UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA LINEAL

SERIE 2

ESPACIOS VECTORIALES

---

1. Sean V el conjunto de los números reales y las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas por:

$$x+y=x+y \qquad \forall x,y\in V$$
$$kx=2kx \qquad \forall x\in V,\ k\in\mathbb{R}$$

Determinar si V es un espacio vectorial real. En caso afirmativo obtener el elemento inverso de $x=8$. En caso negativo indicar todos los axiomas que no se satisfacen.

---

2. Determinar si el conjunto $V=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0\}$ con las operaciones definidas por

$$(a,b)\oplus(c,d)=(ad+bc,bd) \qquad \forall (a,b),(c,d)\in V$$
$$\alpha(a,b)=(\alpha a,b) \qquad \forall \alpha\in\mathbb{R}$$

es un espacio vectorial real, considerando que se cumplen las siguientes propiedades:

$$i)\ \bar{u}\oplus(\bar{v}\oplus\bar{w})=(\bar{u}\oplus\bar{v})\oplus\bar{w}$$
$$ii)\ \bar{u}\oplus\bar{v}=\bar{v}\oplus\bar{u} \qquad \forall \bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V;\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$$
$$iii)\ \alpha(\bar{u}\oplus\bar{v})=\alpha\bar{u}\oplus\alpha\bar{v}$$

---

3. Sean el espacio vectorial real $P_2=\{ax^2+bx+c\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y $D=\{p(x)\,|\,p(0)=3\}$ un subconjunto de P_2. Determinar si D es un subespacio de P_2.

---

4. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y $H=\{(x,y,z)\,|\,3x-y+2z=0;\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Determinar si H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

---

5. Sean los conjuntos $A=\{(a,b,c)\,|\,b=c;\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y $B=\{(a,b,c)\,|\,a=2b;\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$. Determinar si $A\cap B$ es un subespacio del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.

6. Dado el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$, determinar si la función $F:\mathbb{C}^3 \to M_3$ con regla de correspondencia

$$F(a,b,c)=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

donde M_3 es el espacio de matrices diagonales de 3x3 con elementos complejos, es un isomorfismo.

---

7. Sean el espacio vectorial real $V=\left\{ax^2+bx+2a-b \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$ y el conjunto $E=\left\{2x^2+x+3,\ x^2+2\right\}$. Determinar si E es una base de V.

---

8. El espacio W es generado por el conjunto $\left\{x^2+7x+4,\ -2x^2-8x-5,\ 3x^2+9x+6\right\}$, determinar una base y la dimensión de W.

---

9. Sea el conjunto $J=\left\{1+3x,\ x+3x^2,\ 1+mx^2\right\}$. Determinar el conjunto S de valores de $m\in\mathbb{R}$ para que el espacio generado por J sea de dimensión 2.

---

10. Sean $A=\left\{xe^x,\ e^x\right\}$ y $B=\left\{xe^x+e^x,\ -3e^x\right\}$ bases del espacio vectorial U.

Determinar:

a) La matriz de transición de la base A a la base B.

b) El vector $f(x)\in U$ cuyo vector de coordenadas respecto a la base B es $\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

---

11. Sea V el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual a dos, unas de cuyas bases son $E=\left\{x^2,\ x^2+x,\ x^2+x+1\right\}$ y $F=\left\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3\right\}$. La matriz de transición de la base E a la base F es

$$M_F^E=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

y el vector de coordenadas del vector $\bar{v}\in V$ respecto a la base F es $\left[\bar{v}\right]_F=\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 7\end{pmatrix}$.

Determinar:

a) Los vectores de la base F.

b) El vector de coordenadas de $\bar{v}$ respecto a la base E.

---

12. El espacio renglón de la matriz $H=\begin{bmatrix}m & 2 & 3\\ n & 3 & 5\\ r & 2 & 5\end{bmatrix}$ es $L\left(H_r\right)=\left\{\left(a,b,a+b\right)\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$

Determinar:

a) El valor de cada uno de los elementos m, n y r.

b) Con los valores obtenidos en el inciso anterior, determinar el espacio columna de H.

c) Obtenga el rango de H.

