¿Por qué mis alumnos aprenden fácilmente a... odiar Álgebra Lineal?

Hugo Germán Serrano Miranda
Facultad de Ingeniería, UNAM

Desafortunadamente es poco conocido que los libros científicos más valiosos son aquellos en los que el autor claramente nos indica qué es lo que él no conoce; de un autor lo que más daña a sus lectores es encubrir las dificultades

Evariste Galois

Aclaraciones

Esta ponencia tiene por objeto invitar a hacer una autorreflexión acerca de la forma en que enseñamos a nuestros alumnos, la asignatura de Álgebra Lineal, los juicios que aquí expongo, inciden directamente en el programa de la materia aludida, en tanto que es instrumento teórico-práctico que sirve de orientador en el proceso de aprendizaje[1], los antecedentes y sobre todo, al material bibliográfico recomendado que, como algunos de ustedes saben, además de ser un apoyo tanto para profesores como para los alumnos, también marcan **la pauta, el ritmo, el tono y el volumen** con el que debe **marchar** el curso.

Parte de la respuesta al porqué un alumno puede llegar a odiar esta asignatura, es posible encontrarla en la formulación de los instrumentos de aprendizaje[2] de Álgebra Lineal, es decir, conocer un poco acerca de **cuáles deben ser los elementos teóricos** que explican **el cómo se da el fenómeno del aprendizaje en esta teoría lógico-formal,** así como también, **que factores intervienen en dicho fenómeno,** en otras palabras, entender una parte de porqué los alumnos pueden aborrecer Álgebra Lineal, implica entender la forma en que los alumnos aprenden esta asignatura y como influye en este aprendizaje, el programa de la asignatura, los materiales de apoyo como libros, apuntes, series etc.; la práctica y la forma de cómo se implementan los exámenes departamentales, los **antecedentes conceptuales tanto de los profesores** para impartir la materia, como de los alumnos al aprenderla, la actitud del profesor, etc., etc.

En esta ponencia, pretendo aportar algunos juicios de valor sobre las opiniones vertidas en una encuesta realizada hace aproximadamente 4 años, la encuesta se efectuó a varios de mis alumnos en las asignaturas de Estática, Cálculo III y Ecuaciones Diferenciales; que tuvieron dificultades al aprender (que no quiero decir acreditar) la asignatura de Álgebra Lineal.

El ejercicio indagatorio consistía de una sola pregunta, a saber: **¿Cuales son tus impresiones acerca de la asignatura de Álgebra Lineal?**; se aclaraba al encuestado que de acuerdo a como interpretara la pregunta(¿?), contestara lo que se le pegara la gana sin preocuparse por la forma del lenguaje escrito, pero eso sí, con la firmeza y la pasión acordes a lo que habían aprendido en la citada asignatura.

---

[1] Díaz Barriga, Ángel, *Un enfoque metodológico para la elaboración de programas escolares*, revista Perfiles Educativos, México. CISE, UNAM, Oct. Nov. Dic. No 10.

[2] De ninguna manera me refiero a los objetivos específicos elaborados a finales de los 70's, ni a las adiestradoras notas de sugerencias para impartir la asignatura elaboradas a mediados de los 80's; me refiero a los elementos básicos de un modelo de teoría del conocimiento.

Desde luego, estaré totalmente de acuerdo con ustedes, que este ejercicio será todo lo que pueda denominarse, pero no cubre los mínimos requisitos de lo que debe ser una encuesta, sin embargo, es interesante leer la opinión de ciertos alumnos acerca de esta asignatura, con toda la despreocupación posible y abiertamente, sin preguntas tendenciosa susceptible de interpretar al cobijo de los modelos estadísticos.

Con el ánimo de no incurrir en un **talk show** algebraico, debo decirles sinceramente que me reservo el derecho de no poder comentar con ustedes los resultados del "disque análisis" de dicha encuesta. A juzgar por el diseño de tan atropellado acopio de información, no es difícil adelantarles que hubo no pocos casos de opiniones temperamentales, algunas cargadas de cólera desenfrenada y en otros hasta mentadas sin hacer referencia directa a la madre. A pesar del tono especial de estos casos, con un poco de tolerancia y sensibilidad era posible detectar esa latente sinceridad y de buenos deseos potenciales para las nuevas generaciones, pues abundaban frases tales como: **deberían enseñarla de tal modo que..., si los maestros que la imparten tomaran en cuenta..., no se para que la dan si no le veo donde tenga aplicaciones..., A veces dudo si mi maestro conserva la cordura cuando expone la clase..., La materia está bien fumada...**

En fin, debo confesarles con toda honestidad que el resultado de la práctica de este ejercicio disparatado, me inspiró un sentimiento de identificación y solidaridad, y me trajo a la mente uno que otro amargo recuerdo, pues se me olvidaba que yo también fui alumno y tuve también mis descalabros con esta materia.

