Estrategias Complementarias para Facilitar el Proceso Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática

H. Aguilar Juárez
M. R. Del Moral Nieto
Y. Minami Koyama
Facultad de Ingeniería, UNAM

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS CON EL USO DE LOS DOS *HEMISFERIOS CEREBRALES*

A lo largo de la historia humana, encontramos que muchos personajes curiosos han dedicado su vida al descubrimiento de los componentes y funciones del cuerpo humano. Así encontramos que desde la civilización griega hasta nuestros días hay infinidad de aportaciones que nos indican que el proceso de aprendizaje se realiza en el ***CEREBRO***. Para enmarcar y fundamentar este trabajo presentamos la descripción de los componentes anatómicos, neurológicos y fisiológicos del cerebro que nos muestran una relación con el aprendizaje.

Datos anatómicos, neurológicos y fisiológicos

La descripción anatómica del cerebro humano nos muestra que es el órgano más voluminoso del encéfalo, se encuentra en la parte anterior y superior del cráneo, arriba del tallo cerebral, arriba y adelante del cerebelo; tiene una forma ovoidea y su superficie presenta salientes, llamadas circunvoluciones[1] o surcos, algunos de estos son más profundos y reciben el nombre de fisuras (cisuras). Las fisuras son[2] (ver figura 1):

a) la fisura longitudinal (cisura interhemisférica) que divide al cerebro en dos *hemisferios cerebrales*: derecho e izquierdo, unidos por un conjunto de fibras transversales llamado cuerpo calloso;

b) el surco central (cisura de Rolando);

c) el surco lateral (cisura de Silvio);

d) el surco occipital transverso (cisura perpendicular externa);

e) la fisura transversa.

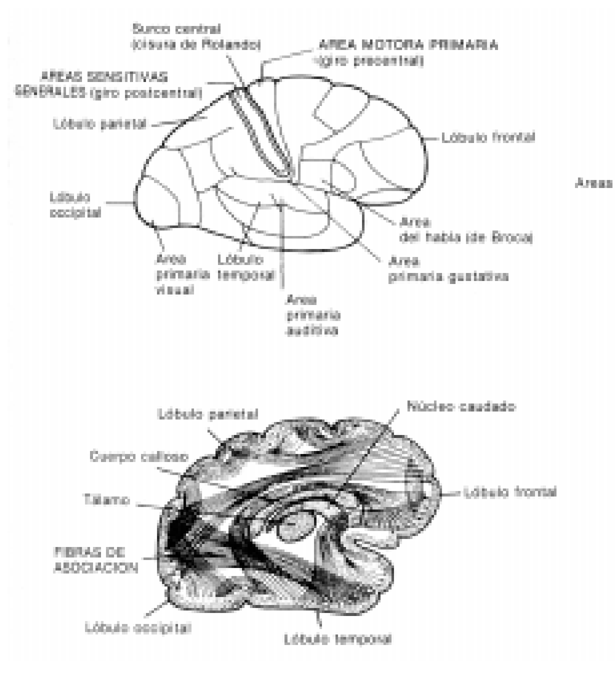

Figura 1. Vistas lateral y seccional del cerebro (del libro Ciencias de la Salud).

1 Higashida Hirose Bertha Y., Ciencias de la Salud, Segunda Edición, McGraw-Hill, México, 1994, pp.125-129.

2 Ibid.

Estos surcos dividen a cada *hemisferio* en lóbulos: frontal, temporal, parietal y occipital, como se muestra en la figura 2.

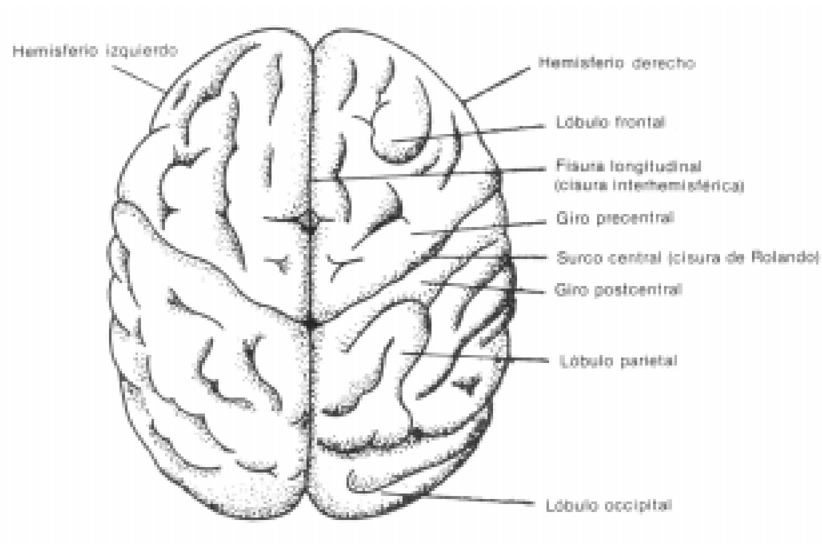

Figura 2. Vista superior del cerebro (del libro Ciencias de la Salud).

