UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA LINEAL

SERIE 5

OPERADORES LINEALES EN ESPACIO CON PRODUCTO INTERO

---

1. Sean el espacio vectorial real $P=\{ax+b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ con producto interno definido por:

$$\left(p(x) \mid q(x)\right)=ac+bd \quad \forall p(x)=ax+b,\ q(x)=cx+d\in P$$

y el operador lineal $S:P\to P$ cuya regla de correspondencia es:

$$S\left(p(x)\right)=(a-b)x+(a+b) \quad \forall p(x)=ax+b\in P$$

Determinar el adjunto de S.

---

2. Sean el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con producto interno usual y el operador lineal $F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es $F(x,y)=\left(x-iy,\ 2ix+(1+i)y\right)$. Determinar el adjunto de F.

---

3. Sea P el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales con producto interno:

$$\left(ax^2+bx+c \mid mx^2+nx+p\right)=2am+bn+cp$$

y el operador lineal $D:P\to P$ cuya regla de correspondencia es $D\left(p(x)\right)=p'(x)$, donde $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$. Obtener el adjunto de D.

---

4. Sean el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual

$$\left(\bar{u} \mid \bar{v}\right)=u_1\overline{v}_1+u_2\overline{v}_2 \quad \forall \bar{u}=(u_1,u_2),\ \bar{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{C}^2$$

Donde $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ son los conjugados de v_1 y v_2 respectivamente, y sea el operador lineal $S:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$S(x,y)=(2xi,\ iy)$$

a) Obtener el adjunto de S
b) Determinar si S es antihermitiano.

5. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$S(x,y,z)=(2x+3y,\ 3x+2y,\ 5z)$$

a) Obtener el adjunto de S
b) Determinar si S es normal.

---

6. Sean V un espacio vectorial con producto interno complejo y $\lambda \in \mathbb{C}$. Determinar si el operador $T:V\to V$ tal que $T(\bar{v})=\lambda\bar{v}$ es normal.

---

7. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es

$$S(x,y,z)=(2y+2z,\ 2x+2z,\ 2x+2y)$$

Determinar si S es un operador simétrico
Obtener la proyección asociada al valor característico $\lambda=-2$ de S.

---

8. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$S(1,\ 1,\ 0)=(3,2,0)$$
$$S(0,-1,0)=(-2,0,1)$$
$$S(0,\ 2,\ 2)=(6,-2,4)$$

Determinar si S es un operador simétrico.

---

9. Sea el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$ con producto interno usual

$$(\bar{u}\mid\bar{v})=a\bar{m}+b\bar{n}+c\bar{r}\quad \forall\ \bar{u}=(a,b,c),\ \bar{v}=(m,n,r)\in\mathbb{C}^3$$

Donde $\bar{m},\bar{n}$ y $\bar{r}$ son los conjugados de m,n y r respectivamente y sea el operador lineal $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ cuya regla de correspondencia es

$$T(a,b,c)=(a+b+3c+(4b-c)i,\ a+2b+(c-4a)i,\ 3a+(a-b)i)$$

Determinar si el operador T es hermitiano.

---

10. Sean el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con un producto interno y $B_0=\left\{\left(\frac{1}{2},0\right),(0,1)\right\}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ respecto a dicho producto interno y sea $S:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ el operador lineal tal que:

$$S(x,y)=(ix+(2+i)y,\ (-2+i)x+3iy)$$

Determinar si S es un operador antihermitiano.

11. Sea el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$ con producto interno

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = a\bar{m} + b\bar{n} + c\bar{r} \quad \forall\ \bar{u} = (a,b,c),\ \bar{v} = (m,n,r) \in \mathbb{C}^3$$

Donde $\bar{m}, \bar{n}$ y $\bar{r}$ son los conjugados de m, n y r respectivamente, y sea el operador lineal $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ cuya regla de correspondencia es

$$T(a,b,c) = \left(a + b + 3c + (4b - c)i,\ a + 2b + (c - 4a)i,\ 3a + (a - b)i\right)$$

Determinar si el operador T es hermitiano.

---

12. Sean el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^2$ con producto interno usual y el operador lineal $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ Determinar los valores de $k \in \mathbb{C}$ para que F sea un operador unitario, tal que:

$$F(1,0) = \left(\frac{k}{5},\ -\frac{4}{5}i\right) \text{ y } F(0,1) = \left(\frac{4}{5},\ -\frac{k}{5}i\right).$$

---

13. Sean el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x,y,z) = \left(x\cos\theta - y\,sen\theta,\ x\,sen\theta + y\cos\theta,\ z\right)$$

Determinar si T es un operador ortogonal.