Breve bosquejo historico de la asignatura

Los contenidos de **Álgebra Lineal**, tal como la conocemos actualmente en la División de Ciencias Básicas (DCB), nació a partir de la fragmentación de la asignatura de **Álgebra**, la cual se impartía al inicio de los 70's, la nueva asignatura de Álgebra Lineal hereda por defecto, el apellido de la temática algebraica que tardíamente adoptaríamos, a finales de los 70's, como símbolo de modernidad.

Al respecto es preciso recordar que en el inicio de los 70's, la teoría de los sistemas lineales se estaba desarrollando intensamente en nuestra Facultad, y requería de las bases conceptuales del Álgebra Lineal aplicada a las ecuaciones diferenciales y los procesos de optimación, para poder abordar las asignaturas de Ingeniería de Control, Ingeniería de Sistemas, entre otras asignaturas, dato curioso, los administradores académicos de la materia de Control I, se asombraban de que en los exámenes departamentales no llegaban a pasar más del 2% de la totalidad de alumnos que cursaban dicha materia, se argumentaba que no sabían Álgebra Lineal, entre otras cosas. Sin embargo, hasta donde me he documentado, estas necesidades no fueron la verdadera causa por lo que se adoptó el nombre de Álgebra Lineal.

Para efectuar un breve análisis de los contenidos de la asignatura de Álgebra (la de 1973), es preciso referirse a los apuntes de esta asignatura publicados por primera vez, en edición rústica a mano, en 1973[3], estos apuntes los realizaron los profesores de aquella nostálgica sección de Matemáticas, perteneciente a la **Coordinación de Materias Propedéuticas del Edificio Anexo de la Facultad de Ingeniería**[4], cabe señalar que en esa época, se inicia la labor editorial de manera fructífera en esta entidad académica, pues se editó la mayoría de las asignaturas de matemáticas de ese entonces, tales como matemáticas I, matemáticas II, matemáticas III, matemáticas IV y métodos numéricos.

Los citados apuntes de Álgebra, reflejaba en gran medida la personalidad intelectual de los profesores autores, a saber: originalidad, capacidad de unificar lo diverso tomando como criterio aspectos conceptuales comunes; conocimiento y sentido de análisis, síntesis y argumentación en los desarrollos escritos; bibliografía congruente y equilibrada con la calidad de los temas; coherencia, integración temática y sobre todo la inteligencia de la brevedad: **como principio de respeto a la atención de los lectores, los apuntes de Álgebra contenían 150 páginas.**

---

[3] ÁLGEBRA, primera parte temas I al V, Sección de Matemáticas, Coordinación de Materias Propedéuticas, Facultad de Ingeniería, 1973

[4] Esta designación puede parecer peyorativa para algunos, sin embargo los calificativos EDIFICIO ANEXO y EDIFICIO PRINCIPAL obedecen a simples costumbres que tienen mucho de raíces populares y antropológicas y también de políticas de exclusión, por lo tanto es difícil erradicarlas por decretos administrativos. En fin, me refiero a las instalaciones por su situación geográfica y por la costumbre de tanto oír y convivir con el término.

Por otro lado cubría una gama de contenidos que, bajo la óptica actual de nuestros programas de matemáticas, podrían parecer tópicos aparentemente dispersos; sin embargo los profesores que escribieron las citadas notas, tuvieron la sensibilidad didáctica de unificar toda esa aparente dispersión, tomando como eje el concepto categórico y sustancial: **la noción de espacio vectorial**, concepto que constituye la columna vertebral del Álgebra Lineal, sin lugar a dudas, la inteligencia y sensibilidad pedagógica son los rubros que guían el aspecto central y metodológico de los contenidos que tenía esa disciplina, a fin de poder dar consistencia y fundamento con otras asignaturas posteriores.