En el cerebro se encuentran dos sustancias: la sustancia gris, que forma una capa superficial llamada *corteza cerebral,* y la sustancia blanca, que está formada por fibras que siguen diferentes direcciones:

a) las fibras de *asociación* llevan sus impulsos de una parte a otra del mismo *hemisferio*;

b) las fibras *comisurales* llevan impulsos de un *hemisferio* a otro;

c) las fibras de *proyección*, forman los tractos ascendentes y descendentes que llevan los impulsos al tallo cerebral y a la médula espinal.

La característica principal de la *corteza cerebral* es la habilidad de detectar y hacer patrones del sentido de las cosas, descifrando datos, reconociendo relaciones y organizando la información.

La corteza cerebral tiene cuatro áreas dominantes[3] y cada una tiene una función diferente:

a) lóbulo frontal: (área motora) encargado de resolver problemas, realizar el proceso de planeación y en donde reside la personalidad;

b) lóbulo parietal: recepción de la información sensorial, que permite reconocer el tamaño, forma, peso y textura de los objetos, la posición de nuestro cuerpo e integrar los estímulos sensitivos;

c) lóbulo occipital: área de la visión;

d) lóbulo temporal: audición, lenguaje y algunos aspectos de la memoria.

Los sentidos del gusto y del olfato se encuentran en la profundidad del surco lateral y el lóbulo temporal.

El tejido que conforma al cerebro y a todos sus componentes se llama tejido *nervioso*, que a su vez está compuesto por cientos de miles de células llamadas neuronas, las cuales tienen ramificaciones que reciben el nombre de dendritas y axones. Las dendritas se encargan de hacer conexiones con otras neuronas y los axones pasan la información. Los axones están cubiertos con una sustancia llamada *mielina*, que actúa como aislante del axón y preservador de la neurona y el área neuronal, haciendo que lo aprendido sea permanente.

[3] Chusid, Joseph y McDonald, J. J., Neuroanatomía Correlativa y Neurología Funcional, El Manual Moderno, S. A., México, 1968, pp. 1-66.

Este proceso de preservación que es llamado mielinización, es considerado el ciclo triple de habilidades en el aprendizaje (Harvard Center for Cognitive Studies)[4]. La primera parte del ciclo es una visión general o global, en que se piensan ideas, deseos y se predice. La segunda es la relación y la complementación de la información en que se realiza un proceso analítico complementario, se afinan los conceptos. En la tercera, la práctica y sus variantes, se transfiere el conocimiento a la vida cotidiana y a todas las áreas de la existencia humana.

La conexión entre las dendritas se llama *sinapsis*. Cuando una célula envía un mensaje a otra, lo hace a través de reacciones químicas. Al recibir el material químico (neurotransmisor), la célula receptora manda una señal eléctrica a través del axón. Los neurotransmisores son sustancias químicas entre las que se encuentran la acetilcolina, la adrenalina y la histamina. Se piensa que gracias a estas sinapsis y al incremento de ellas con otras terminales nerviosas es que se logra la memorización. El aprendizaje es considerado actualmente como una reacción química en la que intervienen el sodio y el potasio en la interacción dendrítica.

Los nutrientes necesarios para el buen funcionamiento del cerebro son: agua, tiroxina, selenio, boro, vitamina B, fructuosa y ácidos grasos, entre otros. Estos nutrientes se encuentran en alimentos como el pescado, huevo, germen de trigo y nueces.

Adentrándonos en el aprendizaje se encuentra que el *hemisferio derecho* procesa conjuntos, combina partes para integrar el todo, además de los aprendizajes aleatorios como: ritmos, imágenes, color, reconocimiento de caras, patrones, mapas y dimensiones. Es el de la intuición, la capacidad creadora, los sueños y la imaginación. El *hemisferio izquierdo* (analítico) procesa listas y secuencias, es lógico, se encarga de las palabras, el razonamiento, los números, el pensamiento lineal y el análisis. El *hemisferio derecho* controla el lado izquierdo del cuerpo y el *hemisferio izquierdo* el lado derecho[5].

La actividad cerebral se puede detectar a través de sus fenómenos eléctricos. El cerebro produce finas ondas eléctricas, las cuales viajan a través de sus estructuras, las células nerviosas. Se producen con diferentes frecuencias y pueden ser medidas con un aparato médico llamado electroencefalógrafo, adhiriendo unos electrodos muy sensibles al cráneo.

Las ondas más comunes son: las *beta* que se producen fundamentalmente en el estado de alerta y son las de la actividad consciente, las del pensamiento lógico, las del análisis; son ondas de acción.

Las ondas *alfa* son las que se producen cuando las personas están alerta pero relajadas o meditando, y permiten que el cerebro descanse y aprenda mejor; son las ondas del *soñar despierto*, las de la imaginación, la inspiración y rápida asimilación de hechos. Permite introducirnos a nuestro propio subconsciente.

Las ondas *theta* se producen en las fases iniciales de sueño y al despertar. También se relacionan con las sensaciones y los estados que permiten registrar información en nuestro cerebro.

