La Enseñanza de la Matemática en las Escuelas y Facultades en la UNAM. Lo que es y lo que debe ser

Luis Ramírez Flores
Escuela Nacional de
Estudios Profesionales Aragón

INTRODUCCIÓN

"Siempre hay gente que asemejándose a los escolásticos medievales, empieza la enseñanza con las ideas más generales defendiendo este método como si fuera únicamente científico. Entre tanto esta sugerencia tampoco es cierta, pues, enseñar científicamente significa instruir a un ser humano a pensar científicamente y no aturdirlo desde el mismo principio con una sistematización fría aunque tuviera ésta el aspecto científico".

Félix Klein (1849-1922)

En mi experiencia personal como docente de esta institución y particularmente al serlo en las carreras de ingeniería mecánica y computación, observo tendencias muy marcadas al enseñar la matemática. Por un lado tenemos que un buen número la enseña en una especie de "empirismo", si es que vale esta expresión. Por el otro tenemos uno reducido que la ve desde el formalismo extremo "Definición-Teorema-Demostración", pocos, de verdad pocos en una situación intermedia.

Se nos olvida que debe existir un punto de equilibrio pues la historia nos dice que nunca los extremos han sido buenos. Deseo, entonces, centrar mi atención en lo más común, lo que ocurre en la mayoría de los casos.

En general, repito, se enseña la matemática a partir de reglas a manera de recetas de cocina, con lo cual la creatividad es cercenada sin dejar oportunidad de desarrollar la intuición que llevaría a nuestros alumnos a la madurez intelectual. Como consecuencia, y con esquemas similares en las otras asignaturas de la currícula, nos encontramos con un panorama desolador. Nuestros alumnos son inseguros al aplicar los ricos conocimientos que se debían adquirir en la carrera. Después de todo qué debería ser un ingeniero, sino alguien con la capacidad para resolver los problemas que la sociedad le plantea.

Considero, como principio básico, que nuestros docentes, debían tomar lo anterior en consideración de manera seria. Hay un refrán que con frecuencia menciono a mis alumnos, este vale también para el caso "cuando tu puedas explicar un concepto con palitos y bolitas, es en esa medida, que tú has entendido dicho concepto, si no es así, significa que tú tampoco lo has aprendido correctamente".

¿Pero qué ocurre en una clase con el profesor, según mi punto de vista?

El profesor es de matemáticas, la clase de álgebra, el tema raíces de un polinomio, caso tercer grado.

Considere la ecuación:

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 7 = 0$$

Observando el término independiente (7), sus divisores enteros son ± 1 y ± 7, como las raíces enteras, si las tiene, son divisores del término independiente, se procede vía, ensayo-error, ver cual de ellos es raíz. Calculando, vemos que $x=1$ es raíz, luego $x-1$ es factor, al dividir $x^3-3x^2-5x+7=0$ por $x-1$, se obtiene x^2-2x-7, resolviendo esta ecuación de segundo grado, se obtienen las raíces $x=1+\sqrt{8}$ y $x=1-\sqrt{8}$, con lo cual el problema está resuelto.

Alguien va un poco más lejos, y aplica el algoritmo de Tartaglia-Cardano:

$$x^3-3x^2-5x+7=0$$

Haciendo el cambio de variable $x=y-{-3}/{3}=y+1$, para obtener un polinomio de tercer grado que carezca del término cuadrático, se obtiene:

$$y^3-8y=0$$

Cuyas raíces son $y=0,\sqrt{8},-\sqrt{8}$, al sustituirlas en $x=y+1$, se obtienen nuevamente las raíces ya conocidas.

Con esto ya pueden resolver cualquier ecuación de tercer grado. Hagan el mayor número de ejercicios seguro uno de estos viene en el examen ...

Otro profesor, matemáticas, la clase ecuaciones diferenciales, el tema, ecuaciones diferenciales de primer orden y de variables separables.

Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=y(1-y)$$

Se desea encontrar la solución general.

Como se "ve" claramente ésta es del tipo mencionado, luego

$$\frac{1}{y(1-y)}=\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}$$

Y entonces

$$\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\right)dy=\int dx$$

De donde, después de algunos pasos

$$y = \frac{c}{e^{-x} + c}$$

Ahora resuelvan, las que vienen en la guía de manera análoga. Veamos ahora ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneas ... (Tema visto)

¿y?

Después las van a aplicar en otras asignaturas. Después , Después, ..., ¿cuándo?

Yo creo, que deben plantearse los problemas desde otra perspectiva. Por ejemplo, para el primer profesor:

Una esfera de dos pies de diámetro está hecha de un tipo de madera. Un pie cúbico de la cual pesa dos tercios de lo que pesa un pie cúbico de agua (gravedad específica). Encuentre con cuatro decimales la profundidad ***h***, a la cual flota la esfera en agua tranquila.

