UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "A"

27 de noviembre de 2019 ***Semestre 2020-1***

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los enunciados de los **6** reactivos que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2** horas.

---

1. Obtén el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-4)^n}{4^n n^2}$$

Incluye el análisis de los extremos.

15 puntos

---

2. Determina si la siguiente integral converge o diverge

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

15 puntos

---

3. Efectúa:

$a)\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - x}$ $\qquad b)\ \displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$ $\qquad c)\ \displaystyle\int x\,\mathrm{sen}\,3x\,dx$

30 puntos

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de las curvas cuyas ecuaciones son:

$$y = e^{x}, \quad x = ln\,\frac{1}{2}, \quad y = 0 \quad \textbf{y} \quad x = 0$$

Haz la representación gráfica de la región.

10 puntos

---

5. Obtén el recorrido de la función $h(x,y) = -e^{-\sqrt{xy-1}}$ **y traza la gráfica de su dominio.**

10 puntos

---

6. Calcula la derivada direccional de la función

$f(x, y) = x^2 y^3 - 2x^3 y$, **en el punto** $A(1, -2)$ **y en la dirección de** $w = \frac{\pi}{6}$

20 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Cálculo Integral

1221

Solución del Primer Examen Final

Tipo "A"

Semestre 2020 – 1

1. Sea la razón de D'Alembert

$$r=\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(x-4)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)^2}}{\dfrac{(-1)^n(x-4)^n}{4^n(n)^2}}=\left(\frac{4-x}{4}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-x}{4}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{4-x}{4}=\rho \quad si \quad |\rho|<1$$

$$\Rightarrow -1<\frac{4-x}{4}<1 \quad \Rightarrow -4<4-x<4$$

$$\Rightarrow -8<-x<0 \quad \Rightarrow 0<x<8$$

Análisis de los extremos :

$si \quad x=0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-4)^n}{4^n n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad convergente$$

$si \quad x=8$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad convergente$$

$$\therefore\ el\ intervalo\ es\ \boxed{0\le x\le 8}$$

15 puntos

2. *Es una integral impropia al completar el trinomio cuadrado perfecto del denominador*

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = ang\,tan(x+1)+c$$

por lo que:

$$I = \lim_{u\to -\infty} \Big[ang\,tan(x+1) \Big]_u^{-1}$$

$$= \lim_{u\to -\infty} \Big[ang\,tan(0) - ang\,tan(u+1) \Big]$$

$$I = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

por lo que la integral converge

15 Puntos

3.

$a)$ *Por fracciones parciales*

$$\frac{1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow A\left(x^2-1\right)$$

$$\Rightarrow 1 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

$si\ \ x=0 \qquad si\ \ x=1 \qquad si\ \ x=-1$

$A=-1 \qquad C=\dfrac{1}{2} \qquad B=\dfrac{1}{2}$

$$=> \int\left[\frac{-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]dx$$

$$=\boxed{ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)+c}$$

b) Por *sustitución trigonométrica*

$x=sen\theta$

$\sqrt{1-x^2}=cos\,\theta \qquad \Rightarrow I=\displaystyle\int\frac{cos^2\theta d\theta}{sen^2\theta}$

$dx=cos\,\theta d\theta \qquad I=\displaystyle\int cot^2\theta d\theta$

$$\Rightarrow I=\int\left(csc^2\theta-1\right)d\theta$$

$$I=-cot\,\theta-\theta+c$$

$$\boxed{I=-\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}-angsen(x)+C}$$