Las ondas *delta* son generadas en el sueño profundo. Hay que aclarar que estas ondas cerebrales pueden estar presentes en todo momento, pero algunas de ellas predominan sobre las otras[6].

El cerebro humano es único, ninguna persona tiene un cerebro igual. Éste contiene la información de experiencias, creencias, modelos, datos, etc. Cada cerebro tiene diferencias en su fisiología, conducción neuronal, balance bioquímico. El cerebro no es una estructura fija en su acción, sino por el contrario, tiene la habilidad de pensar y aprender permanentemente cuando lo ejercitamos física (a través del ejercicio corporal) y mentalmente.

La estimulación cerebral se logra con experiencias multisensoriales, novedades o retos. El cerebro se enriquece con una adecuada nutrición, estímulos sociales positivos y retroalimentación en el medio ambiente del aprendizaje.

---

[4] Kasuga L. y otros, Aprendizaje Acelerado, Ed. Tomo, S.A., México, 1998, p. 21.

[5] Ibid, p. 27.

[6] Ganong William F., Manual de Fisiología Médica, Ed. El Manual Moderno, S. A., México, 1976.

Los proveedores de información al cerebro son los cinco sentidos: vista, oído, tacto (kinestesia o movimiento), olfato y gusto, los cuales permiten el contacto con el medio y son la parte inicial del aprendizaje. Si hablamos de un aprendizaje formal, estaremos atendiendo a los sentidos de la vista, el oído, y el tacto (kinestésico).

Con respecto al aprendizaje de las matemáticas, las investigaciones sugieren que nuestras habilidades básicas para aprenderlas, así como el lenguaje y los modelos físicos, pueden estar colocados desde el nacimiento en nuestro cerebro.

Howard Gardner[7] describe que el origen de esta capacidad se encuentra en la confrontación con el mundo de los objetos, en su ordenación, reordenación y en la evaluación de su cantidad.

El investigador más importante del pensamiento lógico-matemático fue Jean Piaget[8]. Descubrió que en la primera instancia para que este pensamiento se desarrolle, el sujeto debe accionar sobre el propio mundo. Así la persona en sus primeros años de vida, se desarrolla intelectualmente con la influencia social y con el desarrollo espontáneo o psicológico, como lo llama Piaget simplemente.

Piaget mostró en forma muy atinada los orígenes de la inteligencia lógico-matemática en las actividades infantiles sobre el mundo físico; la importancia del descubrimiento del número; la gradual transición desde la manipulación física de los objetos hasta las transformaciones interiorizadas de las actividades; el significado de las relaciones entre las actividades mismas, y la especial naturaleza de estructuras superiores del desarrollo en que el individuo comienza a trabajar con declaraciones hipotéticas, y a explorar las relaciones e implicaciones que se obtienen entre esas declaraciones. Por lo tanto, el sujeto podrá comprobar y demostrar su razonamiento lógico-matemático a través de imágenes, del lenguaje verbal, del lenguaje escrito, de esquemas, símbolos o modelos físicos.

En cuanto al conocimiento de la lógica y la matemática tenemos las declaraciones de estudiosos como Willard Quince, Whitehead y Rusell, mencionados por Gardner[9], quienes argumentan que la lógica y la matemática han tenido historias distintas, pero en tiempos recientes se han aproximado entre sí;

> "La consecuencia es que ahora es del todo imposible establecer una línea entre ambas: de hecho, las dos son una. Difieren como el hombre y el niño: la lógica es la juventud de las matemáticas y las matemáticas son el estado lógico de la lógica".[10]

Gardner, menciona que con observaciones y objetos en el mundo material, el individuo se aproxima a sistemas formales cada vez más abstractos, cuyas interacciones son cuestiones de lógica en vez de la observación empírica.

¿Por qué proponemos una enseñanza holística[11] de las matemáticas que desarrolle las habilidades de ambos *hemisferios cerebrales*? Hagamos la siguiente comparación del funcionamiento del cerebro con el procesador de una computadora[12].

---

[7] Gardner Howard, Estructuras de la Mente. La teoría de las inteligencias múltiples, Segunda Edición, Ed. Fondo de Cultura Económica, México, pp. 167-210.

[8] Piaget Jean, Problemas de Psicología Genética, Tr. Miguel A. Quintanilla, Segunda Edición, Ed. Ariel, Barcelona, 1976.

[9] Op. Cit., Gardner, p. 174.

[10] Ídem.

[11] Holístico: deriva del termino griego *holos* que significa todo; el holismo es una filosofía que considera al sujeto como un todo, como una unidad y no un conjunto de partes. En este sentido, intenta llevar las dimensiones emocionales, sociales, físicas y espirituales de las personas en armonía.

[12] Esta información sobre los componentes de la computadora se tomó de Microsoft Corporation.

La unidad central de la computadora conocida como CPU[13] lo conforma un chip (circuito integrado electrónico) o una serie de chips denominado microprocesador, que incorpora un sistema de circuitos. En estos chips se realizan cálculos aritméticos y lógicos que temporizan y controlan las operaciones de los demás elementos del sistema.

