NATURALIS

BOLETÍN DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA GENERAL Y QUÍMICA

No. 9 noviembre de 2007

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

SÓLO MANZANAS, SÓLO ELEFANTES, ELECTROMAGNETISMO Y MATEMÁTICAS

Alberto Sánchez Moreno (asanchez@nucleares.unam.mx)
Salvador Enrique Villalobos Pérez(villasalen@yahoo.com.mx)
Departamento de Física General y Química, División de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Resumen.
Se presenta una revisión didáctica del concepto de carga de polarización, tema correspondiente al curso de Electricidad y Magnetismo de la División de Ciencias Básicas que se dicta en la Facultad de Ingeniería.

Presentación

Siempre hemos quedado maravillados cuando observamos la vinculación ineludible entre la física y las matemáticas y al darnos cuenta que cuando nos acercamos a la mejor descripción de la naturaleza no podemos distinguir entre una y otra. Lamentablemente este es un sentimiento que no todos comparten. Sirva pues este trabajo para mostrar un ejemplo de lo que se menciona, esperando que pueda motivar a todas las personas que estén relacionadas con estas materias a tener el mismo sentimiento.

Introducción

Cuando estudiamos física pocas veces recordamos que el conocimiento adquirido durante nuestra educación primaria ha sido fundamental para el mejor desempeño de nuestra labor académica. Como ejemplo, consideremos la siguiente aseveración hecha por alguno de nuestros profesores de educación primaria y que utilizaremos en este artículo:

"Recuerden niños, sólo pueden sumar manzanas con manzanas o elefantes con elefantes, pero ¡¡¡nunca!!! manzanas y elefantes, eso no se puede"

Esto, que parecería algo sin importancia se vuelve fundamental cuando queremos verificar si algo anda mal en nuestros cálculos o para sacar alguna conclusión física sin la necesidad de desarrollos matemáticos tediosos. Lamentablemente durante nuestra labor académica hemos notado que muchos de nosotros no hemos comprendido ni aprendido a utilizar esta enseñanza que tan noblemente nuestros profesores de educación básica nos dieron. En este trabajo mostraremos cómo podemos utilizar esta enseñanza y el cálculo vectorial en la teoría electromagnética para obtener las expresiones que permiten calcular las densidades de carga de polarización.

Matemáticas

El cálculo vectorial es una herramienta indispensable para el electromagnetismo, basta recordar que es gracias a estas matemáticas que podemos entender y manejar muchos de nuestros conceptos físicos. Para el caso particular que estamos analizando utilizaremos las siguientes propiedades vectoriales[1]:

Sea $\vec{r}$ un vector de posición cuya magnitud denotaremos por r, entonces:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad (1)$$

donde ∇ es el operador nabla. Además, si f es una función escalar y $\vec{F}$ una función vectorial , entonces:

$$\nabla\cdot\left(f\ \vec{F}\right)=f\ \nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla f\ . \qquad (2)$$

También, si $\vec{A}$ es una campo vectorial y consideramos un volumen V encerrado por una superficie S. Entonces, la siguiente igualdad es cierta:

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_V \nabla\cdot\vec{A}dV. \qquad (3)$$

Ésta se conoce como el teorema de la divergencia y relaciona la integral de superficie del campo vectorial $\vec{A}$ con la integral de volumen de su divergencia.

Electromagnetismo y Matemáticas

En electromagnetismo se necesita tener una descripción macroscópica del comportamiento de los medios dieléctricos bajo la influencia de un campo eléctrico externo en función del comportamiento microscópico promedio de los constituyentes de la materia. Suponemos que, en promedio las características dominantes de la materia que pueden ser de interés para este propósito son aquellas asociadas exclusivamente con los momentos dipolares eléctricos, es decir, en este estudio partimos de la siguiente hipótesis[2].

En lo que concierne a sus propiedades eléctricas, la materia eléctricamente neutra es equivalente a una configuración de dipolos eléctricos

Ahora, para formular esta hipótesis de manera cuantitativa definimos una cantidad vectorial conocida con el nombre de **vector de polarización**. Para ello consideremos un elemento de volumen ΔV de un medio dieléctrico que, como un todo, es eléctricamente neutro. Si el medio está en un campo eléctrico externo aquel estará polarizado, como se muestra en la figura 1.

