

LAS CALCULADORAS Y LAS COMPUTADORAS COMO APOYO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

HERIBERTO DE JESÚS AGUILAR JUÁREZ
ISABEL PATRICIA AGUILAR JUÁREZ
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

INTRODUCCIÓN

No se puede negar la penetración que los medios de cómputo electrónico: calculadoras y computadoras, han tenido en nuestra forma de trabajar y de vivir, desde que su distribución alcanzó el nivel comercial y la gente aprendió a utilizar los paquetes de software para aplicaciones, tanto comunes, como especializadas. No sería sensato intentar evadirse de este signo de los tiempos y aferrarse a metodologías de trabajo menos eficientes y hoy en día anacrónicas. Menos aún debería el docente intentar disuadir a sus alumnos del uso de estos productos de la tecnología que, bien utilizados, habrán de facilitarles su trabajo e incrementar su eficiencia. Por el contrario, les haría un gran servicio si les enseñara a utilizar dichos medios correcta y eficientemente, y a apreciarlos en su justo valor. En esta ponencia analizamos la importancia que tiene para el profesional de la ingeniería el mantenerse actualizado en el uso de estas tecnologías, y la necesidad de que el docente adecue sus métodos de enseñanza, a fin de sacar partido de ellas en beneficio de la calidad de los aprendizajes en la escuela de ingeniería. También presentamos algunos ejemplos particulares para comunicar mejor nuestra propuesta.

CALCULADORAS Y COMPUTADORAS

La posibilidad que ofrecen al hombre las calculadoras y las computadoras electrónicas, de liberarse de largos y engorrosos procesos de operaciones aritméticas repetitivas, llevadas a cabo manualmente o con la ayuda de instrumentos que hoy resultan rudimentarios, para ocupar su mente en operaciones más creativas e interesantes, repercute, o al menos puede repercutir, en un incremento de la productividad y la eficiencia profesional del ingeniero y de muchos otros profesionistas. El beneficio será mayor, entre mayor sea la destreza del individuo para utilizar dichas herramientas de manera eficiente. Esto incluye, por supuesto, la capacidad por parte del usuario de interpretar correctamente los resultados "fríos" que arroja el instrumento, y de identificar las limitaciones que cada procedimiento automatizado de procesamiento pudiera tener, sobre todo si no ha sido él mismo el programador. Paradójicamente, estos mismos recursos liberadores del intelecto del hombre pueden hacerlo dependiente, hasta el extremo de no ser capaz de resolver la operación más simple si no dispone de ellos en un momento dado.

Se ha convertido en un lugar común la opinión de que el uso de la calculadora atrofia la capacidad de las personas, sobre todo de los jóvenes, de realizar procesos matemáticos en forma independiente. A este respecto, nosotros pensamos que el profesor de matemáticas (en los diversos niveles educativos) puede contribuir en gran medida a que eso no suceda. Él puede, y creemos que debe, exigir de sus alumnos el desarrollo de las habilidades matemáticas básicas que les proporcionen el mayor grado posible de independencia intelectual. Y es que, aparte de la agilidad mental que proporcionan el cálculo numérico y el álgebra, la capacidad de realizar tales operaciones le permite al usuario de la calculadora o la computadora verificar la correcta operación del instrumento o del programa, simplemente efectuando, a manera de prueba, algún cálculo o serie de cálculos representativos de la tarea que el aparato habrá de realizar, solo que suficientemente sencillos y breves como para que se puedan realizar a mano. Pero si el usuario no es capaz de llevar a cabo por sí mismo estas operaciones, entonces sí que está a merced del instrumento. Su única opción será confiar ciegamente en él.

Otro riesgo que habrá que sortear en relación con el uso de las calculadoras por parte de los estudiantes, se deriva de la manera en que estos dispositivos expresan la notación científica para las cantidades, es decir, la notación en potencias de 10. El hecho de que la base de tales potencias, el 10, a menudo no se muestre de manera explícita en las expresiones (por ejemplo, la cantidad 5×10^{-2} se expresa como 5 E-02) induce al estudiante a confundir una cantidad como 5×10^{-2} con 5^{-2} . No pocos estudiantes piensan que estas dos cantidades son iguales. Más aún, tienen problemas para introducir en su calculadora cantidades como 10^{-2} , si no ven esta cantidad expresada en la forma 1×10^{-2} . No creemos sin embargo que la presencia de tales riesgos justifique intentar evitar el uso de las calculadoras y la computadora por parte de los estudiantes en etapas tempranas de su educación. Pensamos, más bien, que para evitar estas confusiones, los cursos de matemáticas deben poner especial cuidado en lograr que el estudiante comprenda perfectamente el significado de las expresiones que involucran exponentes, y enseñar la notación científica tan pronto como sea posible, tal vez mucho más temprano ahora, que lo que se hacía antes.