Álgebra Lineal (la de 1973) no era nada fácil, pues agrupaba en su seno gran parte de la temática actual que contienen las asignaturas de: **Álgebra Lineal y Álgebra**; todavía más, esta asignatura -de nuevo me refiero a **Álgebra**, la de 1973-, tenía asignadas 4.5 horas a la semana, estaba ubicada en el primer semestre y por lo tanto no tenía antecedentes inmediatos, los cursos propedéuticos no se vislumbraban como “proyecto académico remedial” y las asesorías, se empezaban a impartir con **¡ayudantes de servicio social!**

En enero de 1975, trece profesores de matemáticas, sustituyen los apuntes de Álgebra de antaño, por otros “más funcionales y acordes al programa”, los nuevos apuntes llamados **“Apuntes de Álgebra”**, con 463 páginas en su haber, de indudable calidad académica, pero que sacrifican notoriamente la sustancial forma didáctica de los apuntes antecesores; desde luego, cabe aclarar que ahora el objetivo del curso ha sido modificado[5], pues se pretende incorporar en el presente curso, algunos tópicos de Álgebra Superior y Álgebra Lineal, por lo que ahora existe la necesidad de sustituir el discurso temático[6] del curso antiguo, por otro que, **obedezca a distinguir y por lo tanto a separar** los temas de:

- estructuras algebraicas,
- números complejos,
- polinomios,
- sistemas de ecuaciones y, sucesiones y series

A partir de este momento, los conceptos de estos cuatro temas tendrán mucho que ver con el Álgebra Superior[7], y poco que ver con una **manera integrada** de relacionarlos con el tema de **los espacios vectoriales.**

Estos **Apuntes de Álgebra (1975)**, no durarán mucho, después de someterse a rigurosa revisión se decide modificar su contenido y en el año de 1981 se dan a conocer los **Apuntes de Álgebra (primera parte)** y posteriormente en 1985 la parte complementaria, a la que se le llamó **Álgebra lineal**, es esta obra consagrada de dos tomos y 860 páginas, la que se ha perpetuado como libro de texto durante 18 años en promedio, en el mejoramiento y adición de temas de esta obra, participan únicamente dos profesores de tiempo completo de esa época: Eduardo Solar González y Leda Speziale de Guzmán.

Mi particular punto de vista, es que esta obra **de dos tomos en realidad no constituyen apuntes, más bien son auténticos libros hechos y derechos** en la extensión de la palabra, a juzgar por los contenidos, indudablemente que es una obra buena, aceptable por casi todos los profesores que imparten la asignatura, y que puede competir con cualquier libro extranjero conocido, a nivel de licenciatura que trate sobre este tema.

---

5 El prólogo de estos apuntes es evidente: ***Estos apuntes desarrollan, en forma detallada, el programa actual del curso de Álgebra...***, por otro lado continúa con relación al objetivo del curso: ***...propiciar en los alumnos el aprendizaje de algunos tópicos de Álgebra superior y Lineal...***, de este modo quede claro la distinción entre “superior” y “lineal”, (la ironía es mía).

6 Aún cuando el contenido de los temas cambie ligeramente y el orden sea cambiado.

7 Probablemente esta sea la primera figura que marcará en lo venidero, la aberrante línea de definir una “correspondencia biyectiva” entre los contenidos y la temática de los programas de las asignaturas de la División de Ciencias Básicas, con los contenidos y la temática de libros comerciales consagrados tales como los “chaums” los “Socosquis”, entre otros.

¿Cuáles pueden ser las posibles objeciones que presenta esta obra?, en primer lugar surge por la necesidad de atender el resultado de fragmentar el curso de Álgebra de 1975, por dos asignaturas, la de Álgebra[8] y la de Álgebra Lineal lo que hace que sea necesario separar los conceptos que anteriormente tenían alguna unidad didáctica en una asignatura por otros que no lo tienen, es más, la obra puede apoyar simultáneamente a dos cursos paralelos totalmente disjuntos sin ocasionar, aparentemente, ninguna molestia didáctica.

Por otro lado es importante resaltar en esta obra que, para poder adquirir los antecedentes previos al estudio de los espacios vectoriales, del curso de Álgebra lineal, se tienen que leer (que no quiero decir asimilar o aprender) 109 definiciones, 141 teoremas, 4 lemas y 2 corolarios; por otro lado, en todas estas páginas llenas de discurso axiomático, que no dudo que sea necesario desde la perspectiva formal, no existe ninguna mención a aplicaciones sencillas de alguna disciplina física, que estén al alcance de los alumnos, probablemente no sea necesario, en virtud que el programa no alude a este aspecto de manera clara y directa.

En la citada obra, correspondiente a la primera parte de Álgebra; los sistemas de los números reales y de los números complejos, así como también las álgebras de los polinomios y los tópicos de las sucesiones y series, ya no tienen nada que ver conceptualmente de manera directa con las estructuras algebraicas y los espacios vectoriales, ahora tendrán que mencionarse, con otra estructura y a través de ejemplos, en el curso posterior de Álgebra Lineal.