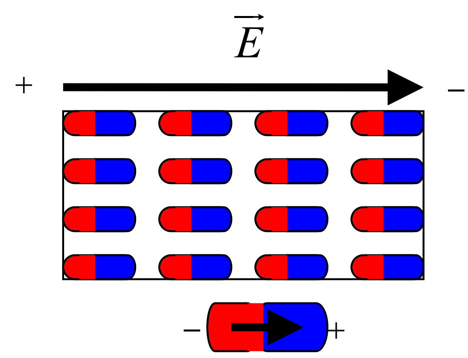


Fig. 1

Entonces se ha producido una separación de cargas positivas y negativas y el elemento de volumen se caracteriza por un momento dipolar eléctrico dado por la expresión

$$\Delta\,\vec{p}=\sum_{m=1}^{n}\vec{p}_m\ , \qquad (4)$$

donde $\sum_{m=1}^{n}\vec{p}_m$ es la suma de los momentos dipolares de cada molécula que se encuentra en el elemento de volumen ΔV [3]. Ahora, como $\Delta\vec{p}$ depende del tamaño del elemento de volumen, es más conveniente definir una nueva cantidad que sea el momento dipolar eléctrico de la ecuación (4) por unidad de volumen, la cual se denota por $\vec{P}$ y debe definirse como el límite de esta cantidad a medida que ΔV se hace muy pequeño desde el punto de vista macroscópico. Este vector recibe el nombre de **vector de polarización eléctrica** o simplemente **polarización del medio**, esto es:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV} , \qquad (5)$$

de modo que $\vec{P}$ se convierte en una función puntual. Ahora, utilizando el hecho de que el potencial para un dipolo eléctrico tiene la forma

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} , \qquad (6)$$

donde $\vec{p}$ es el momento dipolar eléctrico y $\vec{r}$ indica el punto donde se quiere calcular el potencial, vamos a calcular el potencial en un punto exterior a una porción finita de material dieléctrico polarizado, es decir, que está caracterizado en cada punto $\vec{r}'$ por una polarización $\vec{P}(\vec{r}')$, como se muestra en la figura 2.

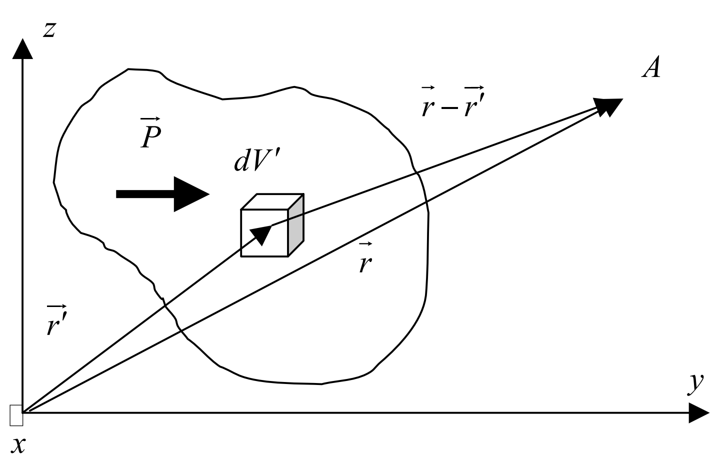


Fig.2

Entonces, cada elemento de volumen dV' del medio dieléctrico se caracteriza por un momento dipolar:

$$d\vec{p} = \vec{P} dV' . \qquad (7)$$

Así, de acuerdo con (6) en el punto A se produce un potencial dado por la ecuación:

$$dV_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} , \qquad (8)$$

donde $\vec{r} - \vec{r}'$ es el vector dirigido hacia fuera desde dV', cuya magnitud está dada, en coordenadas cartesianas, por:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} , \qquad (9)$$

por tanto, el potencial total en el punto A se obtiene sumando las contribuciones de todas las partes del dieléctrico, es decir, integrando la relación (8), esto es:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} . \qquad (10)$$

Ahora vamos a darle otra forma al integrando de la ecuación (10). Utilizando la relación vectorial (1), obtenemos:

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} , \qquad (11)$$

aquí la prima indica derivación con respecto a las coordenadas primadas. Con esta relación el integrando de la ecuación (10) toma la forma :

$$\frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) . \qquad (12)$$

Ahora, utilizamos la identidad vectorial (2), con $f = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ y $\vec{F} = \vec{P}$ para obtener:

$$\vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \cdot \vec{P}, \qquad (13)$$

sustituyendo (13) en (12) y después el resultado en (10) obtenemos:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla' \cdot \vec{P} \right] dV',$$

distribuyendo y aplicando el teorema de la divergencia, ecuación (3), a la primera integral tendremos que:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}da' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\left(-\nabla'\cdot\vec{P}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dV', \quad (14)$$

