



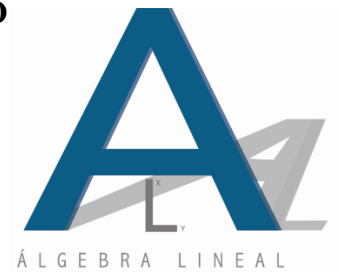
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA LINEAL

SERIE 4

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO



1. En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$  se define la función

$$(\bar{x} | \bar{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 \quad \forall \bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinar si  $(\bar{x} | \bar{y})$  es un producto interno en  $\mathbb{R}^2$

2. En el espacio vectorial complejo  $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) | z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$  se define la función

$$(\bar{z} | \bar{w}) = 3z_1\bar{w}_1 + 2z_2\bar{w}_2 \quad \forall \bar{z} = (z_1, z_2), \bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$$

donde  $\bar{w}_1$  y  $\bar{w}_2$  son el conjugado de  $w_1$  y  $w_2$  respectivamente. Determinar si  $(\bar{z} | \bar{w})$  es un producto interno en  $\mathbb{C}^2$  considerando que

$$(\bar{z} | \bar{w} + \bar{x}) = (\bar{z} | \bar{w}) + (\bar{z} | \bar{x})$$

3. En el espacio vectorial real  $P = \{ax + b | a, b \in \mathbb{R}\}$  se define la función

$$(p | q) = ac \quad \forall p(x) = ax + b, q(x) = cx + d \in P$$

Determinar si  $(p | q)$  es un producto interno en  $P$ . En caso afirmativo, calcular la norma de  $p(x) = 1$ . En caso negativo indicar todos los axiomas que  $(p | q)$  no cumple.

4. En el espacio vectorial complejo  $\mathbb{C} = \{z | z = a + bi, i^2 = -1; a, b \in \mathbb{R}\}$  se define la función

$$(z_1 | z_2) = z_1 \overline{(z_2 + i)} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Determinar si  $(z_1 | z_2)$  es un producto interno en  $\mathbb{C}$ . En caso afirmativo, calcular la norma del vector  $z = 2 - 3i$ ; en caso contrario, indique los axiomas de la definición que no se cumplen.

5. Sea el espacio vectorial real  $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$  con producto interno definido por:

$$(A \mid B) = \text{tr}(AB^T) \quad \forall A, B \in M$$

Obtener una matriz  $D \in M$  que forme un ángulo de  $45^\circ$  con la matriz  $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  y que diste una unidad de la matriz  $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

6. Sea el producto interno en  $\mathbb{C}^2$  definido por

$$(\bar{v} \mid \bar{w}) = v_1 \bar{w}_1 + 2v_2 \bar{w}_2 \quad \forall \bar{v} = (v_1, v_2), \bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$$

Donde  $\bar{w}_1$  y  $\bar{w}_2$  son el conjugado de  $w_1$  y  $w_2$  respectivamente. Para los vectores  $\bar{v} = (i, 2-i)$  y  $\bar{w} = (-1, 1+i)$

- Obtener la norma de los vectores  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$
- Calcular la distancia del vector  $\bar{v}$  al vector  $\bar{w}$
- Determinar si  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  son ortogonales

7. Sean  $P_2$  el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y el producto interno en  $P_2$  definido por

$$(\bar{p} \mid \bar{q}) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad \forall \bar{p} = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \bar{q} = a_2 x^2 + b_2 x + c_2 \in P_2$$

y sean los vectores  $\bar{u} = x^2 + x + a$ ,  $\bar{v} = x - 3$ . Determinar el valor o los valores de  $a \in \mathbb{R}$ , tal que:

- El ángulo entre  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$  sea  $\frac{\pi}{2}$  rad
- La norma de  $\bar{u}$  sea  $\sqrt{18}$

8. Para el producto interno usual en el espacio complejo  $\mathbb{R}^2$  definido por

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 \quad \forall \bar{u} = (u_1, u_2), \bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

obtener un vector  $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$  que sea ortogonal al vector  $\bar{u} = (3, 1)$  y tal que la distancia entre  $\bar{w}$  y  $\bar{m} = (-2, 0)$  sea 4

9. Sea el espacio vectorial real  $P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  con producto interno definido por

$$(\bar{p} \mid \bar{q}) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Obtener el conjunto de todos los valores  $k \in \mathbb{R}$  que hacen que el conjunto  $G = \{2x^2 - x, kx^2 - 1\}$  sea ortogonal.

10. En el espacio vectorial complejo  $\mathbb{C}^2$  se define el producto interno usual como

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 \quad \forall \bar{u} = (u_1, u_2), \bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$$

donde  $\bar{v}_1$  y  $\bar{v}_2$  representan el conjugado de  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente. Determinar el número  $a \in \mathbb{C}$  para que el conjunto  $D = \{(1+i, 2i), (3+i, a)\}$  sea una base ortogonal de  $\mathbb{C}^2$ . Además, a partir de la base  $D$ , obtener una base ortonormal de  $\mathbb{C}^2$ .