---

13. Si el rango de $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -5 & 9\\ 1 & -1 & -3 & 3\\ 2 & 0 & -2 & k\end{bmatrix}$ es igual a 2, determinar:

a) El valor de k.

b) Una base del espacio renglón de A.

---

14. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+2y-7z&=0\\ -2y+10z&=0\\ -2x+3y+\alpha z&=0\end{aligned}$$

obtener su matriz de coeficientes y determinar el conjunto de valores de $\alpha\in\mathbb{R}$, tal que:

a) El espacio columna de la matriz de coeficientes sea de dimensión 3.

b) Una base del espacio solución del sistema sea $B=\left\{\left(-3,5,1\right)\right\}$.

15. Determinar cuáles de los siguientes vectores pertenecen al espacio columna de la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 3 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1+\sqrt{3}\\ -4\\ 6\sqrt{7}\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}6\\ \sqrt{13}\\ \sqrt{5}\end{bmatrix}$

---

16. Sea la matriz $M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 5 & 3\\ 3 & 5 & 9 & 5\end{bmatrix}$. Determinar:

a) Una base del espacio columna de M.
b) El rango de M.

---

17. Determinar si el conjunto $J=\{f,g\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente en cada uno de los intervalos: $[-5,2)$, $[0,5]$ y $[2,7)$; si f y g son

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-6 & \text{para } x\le 2\\ e^{2x} & \text{para } x>2\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}x^2-2 & \text{para } x\le 2\\ 5e^{2x} & \text{para } x>2\end{cases}$$

---

18. Determinar si el conjunto $H=\left\{1,\ \ln(x),\ \ln\left(x^2\right)\right\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente.

---

19. Determinar si el conjunto $F=\{h,k\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente en cada uno de los intervalos $[-5,2)$, $[0,5]$ y $[2,7)$; si h y k son

$$h(x)=\begin{cases}sen2x & \text{para } x\le 2\\ 2x^3+4x & \text{para } x>2\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}3sen2x & \text{para } x\le 2\\ x^3+2x & \text{para } x>2\end{cases}$$

---

20. Determinar si el conjunto $D=\left\{sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right), sen^2x\cos x\right\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente, en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

RESPUESTAS

1) V no es un espacio vectorial.

No se cumple el axioma: $1 \in \mathbb{R}, x \in V : 1x = x \ \forall x \in V$

2) V no es un espacio vectorial.

No se cumple el axioma: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \bar{u} \in V : (\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} \oplus \beta\bar{u}$

3) D no es un subespacio de P_2.

Ningún axioma de la definición de subespacio se cumple.

4) H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

5) $A \cap B$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

6) F es un isomorfismo.

7) E es una base de V.

8) Una base de W es $\left\{ x^2 + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \right\}$

$\dim W = 2$

9) $S = \{-9\}$

10) a) $M_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$b)$ $f(x) = -2xe^x - e^x$

11) a) $\{x^2, x, 1\}$

$b) [\bar{v}]_E = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$

12) a) $m = 1,\ n = 2,\ r = 3$

$b) L(H_c) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -5a + 4b \end{pmatrix}$

$c) R(H) = 2$

13) a) $k = 6$

$b)$ Base $= \{(1,0,5,3), (0,1,2,0)\}$

14) a) $\{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -21\}$

$b)\{-21\}$

15) a) $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \in L(A_c)$, $b)\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -4 \\ 6\sqrt{7} \end{pmatrix} \in L(A_c)$, $c)\begin{pmatrix} 6 \\ \sqrt{13} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \in L(A_c)$

16) a) Base de $L(M_c) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$b)\, R(M) = 2$

17) J es linealmente dependiente en el intervalo $[-5, 2)$.

J es linealmente independiente en el intervalo $[0, 5]$.

J es linealmente dependiente en el intervalo $[2, 7)$.

18) H es linealmente dependiente.

19) F es linealmente dependiente en el intervalo $[-5, 2)$.

F es linealmente independiente en el intervalo $[0, 5]$.

F es linealmente dependiente en el intervalo $[2, 7)$.

20) H es linealmente independiente.