De manzanas y Elefantes

Pues bien, es tiempo de utilizar lo que mencionamos en la introducción, es decir, lo que aprendimos de nuestros profesores de educación básica. Obsérvese cuidadosamente la relación (14), del lado izquierdo de la igualdad tenemos una cantidad que se mide en **volts**, digamos **elefantes**; por tanto del lado derecho de la igualdad los términos que se suman **deben** tener como unidades **elefantes**, es decir, **volts**. Entonces para que esto suceda la cantidad $\vec{P}\cdot\hat{n}\; da'$ del primer término del lado derecho debe tener unidades de carga, igual que la cantidad $-\nabla'\cdot\vec{P}\; dV'$ del segundo término. Así podremos sumar **elefantes** con **elefantes**, para que el resultado sea **elefantes**. Como esto se escucha extraño y poco profesional digámoslo nuevamente: **debemos sumar volts con volts para obtener como resultado volts** y así nuestra igualdad será correcta. Esto se puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$\frac{dq}{da'} = \vec{P}\cdot\hat{n}\ , \quad (14)$$

$$\frac{dq}{dV'} = -\nabla'\cdot\vec{P}\ . \quad (15)$$

La expresiones $\frac{dq}{da'}$ y $\frac{dq}{dV'}$, nos indican la cantidad de carga por unidad de superficie y de volumen en el dieléctrico, el cual está polarizado por estar en un campo eléctrico. Por tanto, el nombre común que reciben estas cantidades son: **densidad superficial de carga de polarización** σ_P y **densidad volumétrica de carga** de polarización ρ_P y donde $\hat{n}$ es un vector unitario perpendicular a la superficie da'. σ_p es la carga por unidad de superficie que se forma a partir de los extremos del dipolo con igual orientación, de modo que crea una densidad de carga en cada superficie. $\rho_P dV'$ representa el exceso de carga o la carga neta del elemento de volumen dV'. De todo esto podemos concluir que la carga de polarización total de un cuerpo dieléctrico es:

$$Q_P = \int_V \left(-\nabla'\cdot\vec{P}\right)dV' + \oint_S \vec{P}\cdot\hat{n}da', \quad (16)$$

y debe ser igual a cero ya que nuestra premisa fue que el dieléctrico, como un todo, era eléctricamente neutro.

Conclusiones

Utilizando conceptos de teoría electromagnética hemos tratado de poner en evidencia la estrecha vinculación entre matemáticas y física, mostrando también que los conocimientos previamente aprendidos en los primeros cursos de educación básica pueden resultar de gran utilidad si queremos entender conceptos más complicados. Con estas consideraciones hemos presentado una revisión sobre el cálculo de las densidades de polarización para un medio dieléctrico en presencia de un campo eléctrico externo.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, y a su departamento de Física General y Química, la oportunidad de publicar este trabajo.

Referencias

1. J. E. Marsden y A. J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, Fondo Educativo Interamericano. 1976.
2. R. K. Wangsness, *Campos Electromagnéticos*, Limusa. 1999.
3. J. R. Reitz, F. J. Milford y R. W. Christy, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, Addison-Wesley Company, Inc. (1960).
4. W. Greiner, Classical Electrodynamics, Springer- Verlag New York , Inc., 1991.
5. R. Resnick y D. Halliday Física, Vol. 2, C.E.C.S.A., (1960).

MOMENTO ANGULAR DEL ELECTRÓN

Rogelio Soto Ayala (rsoto54@hotmail.com.)
Departamento de Física General y Química, División de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNAM.

El momento angular es una magnitud muy importante en todas las teorías físicas, que abarcan desde la mecánica clásica hasta la mecánica cuántica.

