



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
ÁLGEBRA LINEAL
SERIE 1
GRUPOS Y CAMPOS



1. Sea el sistema $(\mathbb{N}, *)$, donde \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales y $a*b = a + 2b + 1 \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$
¿Cuál es el resultado de $2*(1*(3*2))$?

2. Sea el conjunto $\{m, n, p, r\}$ y la operación binaria $*$ definida por la siguiente tabla

$*$	m	n	p	r
m	p	r	m	n
n	r	m	n	p
p	m	n	p	r
r	n	p	r	m

Determinar el elemento inverso de n .

3. Sean el conjunto $G = \{a, b\}$ y Δ la operación binaria en G definida por

Δ	a	b
a	a	b
b	b	a

Determinar si el sistema algebraico (G, Δ) cumple con asociatividad.

4. Sea el conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$ y las operaciones binarias \oplus y \odot definida por:

\oplus	-1	0	1
-1	-1	0	1
0	0	1	-1
1	1	-1	0

\odot	-1	0	1
-1	-1	-1	-1
0	-1	0	1
1	-1	1	1

Determinar:

- El elemento idéntico para la operación \oplus y para la operación \odot
- El elemento inverso para cada elemento de A respecto a la operación \oplus
- Calcular la operación $(-1 \oplus (-1)) \oplus (1 \oplus 0)$

5. Sea el conjunto M matrices cuadradas de orden 2 de la forma

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

y la operación binaria Δ tal que

$$A \Delta B = A + B + I$$

donde $A, B \in M$ e I es la matriz identidad de orden 2.

Determinar para el sistema (M, Δ)

- Si la operación Δ en el conjunto M es asociativa
- El elemento idéntico
- Los elementos inversos

6. Sean el conjunto $B = \{e^v \mid v \in \mathbb{Z}\}$ y la operación $*$ definida como:

$$e^{v_1} * e^{v_2} = e^{v_1 + v_2}$$

Demostrar que el sistema $(B, *)$ tiene estructura de grupo.

7. Sea el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} y la operación binaria

$$p * q = p + q + 2$$

Determinar si $(\mathbb{Z}, *)$ es un grupo.

8. Sea \mathbb{Z} el conjunto de los enteros y $*$ la operación definida por

$$a * b = a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Determinar si el sistema $(\mathbb{Z}, *)$ tiene estructura de grupo. En caso afirmativo, obtener el inverso de 5. En caso negativo indicar todos los axiomas que no se satisfacen.

9. Sean el conjunto de funciones reales de variable real $M = \{f, g, h\}$ cuyas reglas de correspondencia son

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad g(x) = \frac{x-1}{x} \quad h(x) = x$$

y la operación \circ en M definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

a) Completar la siguiente tabla para la operación \circ

\circ	f	g	h
f		h	
g	h	f	
h			h

b) Considerando que \circ es asociativa, determinar si (M, \circ) es un grupo. Si lo es, obtener su elemento idéntico. En caso negativo, indicar todos los axiomas que no se satisfacen.

10. El sistema (\mathbb{R}, \oplus) tiene estructura de grupo abeliano. Determinar el elemento idéntico y a partir de éste obtener el elemento inverso de 5, si la operación está definida por:

$$a \oplus b = a + b + 1; \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

11. Sea el sistema $(A, +)$ donde $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ y $+$ es la adición usual en las matrices, determinar si A es grupo abeliano.

12. Dado el conjunto $A = \{u, a, b\}$ donde estos tres elementos son distintos y u es el elemento idéntico con respecto a la operación $*$. Complete la siguiente tabla para que $(A, *)$ sea un grupo abeliano.

*	u	a	b
u			
a		b	
b			a

13. Sean el conjunto $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \neq -1\}$ y la operación binaria $*$ definida como:

$$a * b = a + b + ab; \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}$$

Determinar si el sistema $(A, *)$ es un grupo abeliano, de cumplirse lo anterior, obtener el elemento inverso del número 2.

14. Sea el sistema (G, \oplus) donde $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ y la operación \oplus está definida como:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

Determinar si el sistema (G, \oplus) es un grupo abeliano.