Los resultados obtenidos:

Las fragmentaciones irreflexivas[9] en las asignaturas de matemáticas ocasionan, irremediablemente, ruptura didáctico-pedagógica, traen como efecto colateral el aumento de horas en la curricula de asignaturas que se imparten en la DCB, lo que quiere decir aumento de créditos, aumento de las estructuras burocráticas, aumento de las instalaciones (salones), problemas de reubicación en las definitividades de los maestros, entre otras cosas que son ni más ni menos, **aspectos administrativos.**

Las fragmentaciones en las asignaturas causan confusión en el alumno, por ejemplo, no sabe a cuál Álgebra recurrir cuando quiere referirse a cierto concepto, si al Álgebra a secas o al Álgebra con apellido, lea cuidadosamente el sincero discurso de este alumno ¿el producto interno de polinomios?, ¡se ve en Álgebra Lineal¡, el que se efectúa a los numeritos separados con comas y entre paréntesis ese se llama producto punto y se ve... a caray, no me acuerdo si en Álgebra o Geometría Analítica.

LO QUE MUCHAS VECES OMITIMOS EN LA ENSEÑANZA DE “LAS DOS ÁLGEBRAS” Y EN LA “GOEMETRÍA ANALÍTICA”

Cualquier programa de asignatura debe formularse, partiendo por un lado, del diagnóstico de las demandas y los requerimientos de la sociedad, tanto para el presente como para el futuro, y por otro, de las necesidades conocimientos y formas de aprender que tiene el alumno[10]. Inevitablemente, los problemas que se le presentan al alumno que estudia ingeniería, requiere para sus soluciones, de la obra abstracta del matemático.

En este sentido, la enseñanza del Álgebra Lineal debería **partir de lo concreto** para tomar las ideas generales y conducir al alumno **a la abstracción**, la enseñanza de esta asignatura también debería tener como finalidad

[8] Si algo tiene de absurdo la acción de fragmentar en dos partes la asignatura de Álgebra, es dejarle el mismo nombre a una de sus partes, con un poco de imaginación se le hubiera llamado “Breve introducción a los tópicos de Álgebra Superior”, de esta manera se tiene linaje, elegancia y distinción.

[9] Jamás se han dado a conocer los promotores intelectuales de esta política académica, a juzgar por la magnitud de la acción, sin embargo es un hecho que los profesores nunca participaron en las fundamentaciones de la actualización de los planes de estudio de 1993, para corroborar esta afirmación, es muy instructivo la lectura de la página 31 del documento Actualización de Planes de Estudio de las carreras que se imparten en la Facultad de Ingeniería, a fin de que quede claro como la UPADI y los talleres internacionales definen sus políticas para fundamentar dichos cambios, en este documento se expresa con detalle la metodología, las estrategias y las acciones que definieron los cambios en las asignaturas de la DCB.

[10] Puebla Cadena Margarita, Para elaborar un programa de materia, «Educación», Revista de Ingeniería, No 3, 1984

acostumbrarlo a “saber observar”[11], dar a entender al profesor que debe siempre tener presente que los entes sobre los cuales trabaja, tienen sus propias raíces en lo concreto, es decir en una geometría básica de lo concreto: **La geometría euclidiana**, eso sí, vigilando siempre que la asignatura no se reduzca a una superficial y episódica **“lección de cosas”.**

Llevar poco a poco a los alumnos del mundo de las **cualidades**, al mundo de las **cantidades**, y recíprocamente, dos procesos que no deben considerarse aisladamente, porque en el quehacer ingenieril, **no existe un ascenso a lo abstracto y una total separación de lo concreto**, y no hay, por otra parte, una inclinación, una adaptación de símbolos y fórmulas para la resolución de fenómenos concretos dejando aparte las leyes del pensamiento, y la visión general del fenómeno mismo.

En suma **la educación científica de los ingenieros** debe tener como finalidad hacer pasar de las **cosas que nos rodean, a un conocimiento objetivo** acompañado de juicios serenos. Debe ser un continuo ascenso en el arte de “saber observar”, es decir en el sentido de que este saber observar nos ofrece la oportunidad de un descubrimiento pedagógico, el que dirige a una construcción abstracta poniendo énfasis en lo cualitativo, analizando lo concreto, tomar analogías y diferencias, agrupando cosas semejantes, separando las clases de objetos, construyendo, sintetizando[12]

Reunir en grupos desiguales de asignaturas, como lo son los cursos de Álgebra, Álgebra Lineal y Geometría Analítica, **las cosas iguales**, la idea de concebir a **la igualdad desde el punto de vista más amplio,** que permite apartar, las apariencias superficiales en cada una de estas asignaturas sin necesidad de clasificaciones artificiales.