En mecánica newtoniana, el momento angular ($\vec{L}$) de una partícula, es igual al producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$, en relación con la recta considerada como eje de rotación, por la cantidad de movimiento $\vec{p}$ (también llamado momento lineal o simplemente momento),

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

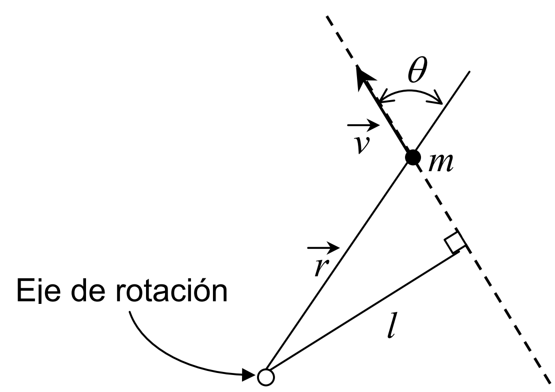
En ausencia de momentos de fuerzas externas, el momento angular de un conjunto de partículas, de objetos o de cuerpos rígidos se conserva. Esto es válido tanto para partículas subatómicas como para galaxias.

En el dibujo que aparece a continuación se muestra una partícula de masa m que se desplaza a una velocidad $\vec{v}$. El momento angular de esta partícula, con respecto a la recta perpendicular al plano que contiene a $\vec{r}$ y $\vec{v}$, es, como ya se indicó:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

El vector $\vec{L}$ es perpendicular al plano que contiene a $\vec{r}$ y $\vec{v}$ y, por lo tanto, es paralelo a la recta considerada como eje de rotación (en este caso, el vector momento angular se dirige hacia el lector). Su módulo es:

$$L = mrvsen\theta = prsen\theta = pl$$



Es decir, el módulo del momento angular es igual al momento lineal multiplicado por la distancia más corta entre el eje de rotación y la recta que contiene la velocidad de la partícula.

Si se deriva el momento angular con respecto al tiempo,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = (\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}) + (\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt})$$

La expresión dentro del primer paréntesis vale cero, ya que la derivada de $\vec{r}$ con respecto al tiempo es la velocidad $\vec{v}$, la cual es paralela a la cantidad de movimiento $\vec{p}$. Por lo tanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Es decir, la derivada temporal del momento angular es igual al torque ($\vec{\tau}$) aplicado a la partícula.

La expresión anterior se puede generalizar al considerar torques producidos por fuerzas internas (entre partículas) y torques producidos por fuerzas externas,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_i$$

Sin embargo, en el caso de fuerzas internas, los torques producidos por cada una de las fuerzas sobre las partículas son iguales y de signos contrarios, de tal manera que su suma se anula. Si aunado a esta condición no existen fuerzas externas, se tiene que,

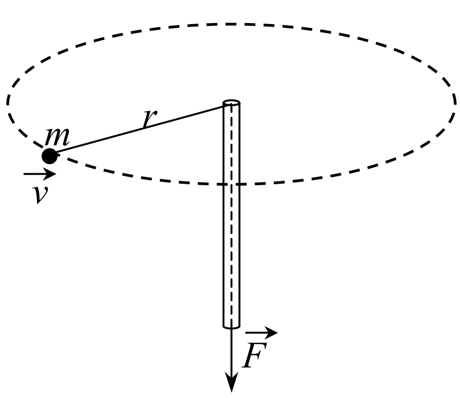
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0}$$

Que significa que en ausencia de fuerzas externas, el momento angular de un conjunto de partículas es constante; es decir, el momento angular se conserva.

En el dibujo que se muestra a continuación, una partícula de masa m gira, sostenida por un hilo de masa despreciable, y que pasa por un pequeño tubo. En ausencia de fuerzas de fricción y efectos gravitatorios, el momento angular de la partícula se conserva, al jalar el hilo a través del tubito. Esto se explica a través de la igualdad siguiente:

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2$$

de donde, $v_2 = v_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$. Ya que al jalar el hilo el radio de giro disminuye, $\left(\frac{r_1}{r_2}\right) > 1$ y $v_2 > v_1$ (esto aplicado a los electrones en el átomo, implica que los electrones más internos giran a mayor velocidad que los más externos).



Continuando con el estudio del átomo, el tratamiento que sigue hace intervenir el momento angular del electrón en las relaciones energéticas que se obtienen cuando un electrón brinca de una capa más externa a una más interna. Para simplificar se considerará el átomo de hidrógeno.

