UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA LINEAL

SERIE 3

TRANSFORMACIONES LINEALES

---

1. Sean el espacio vectorial real $P=\left\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ y $D:P\to P$ la transformación cuya regla de correspondencia es

$$D\left(p\left(x\right)\right)=\frac{dp\left(x\right)}{dx}\qquad \forall p\left(x\right)\in P$$

Determinar:

a) Si D es una transformación lineal
b) El núcleo de D
c) El recorrido de D
d) Si existe, la inversa de D

---

2. Sea P_1 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales. La matriz asociada a la transformación lineal $T:P_1\to\mathbb{R}^3$ referida a las bases $A=\left\{2x+1,\ -x+1\right\}$ y $B=\left\{(0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1)\right\}$ es

$$M_B^A(T)=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 4 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

Obtener:

a) La regla de correspondencia de T.
b) El núcleo y el recorrido de T.

---

3. Sea el espacio vectorial real $P=\left\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ y la transformación lineal $F:P\to P$ cuya regla de correspondencia es:

$$F\left(ax^2+bx+c\right)=\left(a+2b\right)x^2+\left(a+c\right)x+\left(2b-c\right)$$

a) Determinar el núcleo de F y la dimensión de $N\left(F\right)$
b) El recorrido de F.

4. Sea el operador $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es

$$F(a,b) = (a+b+1,\ a-b)$$

Determinar:

a) Si el operador F es lineal
b) Obtener el núcleo del operador F
c) ¿El núcleo de F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$? Justifique su respuesta

---

5. Sea el espacio vectorial real $P = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \to P$ tal que:

$$T(1,2) = 2x^2 - x + 1$$
$$T(2,1) = x^2 + x + 2$$

Determinar la regla de correspondencia de T.

---

6. Sean P_1 el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales y $T:P_1 \to P_1$ una transformación lineal en P_1. Si el vector $\bar{m} = 1 + x$ pertenece al núcleo de T y $T(1-x) = x+1$
Determinar:
a) La regla de correspondencia de T
b) Una matriz asociada a T
c) Si existe, la transformación inversa de T

---

7. Sea $M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T:D \to P_2$ donde D y P_2 son los espacios reales

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} m & 2m & r \\ m+r & m-r & 3r \end{bmatrix} \middle| m, r \in \mathbb{R} \right\}; \quad P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

Referida a la base $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \right\}$ y a la base $B = \{x^2,\ x+1, -1\}$

Obtener

a) La regla de transformación T,
b) La imagen de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ bajo la transformación T,
c) El recorrido $T(D)$ y una base de éste.

8. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal donde:

$$T(1,0,0)=(2,3) \qquad T(0,1,0)=(-1,2) \qquad T(0,0,1)=(1,2)$$

Determinar la matriz asociada a la transformación T referida a las bases

$$A=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\} \text{ y } B=\{(1,1),(0,1)\}$$

---

9. Sean las transformaciones lineales $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $U:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuyas reglas de correspondencia son

$$T(a,b)=(2a,\ 4b-a) \text{ y } U(a,b)=(b,a)$$

Determinar si $(T\circ U)(1,1)=(U\circ T)(1,1)$.

---

10. Sean el espacio vectorial real $P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y las transformaciones lineales $T:\mathbb{R}^3 \to P_2$ y $S:\mathbb{R}^3 \to P_2$ cuyas matrices asociadas respecto a las bases $A=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ y $B=\{1,\ x,\ x^2\}$ son:

$$M_B^A(T)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad M_B^A(S)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtener la regla de correspondencia de $S+T$.

---

11. Sean M_{2x2} el espacio vectorial real de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales y P_2 el espacio vectorial reales de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, y sea $T:M_{2X2} \to P_2$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right)=(a+b)x^2+bx+(a-c)$$

si es posible, determinar la regla de correspondencia de T^{-1}, considerando las bases

$$A=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad B=\{x^2,\ x,\ 1\}$$

de M_{2x2} y P_2 respectivamente.

---

12. Sean el espacio vectorial real $P=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to P$ tal que

$$T(a,b,c)=(a+b-2c)x^2+(a+2b+c)x+(2a+2b-3c)$$

a) Determinar la inversa de T.
b) Obtener el núcleo y recorrido de la inversa de T.

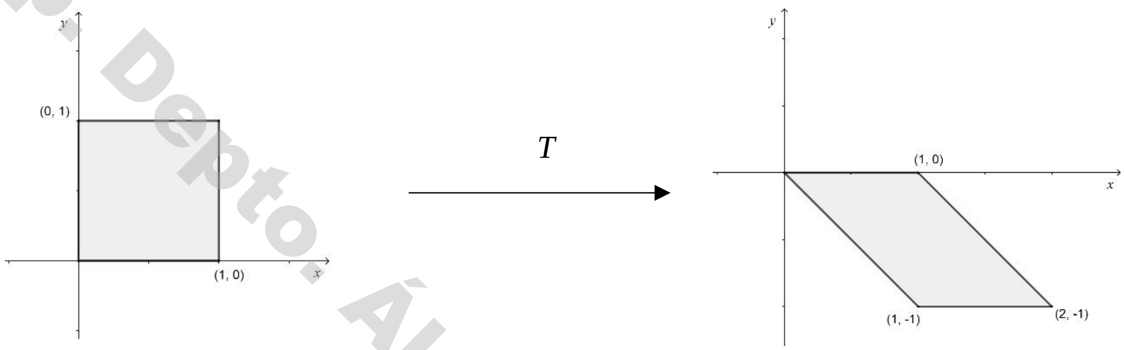
13. Sea M el espacio vectorial real de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales y el operador lineal $S: M \to M$ cuya regla de correspondencia es

$$S(A) = A^T \quad \forall A \in M$$

Donde A^T es la matriz transpuesta de A. Determinar la regla de correspondencia de $(S \circ S)^{-1}$.