Las dos Álgebras y la Geometría Analítica están, muchas veces, más cercanas a lo concreto, desafortunadamente la fragmentación y la desarticulación de sus contenidos, parecen fríos y lejanos de la compleja realidad del mundo que nos rodea.

“EL SILENCIO DE LOS INOCENTES” PREGUNTAS EN EL CONTEXTO DEL ALGEBRA LINEAL

Desde luego que el análisis y las posibles respuestas formuladas a la pregunta que da el nombre a esta ponencia: **¿porqué mis alumnos aprenden a odiar álgebra lineal?,** no está fundamentada en los resultados del citado experimento referente a la encuesta realizada a mis alumnos, sin embargo, conviene aclarar que mi conjetura acerca de porqué los alumnos aprenden a odiar Álgebra Lineal, debo aceptar que en realidad **lo que odian es otra cosa menos la asignatura en sí**, tienen el derecho de aborrecer con justificada razón, porque están totalmente desmotivados, pareciera que estudiaran en un mundo Kafkiano, pues en la medida en que resuelven una gran cantidad de ejercicios de las series y se preparan para los exámenes, **menos entienden los enunciados y los conceptos que se plantean**, el siguiente ejemplo es muy representativo de la perversa intención [13] en la que se pretende que el alumno entre al **Castillo de Kafka**:

“Si **S** es un espacio vectorial sobre un campo ***k***, entonces los elementos de ***S*** tienen **magnitud, dirección y sentido**”. El profesor que ya ha impartido esta asignatura no dudará en contestar : **¡No forma un espacio vectorial!**, pero el alumno que desde la secundaria, la preparatoria y en algunos cursos de Física en los primeros semestres de nuestra Facultad, ha estudiado hasta el cansancio esta noción asociada a las cantidades físicas, ¡del mundo real!, ahora tiene que dejar de pensar en esta humilde definición, por la sencilla razón de que no están definidas **dos desdichadas operaciones** y que por lo tanto no es posible verificar si se cumplen los diez axiomas que caracterizan formalmente este concepto.

---

[11] Association for the Advancement of Science(1989), *Science for all Americans Project 2061,* EU.

[12] Síntesis en el sentido etimológico, como integrar el conjunto, reagrupar, construir.

[13] Ejemplo que se bosqueja en un documento de la coordinación de matemáticas, *llamado A los profesores de Álgebra* con motivo de dos reuniones celebradas en 1975 con profesores de la citada disciplina, en donde se señala como confeccionar objetivos específicos, época en donde estuvo muy de moda este modelo de enseñanza conductista, y que por cierto, tenia por lo menos una ventaja, se aprendía a redactar ciertas conductas observables(¿?) que debían mostrar los alumnos, poniendo énfasis en la destreza del uso de ciertos verbos previamente seleccionados.

En estas condiciones, el alumno ya se dio cuenta que su experiencia básica no puede ser un apoyo seguro, y mucho menos tomado en cuenta para el aprendizaje formal del álgebra lineal; toda aquella filosofía fácil sostenida en un sensualismo más o menos franco se derrumba totalmente, por eso es que el alumno tiene razón en **aborrecer ciertas estructuras matemáticas,** porque en la mayoría de los casos **dado que el programa no marca las circunstancias reales de este problema,** su profesor no tiene porqué aclararle al alumno, esta ambigüedad que ahora le invade, y por lo tanto tiene que aceptar esta dualidad de significados, por razones estratégicas asociadas al bárbaro principio de autoridad académico o al aprendizaje irreflexivo que fomenta el sistema finito de números relacionados con las calificaciones. El alumno aprende a dar una respuesta de vector, de acuerdo al maestro que le haga la pregunta: Magnitud, dirección y sentido si el profesor es de física, o una larga letanía de 10 axiomas si el profesor es de matemáticas, inteligentísimo recurso**: de acuerdo al vector es la pedrada.**

También ya se dio cuenta de que su pobre imaginación debe trabajar a pesar de las oposiciones de la experiencia... por eso también **odia estas situaciones**, pues tiene que reconocer que no es fácil desprenderse de las maravillas que puede ofrecerle la realidad sobre todo cuando ésta le ha otorgado su confianza: **Fuerza** es toda acción de un **cuerpo sobre otro**, que modifica el estado mecánico de ambos, y que puede representarse por una **flecha** que denote tres cosas: su tamaño, **la magnitud**; el segmento rectilíneo, **la dirección** y la punta de la cabeza, **su sentido**. A esta flecha le llamaremos de ahora en adelante **vector fuerza**, ante esta situación, un alumno que ya haya estudiado Álgebra Lineal, opinará en silencio: ¿shh ya...apoco una chinche flecha cumple con 10 axiomas?