Cuando un electrón realiza el brinco cuántico anterior, se emite un fotón cuya energía es:

$$hf = h\left(\frac{c}{\lambda}\right) = E_e - E_i = \Delta E$$

donde E_e es la energía del electrón en la capa externa, y E_i, es la energía del electrón en la capa interna. Al despejar $\frac{1}{\lambda}$ e igualar a la ecuación de Balmer, se tiene,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\Delta E}{hc} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

sin embargo, ya que el electrón en cada capa posee energía cinética y potencial electrostática,

$$\Delta E = \frac{1}{2}m(v_e^2 - v_i^2) - ke^2\left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_i}\right)$$

De la expresión $L = mvr$, $v^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2}$, que sustituida en la expresión anterior da,

$$\Delta E = \frac{m}{2}\left[\frac{L_e^2}{m^2 r_e^2} - \frac{L_i^2}{m^2 r_i^2}\right] - ke^2\left[\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_i}\right],$$ o sea,

$$\Delta E = \frac{1}{2m}\left[\frac{L_e^2}{r_e^2} - \frac{L_i^2}{r_i^2}\right] - ke^2\left[\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_i}\right] \ldots (1)$$

Por otra parte, para que el electrón se mantenga girando en su órbita, se debe cumplir:

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$; es decir, $r = \frac{ke^2}{mv^2}$

Al introducir el valor de L en esta expresión se tiene que,

$$r = \frac{ke^2}{m\left(\dfrac{L^2}{m^2 r^2}\right)} = \frac{mke^2 r^2}{L^2}$$

y al despejar nuevamente r se obtiene,

$$r = \frac{L^2}{mke^2}$$

de tal manera que la expresión (1) se puede escribir como:

$$\Delta E = \frac{1}{2m}\left[\frac{L_e^2}{\dfrac{L_e^4}{m^2k^2e^4}} - \frac{L_i^2}{\dfrac{L_i^4}{m^2k^2e^4}}\right] - ke^2\left[\frac{1}{L_e^2} - \frac{1}{L_i^2}\right]mke^2$$

$$\Delta E = \frac{mk^2e^4}{2}\left[\frac{1}{L_e^2} - \frac{1}{L_i^2}\right] - mk^2e^4\left[\frac{1}{L_e^2} - \frac{1}{L_i^2}\right],$$

Finalmente,

$$\Delta E = \frac{mk^2e^4}{2}\left[\frac{1}{L_i^2} - \frac{1}{L_e^2}\right],$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{mk^2e^4}{2hc}\left[\frac{1}{L_i^2} - \frac{1}{L_e^2}\right] = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Para que los dos últimos términos fueran iguales, Bohr genialmente consideró que el momento angular del electrón debería expresarse como,

$$L = \frac{nh}{2\pi}$$

donde n es un entero positivo. Esta igualdad implica intrínsecamente que el momento angular del electrón está cuantizado (n es el número de capa u órbita donde se encuentra el electrón).

De esta manera, la constante de Rydberg se expresa como:

$$R = \frac{2\pi^2 mk^2e^4}{ch^3}$$

Si se sustituyen los valores de las constantes en la expresión anterior, se obtiene el valor experimental conocido de la constante de Rydberg ($1.09737x10^7$ [m^{-1}]).

Hay muchos fenómenos en los cuales la conservación del momento angular se verifica. A continuación se citan dos de ellos.

1.- Cuando una patinadora gira, extendiendo los brazos, su rapidez de rotación disminuye. Si cruza los brazos sobre su pecho, incrementa su rapidez.

2.- Algunas estrellas se contraen convirtiéndose en estrellas de neutrones (pulsares). Su diámetro disminuye hasta algunos kilómetros, y su velocidad de rotación aumenta enormemente. Se han detectado pulsares con períodos de rotación de tan sólo algunos milisegundos.

Referencias

1. Momento angular. Wikipedia, la Enciclopedia Libre.

No hay caso,
pasan los años y siempre se llega la misma conclusión,
se educa con el ejemplo

Anónimo

EDITORIAL

Se acerca el fin de un semestre más y con ello la alegría de haber concluido satisfactoriamente nuestros deberes académicos o la tristeza de no haber logrado nuestras metas; sin embargo, no cabe duda que para la gran mayoría de los alumnos, profesores y empleados de esta nuestra DCB, es reconfortante el periodo vacacional diciembre-enero, ya que nos permite recargar las baterías para el año que se aproxima y empezar con energías renovadas el semestre 2008-2; por ello, los que colaboramos en la publicación del boletín *NATURALIS*, les deseamos unas felices fiestas decembrinas y un año 2008 lleno de éxitos.

Alfredo Velásquez Márquez

Profesor de la DCB encargado del Boletín NATURALIS

http://dcb.fi-c.unam.mx/boletines/Fisica/index.phtml

naturalis777@yahoo.com.mx