Los microprocesadores están compuestos de cuatro secciones funcionales:

a) una unidad aritmética/lógica proporciona al chip su capacidad de cálculo y permite la realización de operaciones aritméticas y lógicas;

b) los registros son áreas de almacenamiento temporal que contienen datos, realizan un seguimiento de las instrucciones y conservan la ubicación y los resultados de dichas operaciones;

c) la sección de control tiene tres tareas principales: temporiza y regula las operaciones de la totalidad del sistema informático; su decodificador de instrucciones lee las configuraciones de datos en un registro designado y las convierte en una actividad, como podría ser sumar o comparar;

d) la unidad interruptora indica en qué orden utilizará la CPU las operaciones individuales y regula la cantidad de tiempo de CPU que podrá consumir cada operación.

Otro elemento importante en un microprocesador es su bus interno, una red de líneas de comunicación que conecta los elementos internos del procesador y que también lleva hacia los conectores externos que enlazan al procesador con los demás elementos del sistema informático. Los tres tipos de bus de la CPU son: el de control que consiste en un conjunto de líneas que detectan las señales de entrada y de otro que transmite señales de control desde el interior de la CPU; el bus de dirección, un grupo de líneas unidireccionales que salen desde el procesador y que gestionan la ubicación de los datos en las direcciones de la memoria; y el bus de datos, un conjunto de líneas de transmisión bidireccional que leen los datos de la memoria y escriben nuevos datos en ésta.

Como podemos observar, tanto la computadora como el cerebro tienen una unidad central, lo conforman varios sistemas que se interconectan y se comunican entre ellos, realizan operaciones lógico-matemáticas y tienen memoria. ¿Cuáles son las diferencias? Una es la posibilidad que tiene el cerebro de sustituir la función de un tejido cuando éste ha sido dañado por el mismo organismo; otra, la posibilidad de crear por sí mismo imágenes, arte, sentimientos y emociones, siendo éstas últimas de suma importancia para el aprendizaje. La computadora no puede sustituir sus circuitos dañados, y procesa únicamente aquello para lo que ha sido programada.

MÉTODOS DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE HOLÍSTICOS

Actualmente se sabe que se usan ambos *hemisferios cerebrales* al mismo tiempo en casi todas las actividades cotidianas, y sólo varía el grado en que se usan. Ninguno de los *hemisferios cerebrales* es más importante que el otro; el pensamiento efectivo requiere de ambos.

La mente tiene una capacidad casi ilimitada: si desarrollamos mediante control consciente centros cerebrales que nos permitan desarrollar todas sus habilidades, estaremos potenciando su actividad de manera inimaginable. Algunos investigadores consideran que la capacidad creadora del cerebro puede ser ilimitada, pero para ello tenemos que aprender a aprender. Tenemos que disfrutar lo que aprendemos y utilizar simultáneamente la mente lógica, el cuerpo y la mente creadora.

[13] CPU: Unidad Central de Procesamiento, por sus siglas en inglés.

Los métodos de enseñanza holísticos pretenden que el individuo utilice los dos *hemisferios cerebrales* y que aproveche ambas capacidades al mismo tiempo para que haya un despliegue de toda su potencialidad de desarrollo.

Cuando la información es presentada a través de todos los sentidos, los estudiantes hacen sus propias conexiones entre lo que se tiene que aprender y lo que ya se tiene entendido, logrando el proceso de aprendizaje.

Algunas técnicas que estimulan la enseñanza a través del *hemisferio derecho*, incluyen el pensamiento visual, la fantasía, el evocativo, las metáforas, la experimentación, la manipulación de materiales, la simulación, el aprendizaje multisensorial y el uso de la música.

En la actualidad, la educación se preocupa por el *qué* y no por el *cómo*: no considera que cada uno de nosotros piensa y procesa la información en diferente forma. Algunas personas visualizan fácil y claramente, otras tienen dificultad para producir una imagen visual clara. El pensamiento lineal, analítico, es fácil para algunas personas, pero difícil para otras.[14]

Una de las acciones que puede realizar el maestro es la de identificar en sus alumnos cómo aprenden y resuelven problemas en lo individual, cómo desarrollan el uso correcto de sus operaciones cognitivas, tales como la captación, la memoria, la evaluación, la producción convergente y divergente. Por otra parte, es fundamental que los alumnos conozcan sus estilos de aprendizaje[15] y desarrollen la consciencia de sus propios procesos de pensamiento, de modo que con mayor autonomía elijan sus estrategias de aprendizaje. Entre mayor sea el número de herramientas de pensamiento y aprendizaje que demos al alumno, mayor será su posibilidad de éxito.

El trabajo cerebral simultáneo asegurará la transferencia de significados cognitivos a otras áreas y situaciones. Se deben desarrollar actitudes de confianza en sí mismo, de autoestima y de motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas.