En principio, hacer un dibujo que muestre la situación, después narrar la frase “Eureka” de Arquímedes[1], así como una semblanza del mismo, posteriormente explicar porqué usando volúmenes de sólidos de revolución, se obtiene que el volumen de la porción sumergida se da según:

$$Vx = \pi \int_0^h \left(2rx - x^2\right) dx = \pi h^2 \left(r - \tfrac{1}{3} h\right)$$

Con lo cual

$$\pi h^2 \left(r - \tfrac{1}{3} h\right) = \tfrac{4}{3} \pi (1)^3 \, \tfrac{2}{3}$$

Es decir

$$h^3 - 3h^2 + \frac{8}{3} = 0$$

Obviamente, los métodos explicados antes, son poco prácticos, entonces se debe recurrir al algoritmo de Newton-Rapson (se debe explicar como llegar a dicho algoritmo). Aplicándolo, tenemos:

$$h_{n+1} = h_n - \frac{h_n^3 - 3h_n^2 + \tfrac{8}{3}}{3h_n^2 - 6h_n} \qquad h_0 = ?$$

1 Principio de Arquímedes: Sobre un cuerpo sumergido en un líquido, como resultado de la presión hidrostática actúa una fuerza que va dirigida verticalmente hacia arriba, y cuya magnitud es igual al agua que desaloja el cuerpo.

Debe explicarse, porqué se deben dar condiciones iniciales razonables.

Tomando $h_0 = 1.5$, se obtienen tres raíces, -0.8339, 1.2260 y 2.6069 pies. Claramente se tienen que discutir los resultados y escoger el apropiado, es decir, explicar que significa excluir la primera y tercera y porque es razonable la segunda. Pero no acaba el problema, supongamos ahora que la densidad de la madera es a, con $0 \le a \le 1$. ¿Qué sucede sí ?, ¿Qué sí $a = 0$?, ¿Qué sí $a = 1$?, etc. Simulando con computadora. ¿Vale el proceso inverso?, ¿Ayudará a construir flotadores para tinácos?, etc.

Veamos una alternativa para el segundo profesor:

Cuando una población grande tiene un crecimiento no controlado (hay espacio y comida suficientes), es adecuado el modelo de Malthus. Sin embargo si una parte de la población es “eliminada” o hay disminución en la comida, el crecimiento exponencial no es válido, es decir, falla el modelo.

$$\frac{dP(t)}{dt} = aP(t), \ P(t) = P_0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(1)}$$

Pues la tasa de crecimiento de la población empieza a decrecer, cuando la población es grande. La manera de tomar en cuenta esta posibilidad, es agregar un segundo termino en la ecuación **(1)**. Este término debe tener solamente un efecto pequeño, cuando la población es pequeña, debe hacer decrecer la tasa de crecimiento cuando la población es grande. Esto es:

$$\frac{dP(t)}{dt} = aP(t) - \varepsilon P^2(t), \ P(t) = P_0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(2)}$$

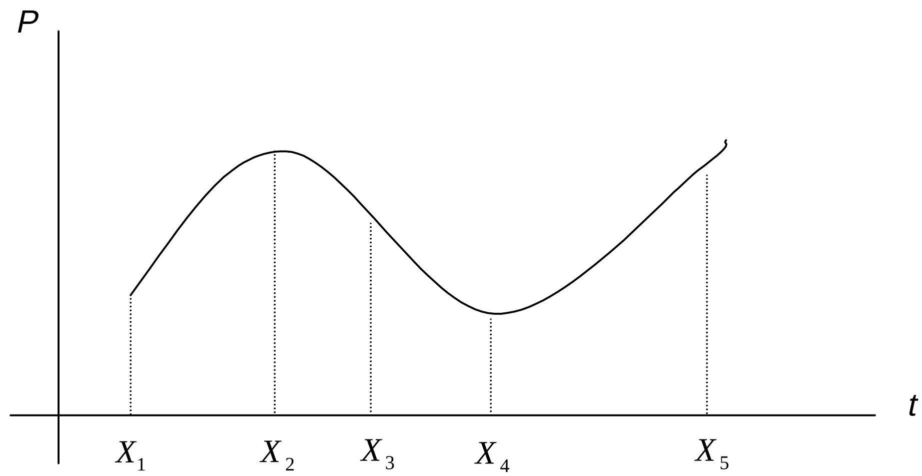
donde a y ε son constantes positivas. Normalmente ε es mucho más pequeña que a, (de donde a/ε es grande) y $P_0 < a/\varepsilon$. Esta ecuación **(2)**, es llamada ecuación logística.

La ecuación **(2)** la podemos rescribir como:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - \varepsilon P), \ P(t) = P_0$$

comparándola con la ecuación diferencial, vemos la semejanza.

Es necesario hacer notar, que no siempre es posible integrar ecuaciones diferenciales, es decir, no siempre se puede encontrar una forma cerrada, en otras no se puede despejar a la variable dependiente, y en otras, es más interesante, graficar en lo que se conoce como espacio fase. Para ello hay que recordar la interpretación geométrica de la primera y segunda derivada de una función derivable. Veamos la gráfica siguiente.