Muchos profesores de matemáticas, inclusive que hoy son coordinadores e imparten varias asignaturas en esta División, que cursaron esta asignatura estarán de acuerdo conmigo que el eje bajo el cual se sustentaba las bases conceptuales de esta asignatura lo constituía: **el concepto de grupo, de campo y anillo; inclusive la definición de espacio vectorial**, conviene recordar la forma en que se definía el concepto de espacio vectorial en aquellos apuntes de Álgebra editados en 1973, en lo personal me parece al menos original por la forma, conviene citarla textualmente:

- *Definición*

  Sea **C** un campo cualquiera, y sea **V** un conjunto no vacío en el cual se definen las operaciones de adición y multiplicación por un escalar. Se dice **V** que es un espacio vectorial sobre **C** lo indicamos con **V**(**C**), si los elementos de **V** satisfacen los tres axiomas siguientes:

Axioma 1 "V Forma un grupo abeliano con respecto a la adición", esto implica que:

a) si **a**, **b** y c **Î V**, entonces **a**+**b Î V** (cerradura)

b) " a, b y c Î **V se cumple que:**

(a+b)+c = a+(b+c) (asociatividad)

c) Existe un elemento de **V**, al cual llamaremos "vector cero" y lo representaremos con **0** tal que para toda a que pertenezca a **V** se tenga :

0+**a** = **a**+**0** = **a**

d) Para cada elemento **a Î V**, existe **–a** que **Î V** tal que :

–a+**a**=**0**

e) **" a** y **b Î V** se cumple que **a**+**b** = **b**+**a** (conmutatividad)

Axioma 2 Existe una función **f: CxV ® V**, llamada "multiplicación por un escalar", es decir que:

" aÎC y **aÎV**, se tiene que **aa Î V**

Axioma 3 La multiplicación por un escalar obedece a las siguientes leyes:

a) " **a**, **b** Î **C** y **a**Î **V**; (**a**+**b**)**a = aa**+**ba**

b) " **a** Î **C** y **a**, **b**Î **V**; **a**(a+b) **= aa**+**ab**

c) " **a**, **b** Î **C** y **a**Î **V**; **a**(**ba**) **= ab**(**a**)

d) Si v es el elemento unidad de C:
" **a**Î **V**; v**a = a**

Esta definición no tiene nada del otro mundo, inclusive se muestra la referencia[14] de donde se tomó, entonces ¿qué tiene de novedoso esta definición?, simple y sencillamente aspectos didácticos de señalar antecedente-consecuente:

1. Retomar las ideas inmediatamente vistas, a saber, *el concepto de campo correspondiente al tema de estructuras algebraicas dentro de una definición,* que a mi juicio, es muy importante por cuestiones de didáctica y metodología: ***incorporar siempre lo nuevo a partir de lo ya visto, pero también señalarlo ¡Para el alumno este aspecto no es trivial ni evidente*!**[15]
2. El agrupamiento a partir de **tres axiomas que a su vez agrupan a otros axiomas**, obedece a un criterio impuesto por la razón citada en el punto anterior además de imponer orden y sencillez pedagógica, sin embargo las razones **formales no son prioritarias,** pues de otra forma no se hubiera incorporado de manera sencilla el concepto de **anillo** ni las propiedades de las operaciones de **la suma** y **la multiplicación** en los axiomas 1, 2 y 3 respectivamente
3. El concepto de **producto cartesiano**, se incorpora en el axioma 3, a fin de retomar el concepto de función, el cual se generalizará en temas posteriores

La totalidad de libros que se recomiendan en la **actual** asignatura de Álgebra Lineal definen las propiedades del espacio vectorial a partir de las diez propiedades sin mencionar ni establecer la mínima relación con los conceptos vistos con anterioridad.

