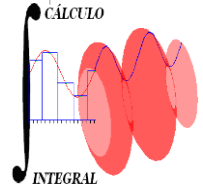




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS  
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS  
CÁLCULO INTEGRAL  
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO



4 de diciembre de 2019

Semestre 2020-1

**INSTRUCCIONES:** Lee cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

1. Mediante el criterio del Cociente o de D'Alembert determina el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

**15 Puntos**

2. Calcula, si existe, el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \cos x)^{\csc x}$$

**15 Puntos**

3. Efectúa las integrales:

a)  $\int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{2}x - 1}$

b)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

c)  $\int \frac{x \operatorname{sen}^2(x^2)}{\operatorname{sec}(x^2)} dx$

**30 Puntos**

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = 12x^3 + 12x^2 \quad \text{y de} \quad y = 0$$

Representa gráficamente la región.

**10 Puntos**

5. Obtén las curvas de nivel de la función  $f$  para  $z = 0$  y  $z = 3$ , represéntalas gráficamente y traza la gráfica del dominio de la función.

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2}$$

**15 Puntos**

6. Obtén la ecuación cartesiana del plano tangente a la gráfica de la función

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad \text{en el punto } P(2, 2).$$

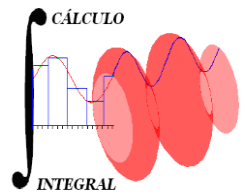
**15 Puntos**



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Segundo Examen Final  
Semestre 2020 – 1



1.

Sea

$$r = \frac{\frac{n+1!}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)(n+1)!}{n(n+2)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r = 0 = \rho$  como  $|\rho| < 1$ , la serie converge

15 Puntos

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \cos x)^{\csc x} = 1^\infty$$

$$\text{sea } y = (x + \cos x)^{\csc x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \csc x \ln(x + \cos x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln y] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + \cos x)}{\sen x} = \frac{0}{0}$$

se puede aplicar L'Hopital

$$\ln \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} y \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1 - \sen x}{\cos x (x + \cos x)} \right]$$

$$\ln \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} y \right] = 1$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \cos x)^{\csc x} = e}$$

15 Puntos

## 3. solución

a) Por fracciones parciales

Sea la fracción 
$$\frac{1}{(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-\frac{1}{2}};$$

$$1 = A\left(x - \frac{1}{2}\right) + B(x+2) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{B = -\frac{2}{5}} \\ \text{si } x = -2 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{2}{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \left[ -\frac{2}{5(x+2)} + \frac{2}{5\left(x-\frac{1}{2}\right)} \right] dx$$

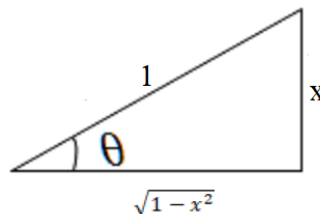
$$\Rightarrow \boxed{I = \ln \sqrt[5]{\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{(x+2)^2}} + C}$$

b) Por sustitución trigonométrica

$$x = \operatorname{sen} \theta$$

$$\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta$$



$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^3 \theta} \cos \theta d\theta = \int \tan^2 \theta d\theta = \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta$$

$$I = \tan \theta - \theta + C = \boxed{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{ang} \operatorname{sen} x + C}$$

c) se puede escribir

$$I = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}^2(x^2) [2x \cos(x^2) dx]$$

se completa la diferencial

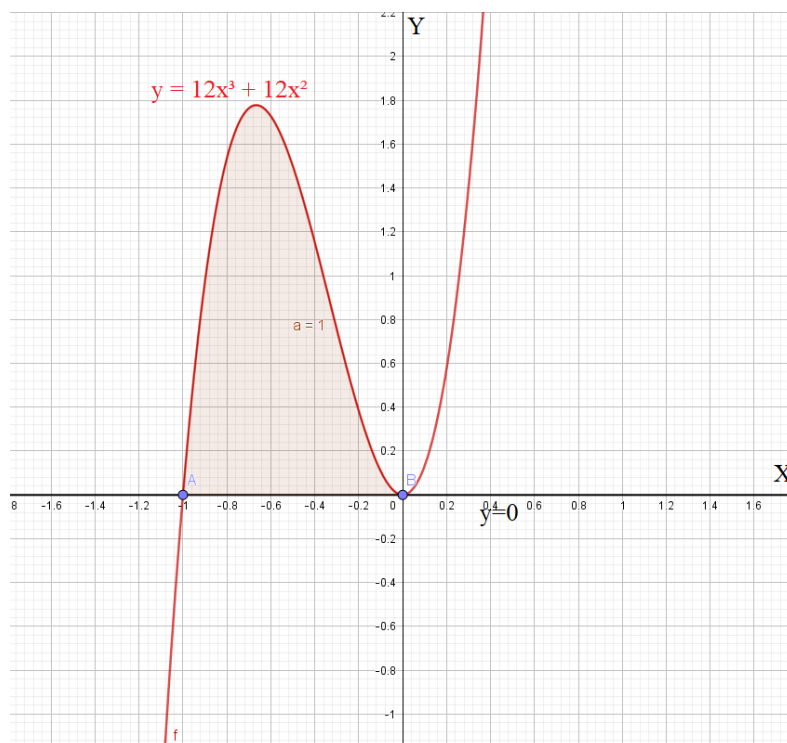
$$I = \frac{1}{6} \operatorname{sen}^3(x^2) + C$$

30 Puntos

4.

$$A = \int_{-1}^0 (12x^3 + 12x^2) dx = 1 \text{ u}^2$$

La región es:

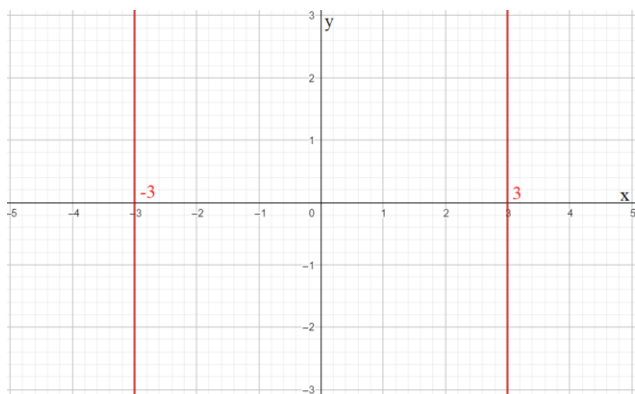


10 Puntos

5.

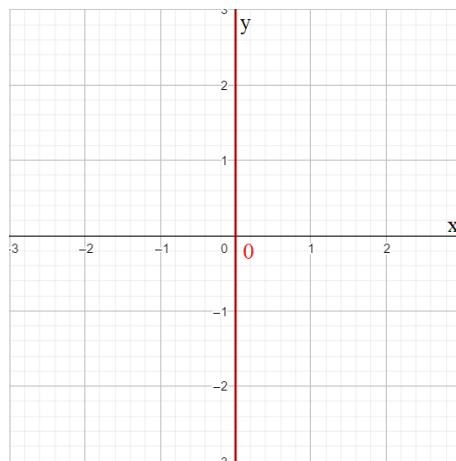
$$\text{si } z = 0$$

$$x = 3 \quad \text{y} \quad x = -3$$



$$\text{si } x = 3$$

$$x = 0$$



15 Puntos

6.

La ecuación del plano está dada por:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_p (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_p (y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z} \Big|_p (z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow -2(x - 2) - 2(y - 2) - (z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2x + 2y + z = 9}$$

15 Puntos