UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO "C"

2 de diciembre de 2015 ***Semestre 2016-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Calcular el valor medio de la función $f(x) = -\sqrt[3]{x-1}$ en el intervalo $[0\,,2]$, y el valor de **C** que se encuentra en dicho intervalo tal que se cumple el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

15 Puntos

---

2. Determinar si la integral converge o diverge.

$$\int_{2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}dx$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las integrales

a) $\displaystyle\int ln\sqrt{x}\;dx$ b) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int\frac{2+x}{x^3-x^2}\,dx$

30 Puntos

4. Calcular la longitud de la gráfica de la función expresada por:

$$f\ :\ \begin{cases} x = 4\ cos\ \theta \\ y\ = 4\ sen\ \theta \end{cases} \qquad si \quad \theta\ \varepsilon\ \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2} \right]$$

10 Puntos

---

5. Hacer la representación gráfica del dominio de la función:

$$f\left(x\,,\,y\right) = \sqrt{\ y^2 -\ x^2 - 1}$$

15 Puntos

---

6. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie $\dfrac{z^2}{2} - x^2 - y^2 = 6$

en el punto de coordenadas $\left(\ 1\,,1\,,4\right)$

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

Solución del Primer Examen Final Colegiado

Tipo "C"

Semestre 2016 – 1

1. Sea el valor medio

$$f(c)=\frac{-\int_0^2 (x-1)^{1/3}}{2}=\frac{-\frac{3}{4}(x-1)^{4/3}\Big]_0^2}{2}$$

$$f(c)=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{2}=\frac{0}{2}=0 \qquad \text{si} \quad f(c)=-\sqrt[3]{c-1}$$

$$\Rightarrow \qquad 0=-\sqrt[3]{c-1} \quad \therefore \quad \boxed{c=1}$$

15 Puntos

2. Es una integral impropia:

$$\text{Sea} \quad I=\lim_{u\to\infty}\int_2^u \left(\frac{1}{4}\right)^x dx \qquad \text{y} \quad \int\left(\frac{1}{4}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln\frac{1}{4}}+C$$

$$\Rightarrow \lim_{u\to\infty}\left[-\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln 4}\right]_2^u=\lim_{u\to\infty}\left[-\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^u}{\ln 4}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\ln 4}\right]$$

$I=\boxed{\frac{1}{16\ln 4}}$ por lo que la integral converge

15 Puntos

3.

a) Por partes

La integral puede escribirse como:

$$\frac{1}{2}\int \ln x\,dx \qquad si$$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x \ln x - \int dx\right]$$

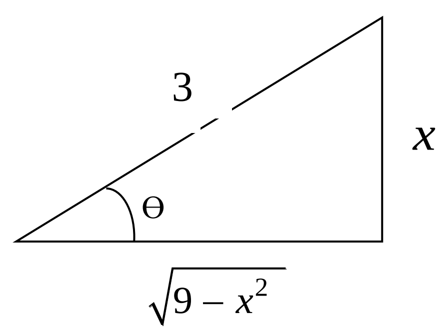
$$\boxed{I = x \ln x - \frac{1}{2}x + c}$$

b) Por sustitución trigonométrica

$$x = 3\,sen\,\theta$$

$$\sqrt{9 - x^2} = 3\cos\theta$$

$$dx = 3\cos\theta\; d\theta$$



$$I = \int \frac{3\cos\theta\,3\cos\theta\,d\theta}{9\,sen^2} = \int \cot^2\theta\; d\theta =$$

$$si \qquad \cot^2\theta = \csc^2 - 1$$

$$\Rightarrow I = \int\left(\csc^2 - 1\right)d\theta = -\cot\theta - \theta + C$$

$$\boxed{I = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - ang\;sen\left(\frac{x}{3}\right) + c}$$

c) Por fracciones parciales

Sea la fracción

$$\frac{2+x}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$\Rightarrow 2+x = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

$$si \quad x=0 \qquad si \quad x=1 \qquad si \quad x=2$$

$$B=-2 \qquad C=3 \qquad 4 = 2A-2+3(4)$$

$$-12+4+2 = 2A$$

$$-6 = 2A \;\Rightarrow\; A=-3$$

$$I = \int \left(\frac{-3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{(x-1)} \right) dx$$

$$\boxed{I = \ln \left(\frac{x-1}{x} \right)^3 + \frac{2}{x} + c}$$

30 Puntos

4. Sea la región

$$\text{Sea} \qquad \text{L} = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\; d\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -4\,sen\,\theta \;\Rightarrow\; \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = 16\,sen^2\,\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 4\cos\theta \;\Rightarrow\; \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = 16\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16\,sen^2\,\theta + 16\cos^2\theta}\; d\theta$$

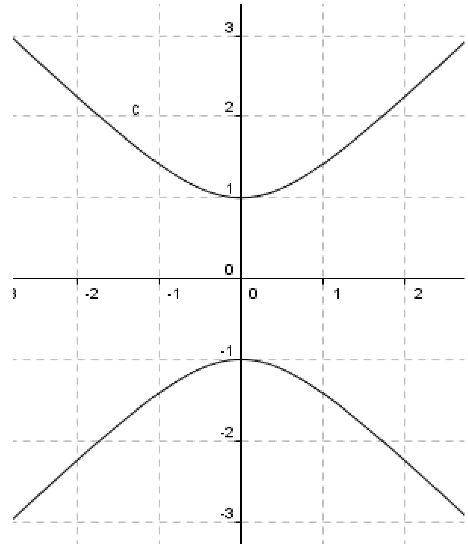
$$A = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 4\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \boxed{4\pi\ u^2}$$

10 Puntos

5. Se debe cumplir que

$$y^2 - x^2 - 1 \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad y^2 - x^2 \geq 1$$

Por lo que la gráfica del dominio queda



15 Puntos

6. La ecuación tiene la forma

$$\left.\frac{\delta F}{\delta x}\right|_P \left(x - x_0\right) = \left.\frac{\delta F}{\delta y}\right|_P \left(y - y_0\right) = \left.\frac{\delta F}{\delta z}\right|_P \left(z - z_0\right) = 0$$

Si $\quad F\left(x, y, z\right) = 0 \quad es \quad \dfrac{z^2}{2} - x^2 - y^2 - 6 = 0$

$$\frac{\delta F}{\delta x} = -2x$$
$$\frac{\delta F}{\delta y} = -2y \qquad \Rightarrow \quad -2\left(x - 1\right) - 2\left(y - 1\right) + 4\left(z - 4\right) = 0$$
$$\frac{\delta F}{\delta z} = \ z \qquad\qquad -2x + 2 - 2y + 2 + 4z - 16 = 0$$

de donde:

$$\boxed{x + y - 2z + 6 = 0}$$

15 Puntos