Las objeciones que se le pueden poner a las definiciones es que se dan descripciones previas, es necesario incurrir en esta práctica, si cualquier cosa está clara para mí, esto no significa que yo pueda definirla, sino que solo pueda describirla; puedo decir, con precisión, como está hecha, pero no que cosa es, es necesario poner en práctica la intuición, en el sentido de construcción, y ninguna instrucción es verdadera y educativa sino proviene de la actividad de los alumnos.

Los problemas reales que exigen una solución matemática, se pueden distinguir por dos grupos:

- Los que tienen su origen en las necesidades impuestas por la vida diaria (internas por necesidades prácticas)
- Los que provienen de la observación del mundo que nos rodea (externas por la observación de los fenómenos que nos rodean)

Estos problemas pueden decirse que son dos “interpretaciones fundamentales” de la palabra realidad, y es aquí donde debe de iniciar el proceso de aprendizaje del Álgebra lineal en los alumnos, es precisamente de estos aspectos donde deben construirse las principales nociones categóricas tales como vector, combinación lineal, espacio vectorial, transformación a fin de que su abstracción[16] sea **didácticamente fundamentada y entendida de una manera sencilla**.

[14] Los apuntes citan la referencia, con la “debida y obligada humildad científica” : Dennis B. Ames, *Fundamentals of Linear Algebra*, International Textbook Company, Scranton Pennsylvania USA, 1970.

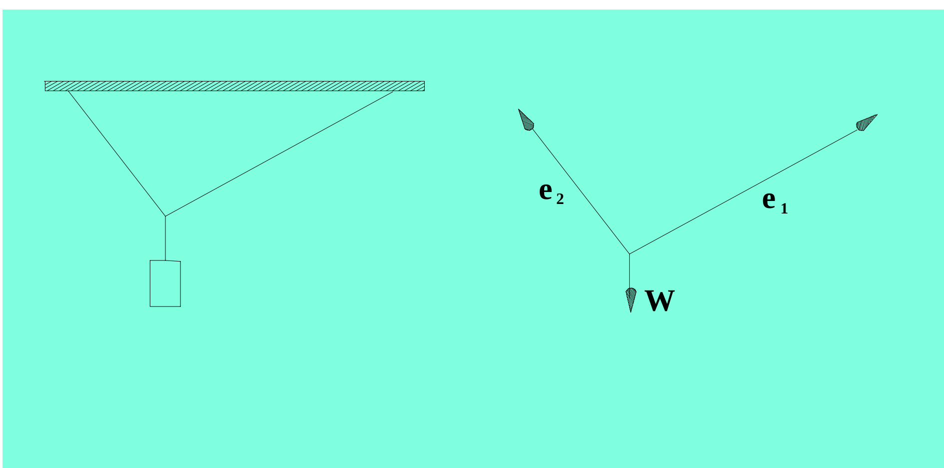
[15] Pestalozzi es claro en este aspecto que muchas veces omitimos: “si un concepto es claro para mí, esto no significa que con palabras yo pueda hacerlo claro para tí”

Uno de los conceptos más importantes de espacio vectorial, por la vía sintética, es decir constructiva, se puede llegar a la noción abstracta de vector, el siguiente ejemplo puede ser muy aleccionador para quitarle la frialdad a este elemento conceptual, a partir de un hecho cotidiano.

- un coche viaja a 60 km/h (aÎ **R)**
- un coche viaja a 60 km/h por la avenida los Insurgentes (introducción de elementos auxiliares geométricos)
- un coche viaja a 60 km/h por la avenida los Insurgentes, hacia Tlaltelolco (introducción de elementos auxiliares geométricos)
- un coche viaja a 60 km/h por la avenida de los Insurgentes, hacia el norte con rumbo a Tlaltelolco insurgentes (introducción de elementos auxiliares geométricos para completar el producto (**av, a**Î R y vÎ V, por lo tanto **av** Î V)
- un coche viaja hacia Tlatelolco por la avenida de los Insurgentes y justo cuando cruza la avenida Reforma, lleva una rapidez de 60 km/h desde ciudad universitaria con rumbo hacia Tlatelolco (introducción de elementos auxiliares geométricos para distinguir dos elementos de distintos espacios vectoriales, velocidad y posición)

Introduciendo las operaciones de suma de vectores y producto de un vector por un escalar, pueden hacerse construcciones analíticas del concepto de combinación lineal, a partir del concepto de velocidad relativa, combinaciones de efectos de rotación y de translación de un cuerpo.

Otro ejemplo que puede ser instructivo para construir analíticamente, el concepto de combinación lineal, por analogía al caso del ejemplo anterior es el clásico ejemplo de la obtención de las tensiones en los cables que sostienen al cuerpo de peso W.