EL EMPLEO DE MODELOS CONCRETOS PARA EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS ABSTRACTOS

Uno de los recursos que se puede utilizar para estimular en forma deliberada la participación intensa de ambos *hemisferios cerebrales* en el aprendizaje de las matemáticas consiste en asociar los conceptos matemáticos abstractos con situaciones o hechos concretos. Los siguientes ejemplos ilustran esta posibilidad para algunos conceptos tomados del cálculo vectorial, los cuales se relacionan con fenómenos físicos comunes y bien conocidos por cualquier persona.

Un *campo vectorial* en R^n es una función $\mathbf{F}: A \subset R^n \to R^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x}$ en su dominio A, un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.[16]

El concepto de *campo vectorial* se ilustra gráficamente en los casos en que n = 2 ó n = 3, seleccionando algunos puntos del dominio de la función, y trazando a partir de cada uno de ellos una flecha que represente al vector asociado con ese punto por medio de la función.

[14] Op. Cit., Kasuga, p. 34.

[15] *Inventario de BARCH*. Instrumento psicopedagógico, autoaplicable, que nos permite identificar nuestro estilo de aprendizaje.

[16] Marsden, J. E. y Tromba, A. J., Cálculo Vectorial, Tercera Edición, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, 1991, p. 211.

Por ejemplo, para el *campo vectorial* en R^2 dado por la expresión $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ se tiene que el vector asociado con el punto (1, 1) es

$$\mathbf{F}(1, 1) = (1)\mathbf{i} + (1 + 1)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} .$$

En la tabla 1 se presentan los vectores asociados con varios puntos del dominio de este *campo vectorial* y en la figura 3 se muestra su representación gráfica. La figura 4 ilustra la representación gráfica del campo vectorial en R^3: $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{j}$.

Tabla 1. Algunos valores del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}$.

(x, y)	**F**(x, y)
(-1, -1)	- **i** - 2**j**
(1, -1)	**i**
(-1, 1)	- **i**
(1, 1)	**i** + 2**j**

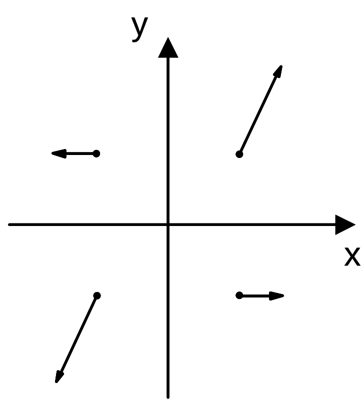

Figura 3. Representación gráfica del campo $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}$.

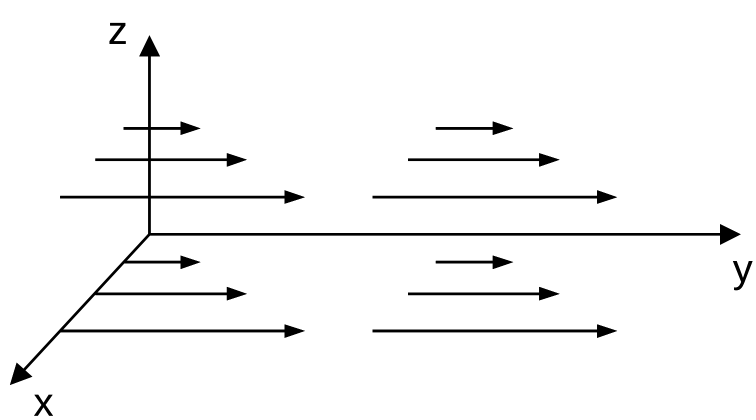

Figura 4. Representación gráfica del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{j}$.

La representación gráfica de un *campo vectorial* constituye la asociación de una imagen concreta con el concepto abstracto de *campo vectorial*. Esta noción se puede asociar además con el concepto físico de un *campo de velocidades* que se maneja en la mecánica de fluidos. Así, por ejemplo, la distribución de velocidades en la superficie del agua que fluye a través de un canal (figura 5) se puede representar analíticamente por medio de un campo vectorial en el plano x-y.

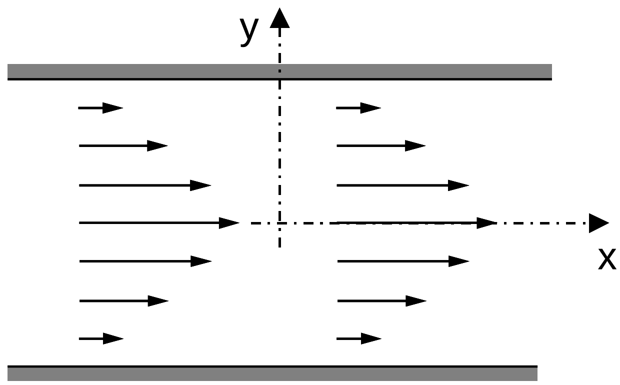

Figura 5. Campo de velocidades en la superficie del agua, en un canal.