---

14. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal cuyo efecto geométrico sobre el cuadro unitario es el que se muestra en la figura



Obtener la matriz asociada a T referida a las bases $A = \{(1,1),(0,1)\}$ y $B = \{(0,2),(-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

---

15. Determinar si existe una matriz diagonal asociada al operador lineal $S: P_2 \to P_2$ tal que $S(ax^2 + bx + c) = (-a + 2b + c)x^2 + (3b + 2c)x + 6b + 2c$ donde P_2 es el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos. En caso afirmativo dar una matriz diagonal asociada a S y la matriz diagonalizadora correspondiente. En caso negativo, explicar por qué no existe.

---

16. Sean el espacio vectorial real $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ y el operador lineal $F: M \to M$ definido por:

$$F \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ a+b & 2c \end{bmatrix}$$

Determinar:
a) Los valores característicos de F.
b) Una matriz diagonal D asociada a F y la base a la que está referida dicha matriz D.

17. Sean $F:\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ el operador lineal cuya representación matricial respecto a la base $B=\{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\}$ de $\mathbb{C}^3$ es $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{bmatrix}$

Obtener:

a) Los valores característicos de F.

b) Los espacios característicos de F.

---

18. Los valores característicos del operador lineal $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son $\lambda_1=\lambda_2=-2$ y $\lambda_3=1$, el operador se define como:

$$S(x,y,z)=(-2x,\ 4x+2z,\ -2x+y-z)$$

Determinar, si existe, una matriz diagonal asociada a S.

---

19. Sea el operador lineal $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es $F(x,y)=(4x-5y,\ 2x-3y)$.

Determinar:

a) Una matriz M asociada a F.

b) Los valores característicos de F.

c) Los espacios característicos de F.

d) Una matriz diagonal asociada a F, y una matriz diagonalizadora de M.

---

20. Sean el espacio vectorial real $P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y el operador lineal $T:P_2\to P_2$ cuya regla de correspondencia es

$$T(ax^2+bx+c)=cx^2+ax+b$$

a) Obtener el núcleo y el recorrido de T

b) Determinar el espacio característico asociado a cada valor propio de T

c) Obtener, si existe, una matriz diagonal D asociada al operador T. En caso afirmativo, indicar la base a la que está referida la matriz D; en caso negativo, explicar la razón de la no existencia de la matriz D.

RESPUESTAS

1)

a) D es una transformación lineal.

b) $N(D)=\{p(x)\mid p(x)=c; c\in\mathbb{R}\}$

c) $T(P)=\{ax+b\mid a,b\in\mathbb{R}\}$

d) No existe D^{-1}

2)

a) $T(ax+b)=(-b, a+b, -a)$

b) $T(P_1)=\{(-b, a+b, -a)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$

3)

a) $N(F)=\{-2bx^2+bx+2b\mid b\in\mathbb{R}\}$, $dim N(F)=1$

b) $F(P)=\{ax^2+bx+(a-b)\mid b\in\mathbb{R}\}$

4)

a) F no es un operador lineal.

b) $N(F)=\left\{\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

c) $N(F)$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

5) $T(a,b)=bx^2+(a-b)x+a$

6)

a) $T(ax+b)=\left(\dfrac{-a+b}{2}\right)x+\left(\dfrac{-a+b}{2}\right)$

b) $M(T)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

Nota: La respuesta no es única.

c) No existe T^{-1}

7)

a) $T\left(\begin{bmatrix} m & 2m & r \\ m+r & m-r & 3r \end{bmatrix}\right)=(m+2r)x^2+(m-r)x+(2m+r)$

b) $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}\right)=-x^2+2x+1$

c) $T(D)=\{ax^2+bx+(a+b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

Base de $T(D)=\{x^2+1, x+1\}$

8) $M_B^A(T)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

9) $(T\circ U)(1,1)\neq(U\circ T)(1,1)$

10) $(S+T)(a,b,c)=(-a+b)x^2+(-2a+b)x+(a+c)$

11) $T^{-1}(ax^2+bx+c)=\begin{pmatrix} a-b & b \\ b & a-b-c \end{pmatrix}$

12)

a) $T^{-1}(ax^2+bx+c)=(-8a-b+5c, 5a+b-3c, -2a+c)$

b) $N(T^{-1})=\{\bar{0}\}$

$T^{-1}(P_2)=\{(a,b,c) \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$

13) $(S\circ S)^{-1}(A)=A$

14) $M_B^A(T)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

15) Matriz diagonal: $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Matriz diagonalizadora: $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

16)

a) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Base a la que está referida la matriz D

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Nota: En este inciso las respuestas no son únicas.

17)

a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3 - i,\ \ \lambda_3 = 3 + i$

b) $E(\lambda_1 = 1) = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{C}\}$

$E(\lambda_1 = 3 - i) = \{(a, a, 0) \mid a \in \mathbb{C}\}$

$E(\lambda_1 = 3 + i) = \{(a, 0, a) \mid a \in \mathbb{C}\}$

18) El operador S no es diagonalizable, por lo tanto, la matriz D no existe.

19)

a) $M(F) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = -1$

c) $E(\lambda_1 = 2) = \left\{ \left(x,\ \dfrac{2}{5}x \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

$E(\lambda_2 = -1) = \{(x,\ x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

d) Matriz diagonal: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz diagonalizadora: $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

20)

a) $N(T) = \{0x^2 + 0x + 0\}$

$T(P_2) = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

b) $E(\lambda_1 = 1) = \{-kx^2 + kx + k \mid k \in \mathbb{R}\}$ Un sólo espacio característico.

c) La matriz diagonal D no existe.