15. Sea el conjunto $(S, *)$ una estructura de grupo abeliano, $S = \{a, b, c, d\}$ y la operación binaria definida por la siguiente tabla

*	a	b	c	d
a	d	c	a	b
b	c	d	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

Efectuar la operación $a * e * (\hat{c} * b)$ donde e es el idéntico del grupo $(S, *)$ y \hat{c} es el inverso de c .

16. Sean el conjunto $H = \{(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)\}$ y la operación $*$ definida por

$$(a,b)*(m,n) = (am,bn) \quad \forall (a,b), (m,n) \in H.$$

Determinar si el sistema $(H,*)$ es un grupo abeliano, tomando en cuenta que $*$ es asociativa en H .

17. Sea el sistema $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$, determinar si tiene estructura de campo, las operaciones están definidas por:

$$a \oplus b = a + b + 1, \quad a \otimes b = a + b + ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

18. Sea el conjunto $E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y la operación binaria $*$ definida como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & cz \end{bmatrix}, \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \in E$$

Determinar si el sistema $(E,*)$ tiene estructura de grupo abeliano.

19. Sea el sistema $(A, \Delta, *)$, donde $A = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y las operaciones definidas de la siguiente manera:

$$(a,b) \Delta (c,d) = (ac, bd)$$

$$(a,b) * (c,d) = (a+c, b+d)$$

Determinar si A es campo.

20. Sean el conjunto $F = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ y las operaciones \oplus, \otimes definidas por

$$(x,y) \oplus (m,n) = (x+m, y+n)$$

$$(x,y) \otimes (m,n) = (0, yn) \quad \forall (x,y), (m,n) \in F$$

Considerando que el sistema (F, \oplus) es un grupo, determinar si el sistema (F, \oplus, \otimes) es un campo.

En caso negativo, indicar los axiomas que no se satisfacen.

Soluciones

1. 39
2. Elemento inverso de n : r
3. El sistema algebraico (G, Δ) cumple con asociatividad
4. a) Elemento idéntico para la operación \oplus : -1
Elemento idéntico para la operación \odot : 0
- b) Elementos inversos para la operación \oplus :
Elemento inverso de -1 : -1
Elemento inverso de 0 : 1
Elemento inverso de 1 : 0
- c) -1
5. a) El sistema algebraico (M, Δ) cumple con asociatividad
- b) Elemento idéntico: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- c) Elementos inversos: $\begin{pmatrix} -a-2 & 0 \\ 0 & -b-2 \end{pmatrix}$
6. El sistema algebraico $(B, *)$ es un grupo
7. El sistema algebraico $(\mathbb{Z}, *)$ es un grupo
8. El sistema algebraico $(\mathbb{Z}, *)$ no es un grupo.

No se cumplen los axiomas:
Existencia de elemento idéntico
Existencia de elementos inversos

9. a)

\circ	f	g	h
f	g	h	f
g	h	f	g
h	f	g	h

b) Elemento idéntico: h

El sistema algebraico (M, \circ) es un grupo

10. Elemento idéntico: -1
Elemento inverso de 5 : -7
11. El sistema algebraico $(A, +)$ es un grupo abeliano

12.

$*$	u	a	b
u	u	a	b
a	a	b	u
b	b	u	a

13. El sistema algebraico $(A, *)$ es un grupo abeliano

Elemento inverso de 2 : $-\frac{2}{3}$

14. El sistema algebraico (G, \oplus) no es un grupo abeliano
15. c
16. El sistema algebraico $(H, *)$ es un grupo abeliano

17. El sistema algebraico $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ es un campo
18. El sistema algebraico $(E, *)$ no es un grupo abeliano
19. El sistema algebraico $(A, \Delta, *)$ no es un campo
20. El sistema algebraico (F, \oplus, \otimes) no es un campo

Axiomas que no se cumplen para la operación \otimes :

Existencia de elemento idéntico

Existencia de elementos inversos

Prop. Depto. Álgebra Lineal. FI. UNAM