UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

TIPO "C"

27 de noviembre de 2019 *Semestre 2020-1*

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los enunciados de los 6 reactivos que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de 2 horas.

1. Determina si la serie es convergente o divergente, si es convergente, calcula su suma.

$$2+\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{10000}+\dots$$

15 puntos

---

2. Si se cumple que $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=1$ **, calcula el valor de** $b>0$ **.**

15 puntos

---

3. Efectúa las integrales:

$a)\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad b)\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ $\qquad c)\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x-2}$

30 puntos

4. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de las funciones:

$$f(x) = -x^2 - 2x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x + 2$$

Haz la representación gráfica de la región.

10 puntos

---

5. Calcula la derivada direccional de la función $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ **en la dirección del vector** $\bar{v} = [2, 2]$ **y en el punto de coordenadas** $(0, \pi)$**.**

20 puntos

---

6. Sea $g(u, v) = v\, e^u$ **y sean** $u = \operatorname{sen}(xy)$ **y** $v = y \ln x$**,**

calcula el valor de

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x = \frac{\pi}{2} \\ y = 1}}$$

10 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Primer Examen Final

Tipo "C"

Semestre 2020 – 1

1. Se puede reescribir como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

$$que\ es\ geométrico\ con\ r = \frac{1}{10}\ y\ a = 2$$

$$por\ lo\ que\ converge\ y\ su\ suma\ es:$$

$$s = \frac{2}{1 - \frac{1}{10}} = \boxed{\frac{20}{9}}$$

15 Puntos

2.

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^b = -2\sqrt{1-b} + 2$$

$$debe\ \ ser\ igual\ 1 \Rightarrow -2\sqrt{1-b} + 2 = 1$$

$$de\ donde \quad \boxed{b = \frac{3}{4}}$$

15 puntos

3. Solución:

a) Por sustitución trigonométrica

$$x = \tan\theta$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sec\theta$$

$$dx = \sec^2\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec\theta} = \int \sec\theta d\theta$$

$$\boxed{I = \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+C}$$

b) *Al completar el trinomio cuadrado perfecto queda una integral inmediata*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$

$$\boxed{= angsen\left(\frac{x+2}{3}\right)+C}$$

c) Por fracciones parciales

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int \left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)} \right] dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(X+2) + B(X-1)$$

$$si \quad x = 1 \qquad\qquad si \quad x = -2$$

$$A = \frac{1}{3} \qquad\qquad B = -\frac{1}{3}$$

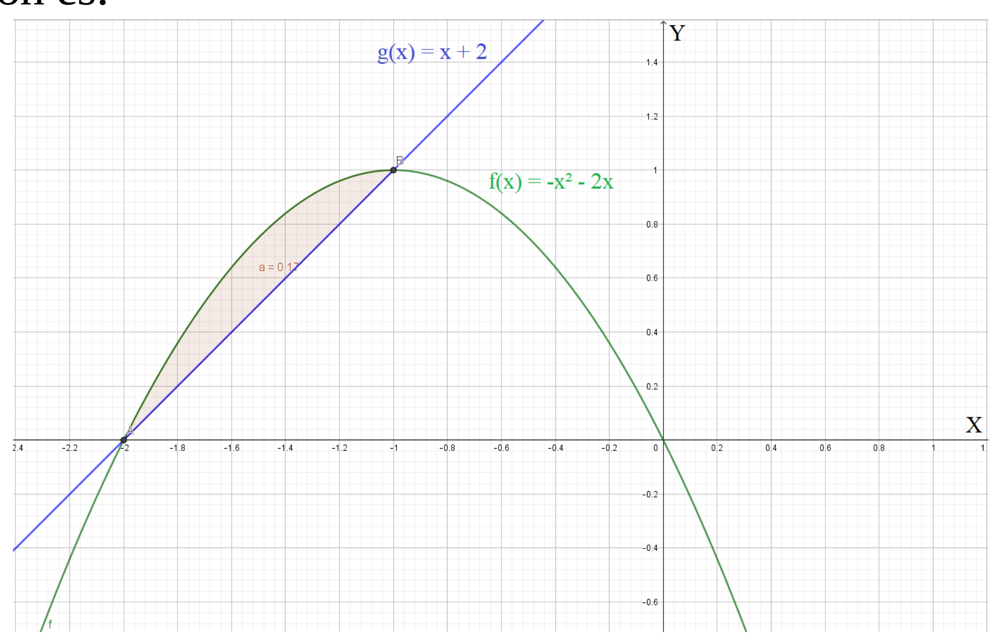
$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} ln(x-1) - \frac{1}{3} ln(x+2) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} + C}$$

30 Puntos

---

4. La región es:



$$A=\int_{-2}^{-1}\left(-x^{2}-2x-x-2\right)dx=\boxed{\frac{1}{6}u^{2}}$$

10 Puntos

5.

$$\frac{df}{ds}=\left(\cos x,-seny\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{\frac{df}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

20 Puntos

6.

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=ve^{u}y\cos(xy)+e^{u}\left(\frac{y}{x}\right)$$

si

$$x=\frac{\pi}{2}\qquad\Longrightarrow\qquad u=1$$

$$y=1\qquad\Longrightarrow\qquad v=ln\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=ln\frac{\pi}{2}e(0)+e\frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}=e\left[\frac{2}{\pi}\right]}$$

10 Puntos