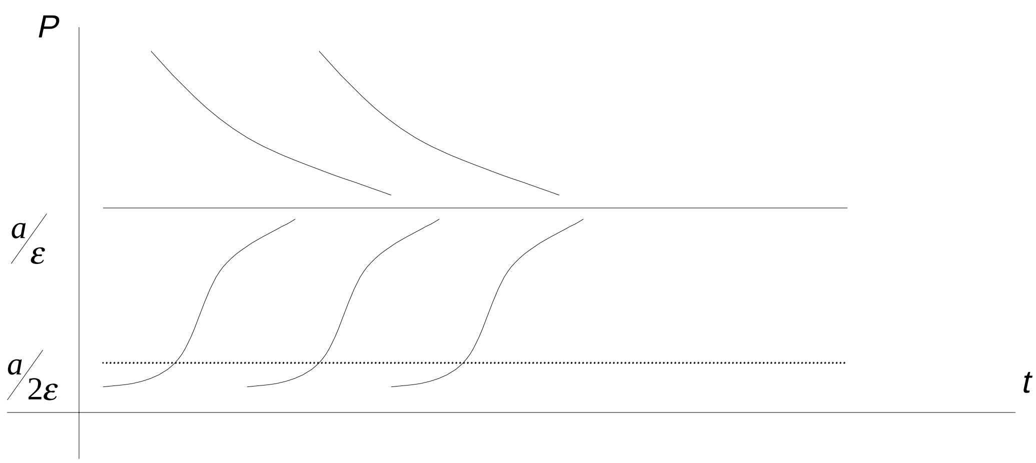
En (X_1, X_2), $P'>0$, $P''<0$, en $X_2; P'=0$

En (X_2, X_3), $P'<0$, $P''<0$,en $X_3; P''=0$

En (X_3, X_4), $P'<0$, $P''>0$,en $X_4; P'=0$

En (X_4, X_5), $P'>0$, $P''>0$

Aplicando esta técnica a la ecuación **(2)** se obtiene:



Analizando la gráfica se obtiene información muy interesante, como por ejemplo que en $P = a/\varepsilon$, tenemos un punto de equilibrio, que es asintóticamente estable, este también se le llama población límite (lo que permite el medio). En la actualidad, se publican muchos artículos donde se sigue investigando, (atractores extraños, caos, fractales, etc.) “todo un garbanzo de a libra”.

Pero este modelo no termina, con poblaciones. En mecánica de fluidos, ecuaciones como la **(2)** rige la evolución de una pequeña perturbación y persiste P en flujo laminar de un fluido. Por ejemplo, si se cumple dicha ecuación, en ciertas condiciones, entonces se amortigua la perturbación y persiste el flujo laminar. En caso contrario, la Perturbación crece y el flujo laminar se fragmenta en uno turbulento. Y a/ε se le llama amplitud crítica (aquí esta inmersa otra teoría matemática, catástrofes). Los investigadores desean mantener el nivel de perturbación en un túnel de viento lo suficientemente bajo de modo que se puedan estudiar el flujo laminar sobre un perfil aerodinámico.

En resumen, en la enseñanza de la matemática en las carreras de ingeniería nos debe interesar como docentes los siguientes aspectos:

1. Pocos conceptos de calidad en lugar de muchos carentes de ella.
2. Buscar problemas a manera de introducción de conceptos donde se puedan mencionar aspectos como:
   a) Historia del problema.
   b) Personajes involucrados en su solución.
   c) Anécdotas, si las hay, con relación al problema.
   d) Aplicación concreta.
   e) Semejanza con otros modelos.
   f) Bibliografía afín.
3. A partir del análisis matemático encontrar la solución o soluciones atacando el problema desde diversos ángulos. Encontrando además los alcances y las limitaciones del mismo.
4. En la medida de lo posible señalar vías de investigación para una posible tesis profesional futura.
5. Aceptar las carencias y deficiencias que de manera natural surgieran tanto en lo personal como en el grupo pues debemos entender que esto es un proceso, es algo indivisible, es un todo, en fin ser concientes de que nuestras limitantes no necesariamente implican las de nuestros alumnos.
6. Entender y hacer entender que los fenómenos naturales son en extremo complejos y que en muchas ocasiones podemos usar una herramienta muy poderosa como lo es la computadora, pero es solo eso, una herramienta que facilita cálculos engorrosos.
7. Recomendar con frecuencia actividades artísticas y culturales predicando con el ejemplo.
8. VALENTÍA, HONESTIDAD Y HUMILDAD.

Deseo despedirme mencionando un párrafo de Franccesco Severi, en su libro Lecciones de Análisis Volumen II.

“...ya he dicho que el objeto es doble: Contribuir a conservar el nivel matemático de nuestros mejores técnicos para que la divina luz de la intuición, armada de poderosos medios abstractos, pueda iluminar las dificultades de la aplicación, por una parte y por la otra ganar para la ciencia pura alguna nueva energía que se salve de la temida decadencia, que más tarde habría de apoderarse también de la técnica”.

Gracias.

--- o ---