No podemos dejar de señalar que algunas personas suponen que el contar con una buena calculadora programable y un surtido amplio de programas de biblioteca para llevar a cabo determinados procedimientos matemáticos puede eximir al usuario del equipo de la necesidad de conocer, y entender bien él mismo, dichos procedimientos. Esto es un error que, quien así piensa, pronto descubre, con la correspondiente frustración y consecuencias indeseables. Conocemos, por ejemplo, el caso de un estudiante de estadística que, contando en su calculadora con las rutinas necesarias para efectuar una amplia gama de pruebas de hipótesis, consideró innecesario empaparse él mismo en la teoría y las técnicas involucradas en tales procedimientos. Cuando, en un examen, se vio en la necesidad de efectuar una prueba específica, a pesar de contar con el recurso de su calculadora, no fue capaz de seleccionar la prueba adecuada, y reprobó. Si bien no es conveniente subestimar los recursos que ofrecen los dispositivos de cómputo electrónicos, no identificar sus limitaciones puede tener consecuencias nefastas. Una vez más, es labor del educador enseñar a sus alumnos que tales dispositivos son un ayuda valiosa en manos del usuario que conoce el problema que debe resolver y las estrategias para lograrlo. Pero los dispositivos no pueden por sí mismos identificar ni resolver el problema.

LAS CALCULADORAS Y LA COMPUTADORA COMO AUXILIARES EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Ciertas aplicaciones posibles de las computadoras en los procesos de enseñanza-aprendizaje son evidentes y se encuentran funcionando ya en muchas escuelas de ingeniería. Es el caso, por ejemplo, de contar con material didáctico como bancos de ejercicios y problemas para un curso específico en internet y, por lo tanto a disposición de los alumnos del curso en el momento que los requieren. También la posibilidad de comunicación extraclase con el profesor por medio del correo electrónico a menudo resulta útil para las partes involucradas en el proceso. Sin embargo, a estas aplicaciones generales se pueden sumar innumerables aplicaciones específicas, adecuadas a los requerimientos de cada curso en particular. La aplicación inteligente y oportuna de este tipo de recursos puede muchas veces facilitar el aprendizaje e incrementar sensiblemente su calidad. El uso de paquetes para aplicaciones matemáticas como Mathematica, MatLab y otros, por ejemplo los orientados a la estadística, ofrecen amplísimas posibilidades de apoyo al aprendizaje de los conceptos y los métodos matemáticos, y únicamente requieren para su utilización de una computadora personal como las que tenemos en muchos de nuestros laboratorios de cómputo.

Tenemos la experiencia de que es posible y aun fácil, para cualquier estudiante de ingeniería, aprender en forma paralela con los conceptos y métodos de cualquiera de sus cursos de matemáticas, técnicas computarizadas, como las que ofrecen los paquetes mencionados, para apoyar y complementar su aprendizaje. Se dispone, por ejemplo, de la posibilidad de efectuar operaciones numéricas y simbólicas que pueden servir como comprobación de las operaciones realizadas como ejercicio por el estudiante, o como un medio ágil para obtener información requerida en el curso de la resolución de problemas complejos. En este último sentido, podríamos mencionar como ejemplo típico, la obtención rápida de las raíces reales y complejas de una ecuación polinomial, la cual bien podría ser la ecuación característica de algún sistema físico o de una matriz hessiana, en un problema de máximos y mínimos. La obtención numérica de soluciones no asequibles por medios analíticos, para determinados problemas, por ejemplo, ciertas integrales definidas, o ciertas

ecuaciones diferenciales, etc., abre la posibilidad de extender los métodos matemáticos más allá de los límites propios de los procedimientos puramente analíticos.

La posibilidad de generar representaciones gráficas relacionadas con funciones de diversos tipos: escalares, vectoriales, complejas, etc., facilita la visualización del comportamiento de dichas funciones, ya sea en forma global, o en torno a puntos de interés particular, y el análisis de sus características. Con frecuencia, este tipo de análisis sirve como punto de partida para un estudio analítico riguroso, por ejemplo de la continuidad o la derivabilidad en ciertos puntos, o bien para lograr una mejor comprensión de los resultados producto de un análisis riguroso. La posibilidad de obtener fácilmente transformadas integrales, como la de Fourier, ya sea de manera simbólica o numérica, facilita la exploración empírica de las características generales y particulares de este tipo de transformaciones, introduciendo modificaciones sistemáticas en las propiedades de las funciones a transformar y observando los efectos en la transformada, de dichas modificaciones. Cabe señalar que este tipo de estudio sería sumamente difícil de lograr sin el recurso de técnicas computarizadas, dada la enorme cantidad de trabajo que requeriría y el tiempo que consumiría.

