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ (o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) no nulo se satisface que $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} < 0$.

Para una matriz definida negativa se cumple que:

- sus valores propios siempre son negativos.
- su determinante es negativo si el orden de la matriz es impar y es positivo si el orden es par.
- sus menores principales alternan signos positivos y negativos.

Una matriz $A$ hermítica (o simétrica) de orden $n$ es semidefinida positiva si $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ (o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) no nulo se satisface que $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} \geq 0$; $A$ será semidefinida negativa si $\mathbf{x}^* A\mathbf{x} \leq 0$.

Estas matrices satisfacen las propiedades siguientes:

- al menos uno de los valores propios es nulo, y el resto tienen el mismo signo.
- su determinante siempre es cero.
- no poseen inversa.

Una matriz $A$ hermítica (o simétrica) de orden $n$ es indefinida si no es definida positiva ni definida negativa.

Las propiedades son:

- sus valores característicos son positivos y negativos.
- su determinante siempre es diferente de cero.

***Ejemplo***. Sean las matrices simétricas

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine su naturaleza.

---

Se calcularán los valores propios de cada matriz y se dictaminará qué tipo de matriz simétrica es cada una.

Para $A$:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 21 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 7$$

Para $B$:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 7 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -7$$

Para $C$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

Se concluye que $A$ es una matriz definida positiva (valores propios positivos), $B$ es definida negativa (valores propios negativos) y $C$ es indefinida (un valor propio positivo y otro negativo). Si un valor propio de $A$ o $B$ hubiese sido nulo, entonces dichas matrices se convertirían en semidefinidas.

Una aplicación importante de las matrices definidas es en problemas de máximos y mínimos del Cálculo Multivariable. Considerando que las funciones del tipo $f(x, y)$ son superficies, entonces los puntos máximos y mínimos se alcanzarán cuando la superficie parezca una cúpula o bien parezca un tazón. Sin embargo, no son los únicos tipos de puntos extremos ya que al recorrer a lo largo de dos direcciones independientes, por una se puede llegar a un máximo y por la otra a un mínimo; este tipo de punto se conoce como punto silla, al guardar parecido con una silla para montar a caballo. La figura 3 muestra la geometría de los puntos extremos

Las matrices definidas aparecen al evaluar una matriz de segundas derivadas parciales de la función $f(x, y)$ llamada matriz Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

El criterio indica que habrá un máximo si $H$ es definida negativa, un mínimo si $H$ es definida positiva y un punto silla si $H$ es indefinida. Este concepto formaliza el criterio de la segunda derivada, que es caso de estudio de funciones multivariable en Cálculo Vectorial.

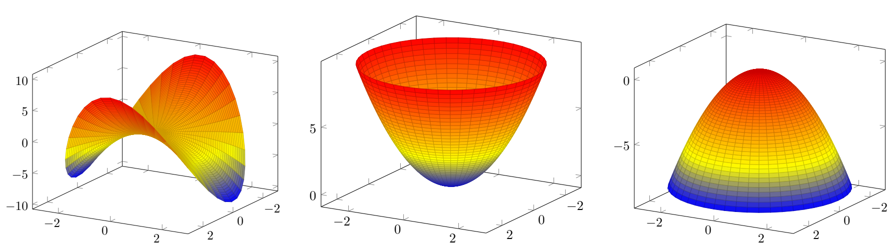

Figura 3. Las matrices definidas se utilizan para conocer puntos silla (izquierda), mínimos (centro) y máximos (derecha) en Cálculo Multivariable.