La variación de la velocidad del agua en un canal, con la profundidad, se puede estudiar experimentalmente con ayuda del molinete hidráulico que se representa de manera esquemática en la figura 6. Impulsada por la velocidad del líquido, gira la hélice y, al hacerlo, envía señales luminosas a un contador que se halla dentro del cuerpo fuselado del instrumento. Una vez calibrado, éste indica la velocidad del líquido en el punto en que se encuentra colocado, cuya profundidad se determina con ayuda de la barra graduada que le sirve de soporte. La distribución de velocidades, como la que se muestra en la figura 7, se puede modelar analíticamente mediante un *campo vectorial* en el plano x-z.

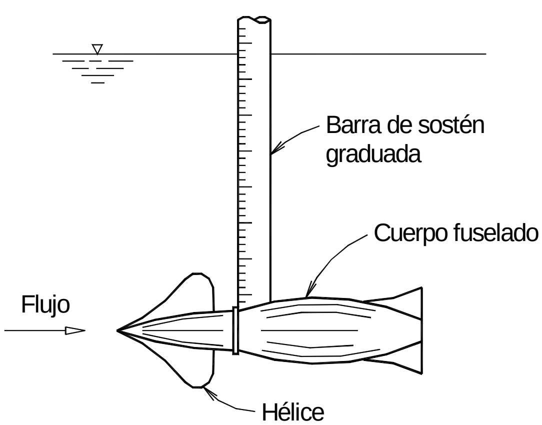

Figura 6. Molinete hidráulico.

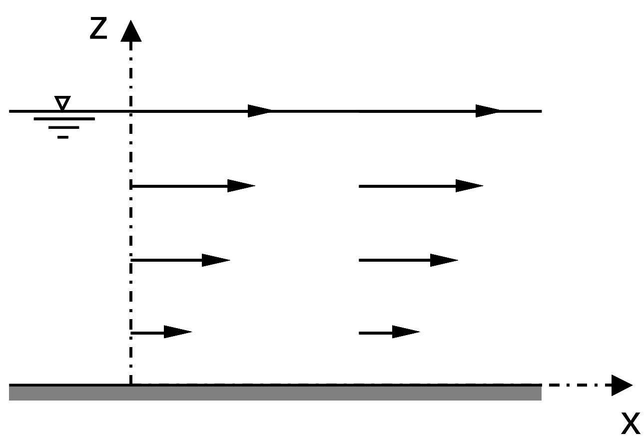

Figura 7. Campo de velocidades en una sección longitudinal de un canal.

El rotacional de un *campo vectorial* es otro concepto al que se puede dar una interpretación física sencilla. Si **F** es un campo vectorial en R^3, definido en coordenadas cartesianas por medio de una expresión del tipo:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\,\mathbf{k}\ ,$$

con primeras derivadas parciales continuas, el rotacional de **F**, que se denota por rot **F**, se define como sigue:

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}\ .$$ [17]

Esta definición es válida también para *campos vectoriales* en R^2. En este caso se toma $F_3(x, y, z) = 0$ y se aplica la definición anterior.

Si el *campo vectorial* F representa el campo de velocidades de un fluido, el rotacional de **F** representa la *vorticidad* de dicho campo, en el sentido que ilustra el ejemplo siguiente.

Sea $\mathbf{F}(x, y) = \left[1 - (y - 4)^2 / 16\right]\mathbf{i}$, para 0 £ y £ 8, el campo de velocidades, en m/s en la superficie del agua que fluye por un canal recto de 8 m de ancho. (Véase la figura 9, más adelante).

La tendencia de un *campo de velocid*ades como éste a formar vórtices o remolinos (vorticidad) se puede explorar experimentalmente con la ayuda de un pequeño rodete flotador (por ejemplo, de corcho), como el que se presenta en la figura 8. Cuando éste se coloca en algún punto sobre la superficie del agua del canal, la rotación del rodete es un indicador de la vorticidad del flujo en ese punto.

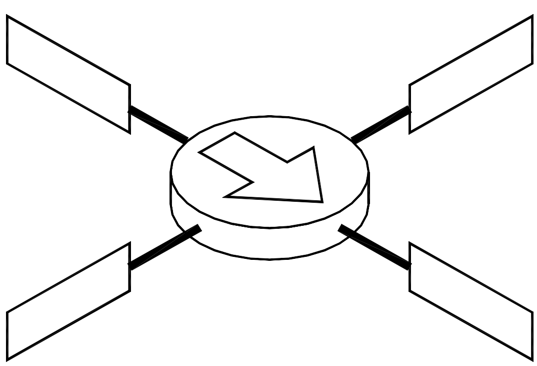

Figura 8. Rodete para explorar la voticidad de un flujo.