c) Por *partes*

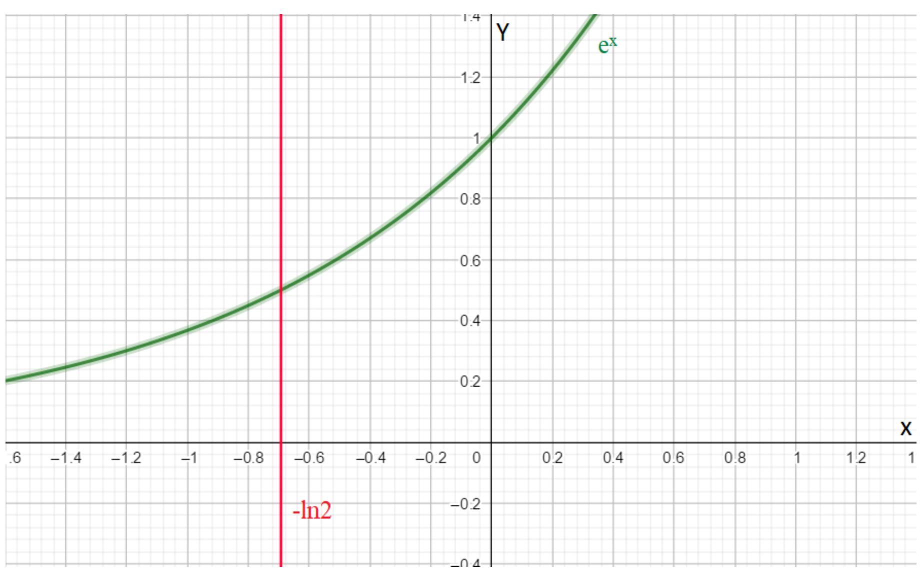
$$\left| \begin{aligned} u &= x \\ du &= dx \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} dv &= sen3xdx \\ v &= -\frac{1}{3}\cos 3x \end{aligned} \right.$$

$$I = -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3xdx$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}sen3x + C}$$

30 Puntos

4. La región es:



$$A = \int_{-\ln 2}^{0} e^{x}\,dx$$

$$A = \left[e^{x} \right]_{-\ln 2}^{0}$$

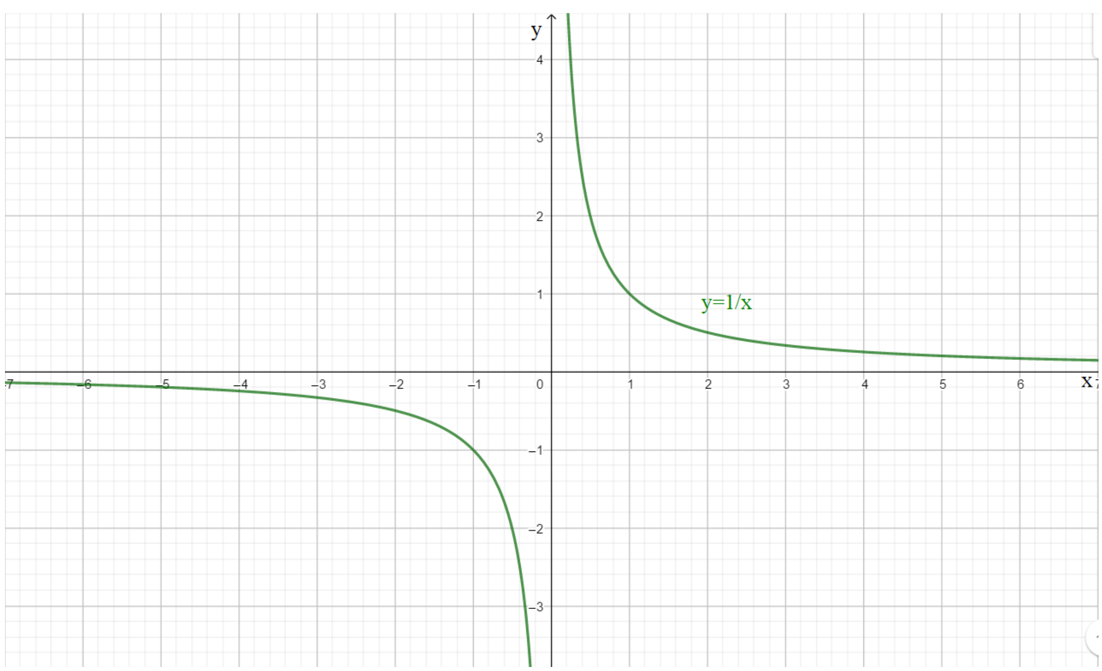
$$A = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\ \text{u}^{2}}$$

10 Puntos

5.

$$\boxed{R_n = \left\{ z \mid z \in \left[-1,0 \right) \right\}}$$

Gráfica del dominio



10 Puntos

6.

Si $\dfrac{d\ f}{d\ s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}_A \cos\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\partial f}{\partial y}_A \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \frac{d\ f}{d\ s} = \left(2xy^3 - 6x^2y\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(3x^2y^2 - 2x^3\right)\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{d\ f}{d\ s} = -2\sqrt{3} + 5}$$

20 Puntos