Así pues, al tiempo que el alumno aprende cálculo diferencial e integral, bien puede aprender a calcular derivadas e integrales simbólicamente y numéricamente, por medio de paquetes como los mencionados arriba. Asimismo puede aprender a generar gráficas de funciones y a extraer de ellas información útil. Junto con su curso de álgebra superior podría aprender a usar los paquetes de software para realizar operaciones con números complejos, resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones, calcular determinantes, invertir matrices, etc. En el curso de ecuaciones diferenciales, el estudiante bien podría, y seguramente encontraría muy interesante, aprender a obtener soluciones y familias de soluciones de ecuaciones diferenciales, y generar representaciones gráficas de ellas. Al lado de los temas de la geometría analítica podría generar representaciones de curvas y superficies. Con la teoría de las funciones de variable compleja podría aprender a representar tales funciones por medio de aplicaciones (o mapeos) y, en paralelo con el Análisis de Fourier, podría aprender a usar las utilerías correspondientes de los paquetes mencionados u otros. Está claro que los usos que se pueden dar a estas herramientas, con fines didácticos, son sumamente variadas, y dependen en gran medida de la creatividad de profesores y alumnos.

Al final de esta ponencia, como apéndice, se presentan, a manera de ejemplo, algunas aplicaciones sencillas de las utilerías de la calculadora HP 49G, en la resolución de problemas matemáticos.

Con el fin de evitar una visión distorsionada por parte del estudiante de ingeniería, en relación con los métodos analíticos que aprende en sus cursos de matemáticas, los cuales son casi siempre más difíciles de dominar y manejar que las técnicas computarizadas correspondientes, se debe poner especial esmero en enseñar al alumno a distinguir entre una solución analíticamente obtenida (tal vez en términos de literales) para un problema dado, la cual en realidad representa una solución de carácter general para un cierto tipo de problema matemático, y una solución obtenida numéricamente para un problema específico, cuya validez se restringe a ese problema en particular. Cada una de estas soluciones tiene, pues, su valor de utilidad, pero por lo regular, la numérica no puede sustituir por completo a la analítica. Así pues, el estudiante no debería rechazar los métodos analíticos, guiado por la impresión equivocada de que los numéricos pudieran reemplazarlos. Una clara comprensión de los unos y los otros, y de sus respectivos terrenos de aplicación, así como de sus limitaciones, le permitirá darse cuenta de que no es así.

EL USO DE LA CALCULADORA O LA COMPUTADORA EN LOS EXÁMENES DE MATEMÁTICAS

La evaluación es inherente a cualquier proceso de enseñanza-aprendizaje. Surge por ello la cuestión acerca de la pertinencia de permitir el uso de calculadoras o incluso la computadora en las actividades de evaluación, y en particular, en los exámenes. No parece debatible el hecho de permitir e incluso alentar el uso de la computadora para trabajos con valor en la evaluación, llevados a cabo fuera del aula, por ejemplo, proyectos. En cambio, sí resulta controversial el permitir el uso de calculadoras en los exámenes dentro del aula, sobre todo si las calculadoras permitidas tienen la capacidad de almacenar en su memoria cantidades grandes de información, como formularios o hasta fragmentos de las notas de clase. En relación con esta cuestión,

nosotros consideramos que, siendo la calculadora y la computadora elementos importantes dentro de los trabajos del curso, como proponemos que lo sean, pueden, y en muchos casos deben, estar presentes en los trabajos que se llevan a cabo con fines específicos de evaluación, como los exámenes. El problema de falta de control sobre la información contenida en las calculadoras utilizadas en el examen, se puede resolver en diversas formas. Desde facilitarle a cada estudiante una calculadora, propiedad de la institución educativa, en calidad de préstamo para que sea utilizada en el examen, hasta restringir el tipo de calculadoras permitidas para un examen dado. Sin embargo, ninguna de estas acciones es necesaria cuando el instrumento de evaluación está diseñado para detectar y medir la comprensión alcanzada de determinados conceptos o las habilidades desarrolladas como producto del curso, y no aprendizajes de tipo memorístico. Como esa es la situación más frecuente en los cursos de matemáticas, es de esperarse que en muchos de los exámenes pueda permitirse el uso de calculadoras sin restricciones. El uso de la computadora en un examen se hace posible si éste se lleva a cabo en un salón equipado con las computadoras necesarias.