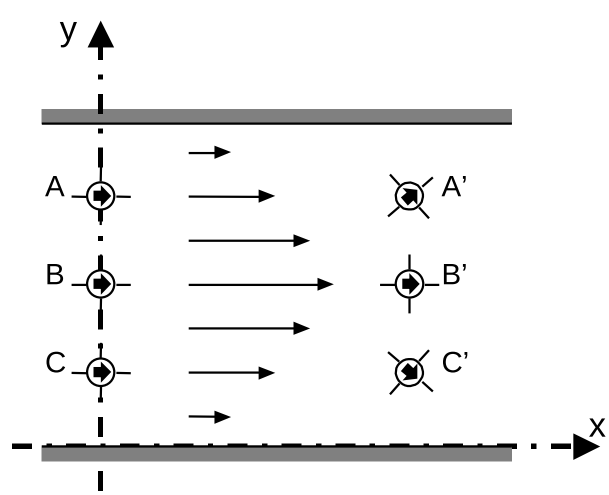

Figura 9. Exploración de la vorticidad del flujo en un canal por medio de un rodete flotador.

[17] Op. Cit., Marsden y Tromba, p. 220.

La figura 9 representa el *campo de velocidades* **F**(x, y) en el canal de nuestro ejemplo. No es difícil prever que si el rodete se coloca en algún punto del centro del canal, como el B de la figura, y se le deja mover llevado por la corriente, el rodete se desplazará a lo largo del eje x, sin rotar, debido a la simetría lateral de las velocidades que impulsan sus aspas. En cambio, si el rodete se coloca en puntos como el A o el C, el desplazamiento del instrumento hacia los puntos A' y C' irá acompañado de una rotación en sentido antihorario y horario, respectivamente, como se indica en dicha figura.

Los resultados anteriores, producto de la inspección cualitativa de la distribución de velocidades en el esquema del campo, son congruentes con los valores de rot **F** en los puntos A, C y E, calculados a partir de la expresión analítica de **F**(x, y) y la definición del *rotacional*. La tabla 2 resume estos resultados, junto con nuestras observaciones cualitativas acerca de la vorticidad, las cuales constituyen una interpretación física concreta del concepto matemático de *rotacional*.

Tabla 2. Comparación de los valores del rotacional para un campo de velocidades, con la vorticidad previsible de éste.

Punto	rot **F**(x, y) = [(y - 4) / 8] **k**	***Vorticidad (Rotación del rodete)***
A (0, 6)	(1/4) **k**	En sentido antihorario
B (0, 4)	**0**	No hay
C (0, 2)	-(1/4) **k**	En sentido horario

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE QUE INVOLUCRA EL FUNCIONAMIENTO SIMULTÁNEO DE LOS DOS *HEMISFERIOS CEREBRALES*

Otra de las ideas que proponemos se refiere a la importancia del proceso de resolución de problemas, para propiciar el desarrollo de habilidades intelectuales que involucran a los dos *hemisferios cerebrales*. Recordemos que desde el punto de vista neurofisiológico, mientras más interconexiones neuronales se produzcan en el proceso de aprendizaje, éste será más sólido y significativo para el individuo.

Para resolver un problema, es necesario primero leer detenidamente su enunciado, y entender a plenitud qué es lo que se solicita. Aquí interviene más que nada el *hemisferio izquierdo*. Posteriormente, es muy recomendable plasmar con figuras y dibujos los conceptos principales involucrados, con lo que puede lograrse la concretización de las ideas. Esta actividad corresponde al *hemisferio derecho*. Enseguida, se buscan las posibles soluciones y estrategias para resolverlo, hasta encontrar el procedimiento más adecuado; en este proceso intervienen los dos *hemisferios*.

Los estudios de A. Gervais[18] confirman la participación de ambos *hemisferios* durante la resolución de problemas matemáticos. Es por ello que consideramos muy conveniente incidir en el tratamiento de las estrategias para la resolución de problemas, en aras de obtener un aprendizaje más sólido de las matemáticas.

[18] Gervais A., Complex Math for a Complex Brain, Science News 121, enero 1982.

Exponer claramente en clase cómo se resuelve un determinado problema, no es suficiente para lograr que el alumno aprenda a resolver problemas similares. Aquí podemos citar a O. Riverón y otros[19], quienes afirman que:

> "Muchos docentes presentan a los estudiantes un contenido acabado, con el cual esperan que ellos usen ese conocimiento para encontrar la solución de los problemas propuestos. Se asume que los alumnos, luego de conocer dicho contenido, están capacitados para resolver diversos problemas. La realidad es que muchos de ellos tienen dificultades en la aplicación de los contenidos estudiados."

Con base en lo anterior, consideramos que para aprender a resolver un problema por sí mismo, es necesario que el estudiante:

a) identifique el uso de una estrategia en particular;

b) discuta la estrategia detalladamente de manera descriptiva; y

c) logre un apropiado grado de entrenamiento para su uso.

Algunas estrategias de aprendizaje que podrían coadyuvar al desarrollo de algunas habilidades para resolver problemas en los alumnos, son las siguientes:

a) resolver problemas nuevos en clase, con objeto de mostrar a los estudiantes las decisiones tomadas durante el proceso de su resolución;

b) propiciar el intercambio de ideas entre estudiantes a la hora de resolver problemas en clase, con la finalidad de discutir la destreza y deficiencias mostradas por ellos en dicho proceso; el profesor debe proveer algunas direcciones que sean de valor para la discusión;

c) dividir la clase en pequeños grupos que discutan los problemas; el papel del profesor es elaborar preguntas que ayuden a los estudiantes a reflexionar en lo que están haciendo.

