UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
1221
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO "A"

7 de diciembre de 2017 ***Semestre 2018-1***

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Determina el carácter de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

15 puntos

2. Calcula el valor de $b > -1$ **tal que se cumpla la igualdad.**

$$\int_{-1}^{b} \left(b\,x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{9}{2}$$

15 puntos

3. Efectúa las integrales:

$$a)\int 2x\,\text{ang}\sec x \;\; dx \qquad b)\int \frac{x-1}{x^3+x}\, dx \qquad c)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$$

30 puntos

4. Calcula el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 - 2x$ **y** $y = 6x - x^2$, **representa gráficamente la región.**

10 puntos

---

5. Traza las curvas de nivel de la función $z = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$ **para** $z = 1 \;\; y \;\; z = 2$. **Determina el recorrido de la función.**

15 puntos

---

6. Si la altura h **de un cono circular recto crece a razón de 2 centímetros por minuto, calcula la razón a la que debe cambiar su radio** r, **de tal modo que el volumen del cono permanezca constate en el instante en el que su altura mide 3 centímetros y su radio 2 centímetros.**

15 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Primer Examen Final

Tipo “A”

Semestre 2018 – 1

1. Aplicando el criterio del cociente o de D'Alembert

$$r=\frac{\dfrac{n+1}{(n+2)!}}{\dfrac{n}{(n+1)!}}=\frac{(n+1)!(n+1)}{(n+1)!(n)}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\frac{1}{n}=(1)\cdot(0)=0=\rho$$

Si $|\rho|<1$, la serie converge, $|0|<1$

$\therefore$ $\boxed{\text{La serie converge}}$

15 puntos

2. Al efectuar la integral

$$\int_{-1}^{b}\left(\mathrm{b}\,x+\frac{1}{2}\right)\,dx=\left[\frac{bx^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_{-1}^{b}=\frac{9}{2}$$

$$\frac{b^3}{2}+\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$$

$$\frac{b^3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

$$b^3=9-1$$

$$b^3=\sqrt[3]{8}\quad\Longrightarrow\boxed{b=2}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por partes

$$\left| \begin{array}{l} u = 2ang\,sec\,x \\ du = \dfrac{2dx}{x\sqrt{x^2-1}} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} dv = xdx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

$$I = x^2\left(ang\,sec\,x\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{I = x^2\left(ang\,sec\,x\right) - \sqrt{x^2-1} + C}$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $\dfrac{x-1}{x\left(x^2+1\right)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$;

$$x-1 = A\left(x^2+1\right) + \left(Bx+C\right)x \Rightarrow \begin{cases} si \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-1=A} \\ si \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad 0=-2+B+C \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \boxed{B+C=2} \\ si \quad x=2 \quad \Rightarrow \boxed{3=2B+C} \end{cases}$$

de donde $\boxed{B=1}$ *y* $\boxed{C=1}$ *por lo que*

$$\Rightarrow I = \int\left[-\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}\right]dx$$

$$I = -lnx + \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) + ang\,tan\,x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + ang\,tan\,x + C}$$

c) Por sustitución trigonométrica

$x = 3\sec\theta$

$\sqrt{x^2-9} = 3tan\theta$

$dx = 3sec\theta tan\theta d\theta$

$$I = \int \frac{3sec\theta tan\theta d\theta}{3tan\theta} = \int sec\theta d\theta$$

$$I = ln(sec\theta + tan\theta) + C_1 = \boxed{ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)+C}$$

30 Puntos

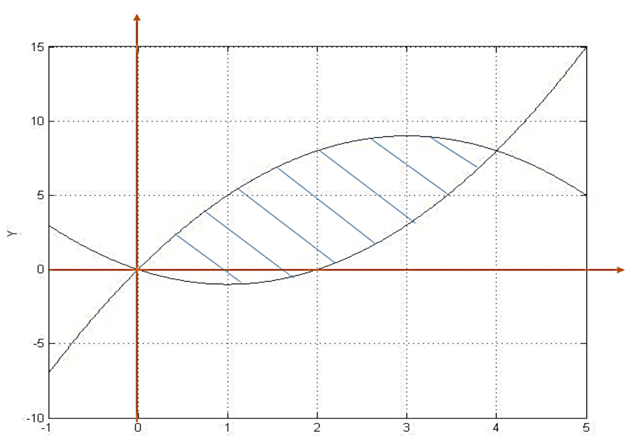
4. La región es:

$$A = \int_0^4 \left[6x - x^2 - \left(x^2 - 2x\right)\right]dx$$

$$A = \int_0^4 \left(8x - 2x^2\right)dx$$

$$A = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 = 64 - \frac{2}{3}(64)$$

$$A = 64\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{64}{3} \text{ unidades de área}}$$



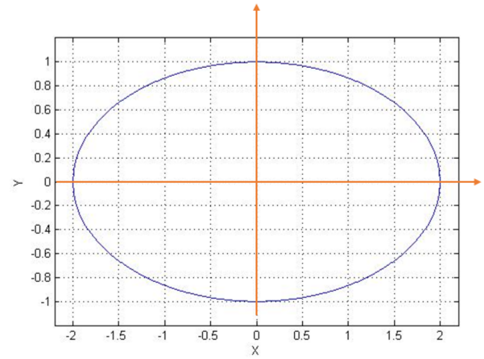
10 Puntos

5.

Si $z=1$

$$x^2+4y^2=4$$

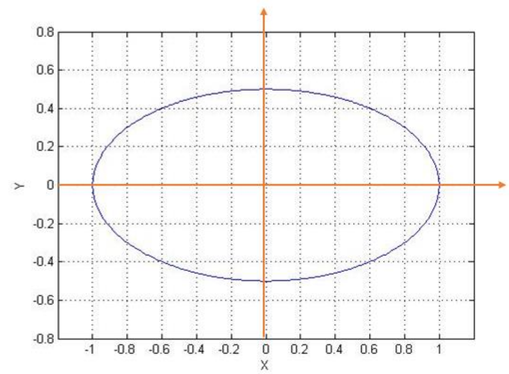
$$\boxed{\frac{x^2}{4}+y^2=1}$$



Si $z=2$

$$x^2+4y^2=1$$

$$\boxed{x^2+\frac{y^2}{1/4}=1}$$



$$\boxed{R_z=\left\{z\mid z\in(-\infty,0)\right\}}$$

15 Puntos

6.

Si $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\partial V}{\partial r}\cdot\dfrac{dr}{dt}+\dfrac{\partial V}{\partial h}\cdot\dfrac{dh}{dt}$

Como el volumen es constante $\dfrac{dV}{dt}=0,$ entonces

$$0=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}\quad\Rightarrow\quad\frac{dr}{dt}=\frac{-\dfrac{\partial V}{\partial h}\cdot\dfrac{dh}{dt}}{\dfrac{\partial V}{\partial r}}$$

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{\dfrac{\pi}{3}r^2\cdot\dfrac{dh}{dt}}{\dfrac{2}{3}\pi rh}=-\frac{\dfrac{\pi}{3}2^2\cdot 2}{\dfrac{2}{3}\pi\cdot 2\cdot 3}=\boxed{-\frac{2}{3}\left[cm/min\right]}$$

15 Puntos