CONCLUSIONES

La enseñanza de las matemáticas para ingenieros, como muchas otras esferas de la educación, tiene en las técnicas de la computación electrónica una amplia gama de oportunidades, muchas de ellas todavía no explotadas en toda su potencialidad. Quienes participamos en la formación de ingenieros nos encontramos ante el reto de actualizarnos y actualizar nuestros métodos de enseñanza, si es que no lo hemos hecho aún, para aprovechar esas oportunidades que nos ofrece la tecnología actual, en beneficio de nuestra tarea y de la profesión misma de la ingeniería.

BIBLIOGRAFÍA

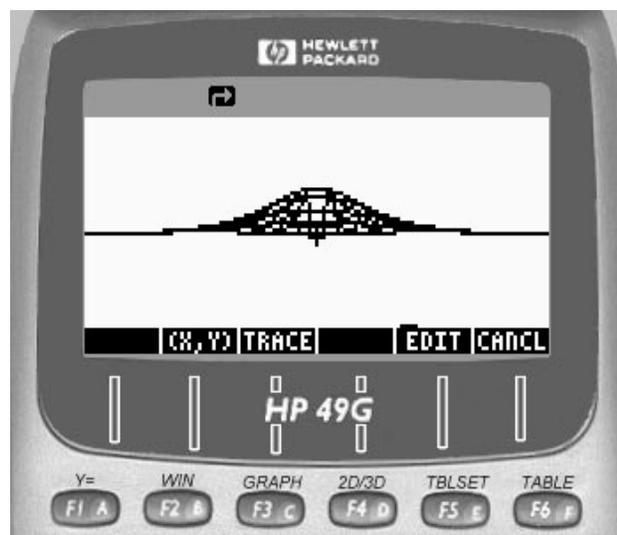
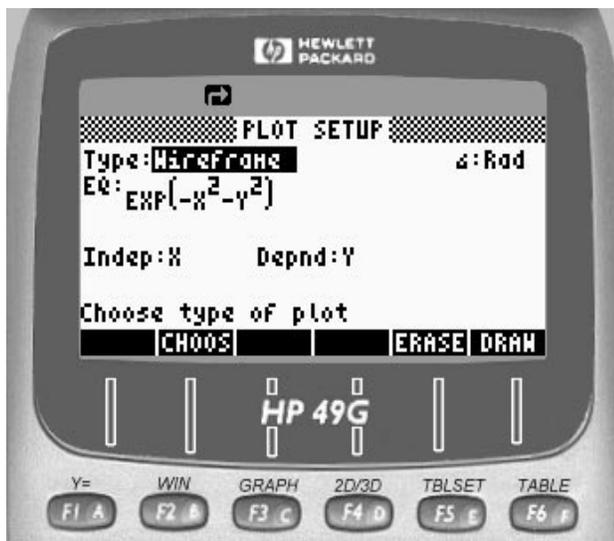
- Wolfram, S., *The Mathematica Book*, Fourth Edition, Wolfram Media / Cambridge University Press, USA, 1999.
- Shaw, W. T. and Tigg, J., *Applied Mathematica*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.

APÉNDICE

Algunas Aplicaciones de la Calculadora HP 49G, de Interés en Matemáticas

Obtención de la gráfica de la función

$$f(x, y) = e^{-(x^2 - y^2)}$$



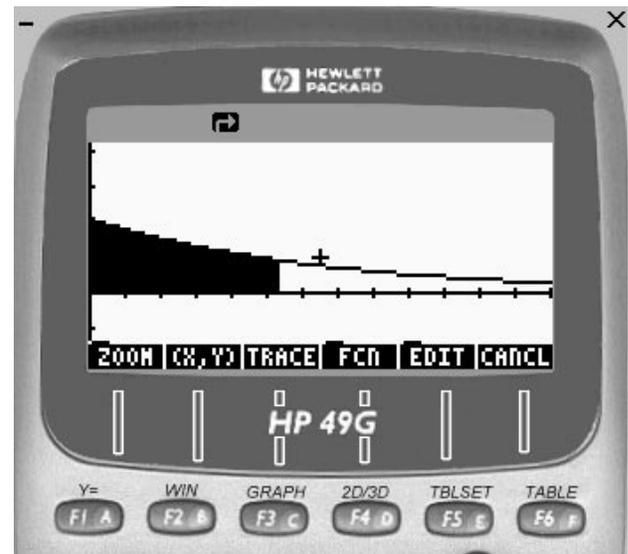
Generación de un mapa de curvas de nivel para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$



Cálculo de la integral definida

$$\int_0^{1.23} e^{-x} dx$$

para determinar la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro 1 tome valores entre cero y 1.23



Desarrollo de una prueba de hipótesis de dos colas sobre la media de una población de la cual se desconoce la varianza.

El estadístico usado es un estadístico T con distribución t-student con 49 grados de libertad y la prueba se realizó con un 5% de significancia.