11. Sea el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  con producto interno definido por

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 \quad \forall \bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

y sea  $W = \{(x, y, y - 2x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ . Determinar:

- Una base ortogonal de  $W$
- La proyección del vector  $\bar{a} = (1, 3, -1)$  sobre  $W$
- La distancia entre el vector  $\bar{a}$  y su proyección sobre  $W$

12. Empleando el producto interno usual en  $\mathbb{R}^3$ , por medio del proceso de Gram-Schmidt determinar una base ortonormal del espacio columna de la matriz  $N$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Sea  $P_1$  el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales y

$M$  el subespacio de  $P_1$  generado por el conjunto  $A = \left\{1-x, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right\}$ , y sea el producto interno definido por

$$(p \mid q) = \sum_{i=0}^1 2a_i b_i \quad \forall p(x) = a_0 + a_1x, q(x) = b_0 + b_1x \in P_1$$

Determinar el polinomio  $m(x) \in M$  más próximo a  $r(x) = 1 + 2x$

14. Sean el espacio  $\mathbb{R}^3$  con producto interno usual en  $\mathbb{R}^3$  y  $W$  el subespacio de  $\mathbb{R}^3$ , una de cuyas bases es  $B = \{(1, 1, -2), (1, -1, 0)\}$ . Determinar la base y la dimensión del complemento ortogonal de  $W$ .

15. El espacio vectorial real  $P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  tiene un producto interno definido por:

$$(p(x) \mid q(x)) = ar + bs + ct \quad \forall p(x) = ax^2 + bx + c, q(x) = rx^2 + sx + t \in P$$

y sea  $W$  el espacio de  $P$  generado por el conjunto  $G = \{x^2 - 1, x + 1\}$ . Determinar el complemento ortogonal de  $W$ .

16. Sean el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  con producto interno usual y  $W = \{(x, y, z) \mid x - y = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}$  un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .

a) Determinar el complemento ortogonal  $W^\perp$  de  $W$ .

b) Expresar al vector  $\bar{v} = (1, 0, 1)$  como la suma  $\bar{v} = \bar{a} + \bar{b}$  donde  $\bar{a} \in W$  y  $\bar{b} \in W^\perp$ .

17. Sean el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  con producto interno definido por:

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad \forall \bar{u} = (u_1, u_2, u_3), \bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

Sea  $W$  un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  una de cuyas bases es  $J = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ .

Determinar:

a) Una base ortogonal de  $W$ .

b) El complemento ortogonal de  $W$ .

c) La proyección del vector  $\bar{u} = (1, 1, 1)$  sobre  $W$ .

18. Sea el espacio vectorial real  $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$  con producto interno

$$(A \mid B) = \text{tr}(B^T A)$$

y sea el subespacio  $W = \left\{ \begin{bmatrix} m & n \\ m-n & m+n \end{bmatrix} \mid m, n \in \mathbb{R} \right\}$ .

Determinar la proyección de  $\bar{v} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$  sobre  $W$ .

19. Determinar la ecuación de la recta  $y = mx + b$  por mínimos cuadrados que mejor se ajusta a los puntos  $A(-2,3), B(0,0), C(4,4)$ .

---

20. A partir de un experimento se obtienen los siguientes datos:  $(-1,0), (0,1), (1,2), (2,1)$ . De acuerdo con un ajuste lineal de mínimos cuadrados  $y = mx + b$ , determinar la ordenada que corresponde a la abscisa  $x = 8$ .

Prop. Depto. Álgebra Lineal. FI. UNAM

## RESPUESTAS

1) Sí es un producto interno.

2) Sí es un producto interno.

3) No es un producto interno.

4) No es un producto interno.

$$5) D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6)

a)  $\|\bar{v}\| = \sqrt{11}$ ,  $\|\bar{w}\| = \sqrt{5}$

b)  $d(\bar{v}, \bar{w}) = \sqrt{12}$

c)  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  no son ortogonales.

7)

a)  $a = \frac{1}{3}$

b)  $a = \pm 4$

$$8) \bar{w} = (0, 0) \text{ ó } \bar{w} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$9) \left\{ \frac{10}{9} \right\}$$

$$10) \alpha = -1 - 2i$$

$$\text{Base ortonormal: } \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(1+i, 2i), \frac{1}{\sqrt{15}}(3+i, -1-2i) \right\}$$

11)

a) Una base ortogonal de  $W$  es:  $\{(1, 0, -2), (4, 11, 3)\}$

b)  $\bar{w} = \left(\frac{25}{17}, \frac{39}{17}, -\frac{11}{17}\right)$  es la proyección de  $\bar{a} = (1, 3, -1)$  sobre  $W$

c)  $d(\bar{a}, \bar{w}) = \sqrt{\frac{24}{17}}$

$$12) \text{Base ortonormal de } L(N_c): \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)\right) \right\}$$

$$13) m(x) = 1 + 2x$$

14) Base estándar de  $W^\perp : \{(1,1,1)\}$

$$\dim W^\perp = 1$$

15)  $W^\perp = \{ax^2 - ax + a \mid a \in \mathbb{R}\}$

16)

a)  $W^\perp = \{(-b, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}$

b)  $(1, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

17)

a) Base ortogonal =  $\left\{ (1, 0, 1), \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \right\}$

b)  $W^\perp = \left\{ \left(-c, -\frac{1}{2}c, c\right) \mid c \in \mathbb{R} \right\}$

c) La proyección del vector  $\bar{u} = (1, 1, 1)$  sobre  $W$  es el vector  $\bar{p} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$

18) La proyección del vector  $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  sobre  $W$  es el vector  $\bar{w} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

19)  $y = \frac{2}{7}x + \frac{15}{7}$

20)  $y = 4$