UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

6 de junio de 2017 | ***1221*** | ***Semestre 2017-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

---

1. Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n (n+1)^2}$$

20 Puntos

---

2. Sea la función

$$f(x) = 3x^2 - 5x^4 \qquad \text{para} \qquad x \in [-1, 1]$$

calcular el o los valores de C que pertenezcan a dicho intervalo para los cuales se cumple el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

15 Puntos

---

3. Efectuar las integrales:

$$a)\ \int x^3 \operatorname{sen} x^2 dx \qquad\qquad b)\ \int \frac{2x-4}{x^3+4x} dx$$

20 Puntos

4. Calcular el área de la región del plano cartesiano, limitada por las curvas

$$C_1: \quad y = 10x - x^2 \qquad y \qquad C_2: \quad y = 3x - 8$$

10 Puntos

---

5. Obtener la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ **en el punto** $P\,(1, 1, 3)$.

20 Puntos

---

6. Sea $z = x^2 y + 3xy^4$ **donde** $x = sen\ 2t\ ,\quad y = \cos t$.

Obtener $\dfrac{dz}{dt}$ **cuando** $t = 0$

15 Puntos

1.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{3^{n}+1\left[(n+1)+1\right]^2}}{\dfrac{1}{3^n(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n(n+1)^2}{3^{n+1}(n+2)^2}\right|=\frac{1}{3}=L$$

El radio de convergencia de la serie es $r=\dfrac{1}{L}=\dfrac{1}{1/3}=3$

por lo que la serie es convergente para valores de x en el intervalo

$$|x-4|<3 \quad \to \quad -3<x-4<3 \quad \to \quad 1<x<7$$

Analizando el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo

Si $x=1$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n(n+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^n(n+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

que por el criterio de Leibniz es convergente

Si $x=7$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{3^n(n+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ que también es

convergente y por lo tanto el intervalo de convergencia de la serie es

$\boxed{1\le x\le 7}$

20 puntos

2. Si

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(3x^2-5x^4\right)dx = \left[x^3-x^5\right]_{-1}^{1} = (1-1)-(-1+1)=0$$

$$\Rightarrow \frac{3c^2-5c^4}{1-(-1)}=0, \quad 3c^2-5c^4=0, \quad c^2\left(3-5c^2\right)=0$$

$$\boxed{c_1=0 \quad y \quad c_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}}$$

15 Puntos

3.

Solución

a) Por partes

$$\left|\begin{array}{l} u=x^2 \\ du=2x\,dx \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} dv=sen\,x^2\left(xdx\right) \\ v=-\frac{1}{2}cos\,x^2 \end{array}\right.$$

$$I=-\frac{1}{2}x^2\left(cos\,x^2\right)+\int cos\,x^2\left(2x\,dx\right)$$

$$=\boxed{-\frac{1}{2}x^2\left(cos\,x^2\right)+\frac{1}{2}\left(sen\,x^2\right)+C}$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

$$\frac{2x-4}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\ ;$$

$$2x-4=A\left(x^2+4\right)+\left(Bx+C\right)x \Rightarrow \begin{cases} si\ \ x=0 & \Rightarrow\ \boxed{-1=A} \\ si\ \ x=1 & \Rightarrow\ 3=B+C \\ si\ \ x=-1 & \Rightarrow -1=B-C \end{cases}$$

$$de\ donde\quad \boxed{1=B}\quad y\quad \boxed{2=C}$$

$$\Rightarrow I=\int\left[-\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2+4}\right]dx$$

$$=-lnx+\frac{1}{2}ln\left(x^2+4\right)+2\left[\frac{1}{2}ang\,tan\frac{x}{2}\right]+C$$

$$=\boxed{ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\right)+\left(ang\,tan\frac{x}{2}\right)+C}$$

20 Puntos

4.

Para las intersecciones

$$10x-x^2=3x-8\ ,\ x^2-7x-8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=8 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$A=\int_{-1}^{8}\left[\left(10x-x^2\right)-\left(3x-8\right)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{8}\left(8+7x-x^2\right)dx$$

$$=\left[8x+\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{8}$$

$$= 8(8+1) + \frac{7}{2}(64-1) - \frac{1}{3}(512+1)$$

$$= 72 + \frac{441}{2} - \frac{513}{3}$$

$$= \frac{1}{6}(432 + 1323 - 1026) = \frac{729}{6}$$

$$= \boxed{\frac{243}{2}u^2}$$

15 Puntos

5.

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2$$

$$f_x(x,y) = 4x \qquad f_y(x,y) = 2y$$

$$f_x(1,1) = 4 \qquad f_y(1,1) = 2$$

Por lo que la ecuación solicitada es

$$z - 3 = 4(x-1) + 2(y-1)$$

$$z - 3 = 4x - 4 + 2y - 2$$

$$\boxed{4x + 2y - z - 3 = 0}$$

20 Puntos

6.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dy} = \left(2xy + 3y^4\right)(\cos 2t)2 + \left(x^2 + 12xy^3\right)(-\operatorname{sen} t)$$

Cuando $t = 0$ $\begin{cases} x = \operatorname{sen}(0) = 0 \\ y = \cos(0) = 1 \end{cases}$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = (0+3)2(\cos 0) + (0+12)(-\operatorname{sen} 0)$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = 6}$$

15 Puntos