---

14. Los valores característicos del operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(x,y,z) = (2x + y,\ x + 2y,\ z)$$

son $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 3$ y sus espacios característicos son $E(1) = \{(a,\ -a,\ \mathrm{b}) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

y $E(3) = \{(c,\ c,\ 0) \mid c \in \mathbb{R}\}$. Obtener la descomposición espectral de T.

---

15. Sea el espacio vectorial C^2 con producto interno definido por

$$(\bar{z} \mid \bar{w}) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 \quad \forall\ \bar{z} = (z_1, z_2), \bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$$

Determinar la descomposición espectral del operador lineal $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es

$$S(z_1, z_2) = (-iz_2,\ iz_1).$$

---

16. Sea el espacio $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal tal que

$$T(a,b) = (-a + 2b,\ 2a + 2b)$$

Obtener la descomposición espectral de T.

17. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual. Determinar la descomposición espectral del operador lineal $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

18. Sea $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ la matriz asociada al operador lineal $H:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto a la base canónica.

Determinar:

a) El polinomio característico de H

b) Los valores característicos de H

c) Una base de cada uno de los espacios característicos de H

d) Una matriz diagonalizadora de H

e) La descomposición espectral de H .

---

19. Sea la curva cuya ecuación es de la forma cuadrática:

$$5x^2 + 4xy + 5y^2 - 21 = 0$$

a) Obtener una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática

b) Determinar unas ecuaciones de C que no contengan término cruzado

c) Trazar la curva C .

---

20. Sea la superficie C cuya ecuación es la forma cuadrática

$$2x^2 + y^2 + 2xz + 2z^2 = 1$$

a) Obtener una matriz simétrica asociada a la forma cuadrática

b) Determinar unas ecuaciones de C que no tengan un término cruzado

c) Trazar C .

RESPUESTAS SERIE 5 DE ÁLGEBRA LINEAL

1. $s^*(ax+b)x+(-a+b)$
2. $F^*=(z-2iw, iz+(1-i)w)$
3. $D^*(ax^2+bx+c)=bx^2+cx$
4. a) $S^*=(-2iz,-iw)$

   b) S es antihermitiano

5. a) $S^*(x,y,z)=(2x+3y,3x+2y,5z)$

   b) S es un operador normal.

6. El operador T es normal

7. S es un operador simétrico

   $P=\left(\frac{2x-y-z}{3},\frac{-x+2y-z}{3},\frac{-x-y+2z}{3}\right)$

8. El operador es simétrico

9. El operador T es hermitiano

10. El operador S no es antihermitiano

11. El operador T no es hermitiano

12. El operador Fes unitario es unitario si: $k=\pm 3i$

13. El operador T es ortogonal.

14 La descomposición espectral del operador T es:

$$T(x,y,z)=\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2},z\right)+3\left(\frac{x+y}{2},\frac{y+x}{2},0\right)$$

15. $S=-P_1+iP_2$ donde $P_1=\left(\frac{z_1+z_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right), P_2=\left(\frac{z_1-z_2}{2},\frac{-z_1+z_2}{2}\right)$

16. La descomposición espectral del operador T es:

$$T(a,b)=3\left(\frac{a+2b}{5},\frac{2a+4b}{5}\right)-2\left(\frac{4a-2b}{5},\frac{-2a+b}{5}\right)$$

17.$T=3P_1-P_2$ donde $P_1=\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right), P_1=\left(\frac{x-y}{2},\frac{-x+y}{2}\right)$

18.

a) $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$ polinomio característico

b) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$ valor característico

c) Una base de $B_{E(0)} = \{(-2,1)\}$

Una base de $B_{E(5)} = \{(1,2)\}$

d) Una matriz diagonalizadora es $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

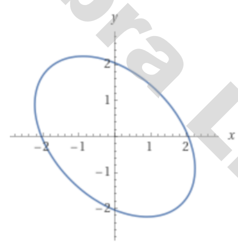
e) La descomposición espectral del operador H es:

$$H(x,y) = 5\left(\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5}\right)$$

19. a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\frac{(x')^2}{3} + \frac{(y')^2}{7} = 1$

c) la gráfica de la curva es:



20. a) Una matriz simétrica asociada a la forma cuádrica es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $(x')^2 + (y')^2 + 3(z')^2 = 1$