$\mathbf{W} = a\mathbf{e_1} + b\mathbf{e_2}$

[16] Sin embargo, es necesario considerar algunos otros elementos auxiliares, tales como la noción intuitiva de número real y las leyes de composición de suma diferencia, multiplicación y división, que se estudiaron en primaria. Es necesario destacar que en esta parte, aunque no están definidas completamente las leyes de composición de la resta y la división, el hecho de que puedan sustentarse a partir de los teoremas **(-1)v = -v, y (ab)v = a(bv)**, no causa mayor incomodidad a los alumnos, sin embargo, es de justicia por respeto a la formalidad axiomática, explicarle al alumno estos detalles: **muchos teoremas, aparentemente triviales, justifican desde la perspectiva axiomática**, el empleo de ciertas operaciones que realizamos todos los días en nuestra actividad cotidiana...aunque nos importe poco.

En este ejemplo los escalares **a** y **b** y los vectores unitarios $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_2}$, **,** aparte de caracterizarlos como escalares y vectores, es decir como elementos de un campo y de un espacio vectorial, adquieren propiedades cuantitativas y cualitativas, los escalares por ejemplo serán cantidades físicas “tantos Newtons de Fuerza de tensión” y los vectores entidades meramente abstractas que definen la orientación de la cantidad física, es decir proporcionan la dirección y sentido.

De esta forma, la caracterización vectorial de una cantidad física a partir de las ideas primitivas de magnitud, dirección y sentido[17]; cobran un verdadero sentido didáctico para poder generalizar y culminar con la idea abstracta de espacio vectorial.

Conclusiones Prestadas

Sirvan las siguientes citas a manera de conclusiones para esta ponencia:

> Todavía existen profesores que siguen la letra del programa sin poner el espíritu, estos profesores(¿?) muestran una deplorable tendencia hacia la abstracción a costa de la intuición, para ellos es mucho más fácil enseñar a manipular conceptos abstractos, que hacer ver realidades ocultas por sus abstracciones.
>
> *Víctor Roura*

> El Álgebra aunque sea muy útil por sí misma, no debe hacerse jamás sin una motivación procedente de otra parte de las matemáticas. Debe limitarse a desarrollar las herramientas que necesitan las demás ramas de las matemáticas para la resolución de sus problemas particulares.
>
> *Kronecker y Chevalley*

> En nuestra Facultad (Ingeniería UNAM), la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel, deben proporcionar al estudiante una intuición sólida de los objetos matemáticos que emplea, no seguir este precepto, significa a todas luces incurrir en una actitud bárbara y perniciosa.
>
> *Ing. Esteban Salinas Elorriaga*

> No me explico porqué se insiste en la estúpida forma de clasificar a las matemáticas en virginales y aplicadas, creo que las que realmente vale la pena estudiar son aquellas que tienen cabida en aplicaciones de problemas físicos, los matemáticos que trabajan en ese campo están obligados a resolverlos... los matemáticos puros no tienen absolutamente nada que ver aquí ya que pueden crear y resolver sus propios problemas
>
> *Anónimo*

> Los matemáticos puros son capaces de encontrar la dificultad en una solución, pero los matemáticos aplicados son capaces de encontrar la solución en una dificultad
>
> *Morris Kline*

> Hay que adaptar la enseñanza no a la lógica de las matemáticas, sino más bien a los progresos de la creencia, recuerden que la lógica es la higiene del matemático y los grandes problemas reales que hay que resolver en la humanidad apoyados en gran parte por élla, son el pan de cada día de los ingenieros
>
> *Andre Weil*

> El espíritu de los chamacos del Anexo debe formarse, reformando una gran cantidad de matemáticas inútiles que les enseñan.
>
> *Comentario de un profesor en la sala de profesores del Edificio Principal*

[17] En el estudio de los sistemas de fuerzas, los postulados básicos de la Estática, y la ley del paralelogramo, contienen implícitamente los diez axiomas que caracterizan a un espacio vectorial.

La única intuición legítima es de carácter psicológico y es la intuición de la inhibición

Gastón Bachellard

Aprenderse todo de memoria en este negocio del Álgebra Lineal, es igualito que hacer el amor de memoria con alguien a quien no le distingues el sexo: *así de abstracto y depravado puede ser este aprendizaje.*

hgsm

♫ ...Pero ten presente, y de acuerdo a la experiencia, que tan sólo se odia lo querido ♫

Canción que interpretaba Estelita Núñez a finales de los 60's

--- o ---