Por otro lado, conviene hacer notar que el proceso de resolución de problemas está íntimamente ligado al concepto de creatividad. M. Rodríguez[20] menciona que en el proceso innovador se requiere desarrollar las siguientes fases:

i) Fase lógica
   - Formulación del problema
   - Recopilación de datos
   - Búsqueda de soluciones

ii) Fase intuitiva
   - Medida
   - Maduración y aclaración
   - Iluminación

iii) Fase crítica
   - Examen del descubrimiento
   - Verificación

---

[19] Riverón P. O., Martín A. J. A. y González C. I., Resolución de problemas: una alternativa didáctica en el aprendizaje de las Matemáticas, p. 3.

[20] Rodríguez E. M., Creatividad para resolver Problemas. Principios y Técnicas, Pax México, México, 1997, pp. 8-9.

Según el mismo autor, la fase intuitiva es la más importante, pues no es difícil encontrar gente capacitada en el desarrollo de las fases lógica y crítica, en las cuales se requiere que el individuo lleve a cabo sistemáticamente las actividades mencionadas arriba, pero pocos son capaces de lograr la *iluminación* que es la culminación de la fase intuitiva.

Con base en lo anterior, para enseñar a resolver problemas, es importante incidir en la formación de la habilidad de aprovechar las fuerzas del inconsciente, como podemos constatarlo en el discurso de M. Rodríguez[21] con respecto a la iluminación, quien afirma que es una etapa íntimamente ligada con la incubación de ideas, la cual implica:

> “. . . la digestión inconsciente de las ideas; es un periodo silencioso, aparentemente estéril, pero en realidad de intensa actividad; . . .”.

Para alcanzar la iluminación durante la resolución de un problema, proponemos un procedimiento más o menos fácil de ponerlo en práctica, que consiste en proponerse con claridad los objetivos y analizar los detalles inherentes a dicho problema durante un intervalo de tiempo reducido, y luego “abandonarlos en el humus de la psique”. Luego de este proceso, que corresponde justamente a la incubación, el inconsciente trabaja sobre el problema sin necesidad de hacerlo conscientemente, y cuando encuentra la solución, lo comunica al consciente. Es en ese momento cuando se da la iluminación. Es muy importante alternar la meditación con periodos de relajamiento, y saber “parar la máquina y desenchufarla”.

Consideramos que la idea de *aprender divirtiéndose* puede aplicarse en este caso con la ejecución de algunos videojuegos para computadora, como el *Buscaminas* y el *Soko-ban*, que propician la formación de habilidades intelectuales de implicación geométrica y lógica a la vez, y que pueden generar el aprendizaje del establecimiento de estrategias para la resolución de problemas.

Aquí creemos conveniente mencionar la importancia que tienen ciertos juegos, como los arriba citados, y el deporte para el desarrollo intelectual, y los cuales están subestimados por la mayoría de las personas, y que incluso llegan a pensar que perjudican al aprendizaje académico. Como comentamos anteriormente en la fundamentación de esta ponencia, una buena condición física incide en una mejor oxigenación de las células cerebrales, lo cual a su vez facilita la producción de conexiones sinápticas en el cerebro, de tal manera que prepara al individuo para llevar a cabo una actividad intelectual intensa, además de incidir en el incremento de su poder de concentración.

Para propiciar la aplicación práctica de las habilidades de resolución de problemas en nuestros alumnos, proponemos que en las tareas y los ejercicios que les encargamos, incluyamos problemas novedosos que requieran algún pequeño proceso creativo, y no sólo dejarles muchos problemas del mismo tipo, los cuales propician en ellos una mecanización de los procedimientos de resolución. Aquí no queremos dar a entender que esté mal dejar este último tipo de tareas, sino que deseamos hacer notar que lograr el equilibrio entre ejercicios rutinarios y creativos, es lo más adecuado para el aprendizaje de las matemáticas por parte de nuestros alumnos.

SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS APLICADOS A CONCEPTOS REALES

Muchos de los conceptos matemáticos que el estudiante de ingeniería debe aprender, encuentran su aplicación en el análisis y modelado de problemas físicos. Estos proporcionan interpretaciones concretas de los conceptos matemáticos abstractos, y su consideración en los cursos de matemáticas puede ser un recurso didáctico valioso, de acuerdo con la propuesta de esta ponencia.

[21] Rodríguez E. M., Manual de Creatividad. Los procesos psíquicos y el desarrollo, Trillas, México, 1987, pp. 40-41.

Para que este objetivo se cumpla, sin embargo, los problemas deben seleccionarse cuidadosamente a fin de que reúnan los siguientes requisitos:

a) hallarse lo suficientemente próximos a las vivencias del estudiante, quien probablemente no ha cursado aún las materias de física del nivel licenciatura;

b) no requerir para su explicación y comprensión un tiempo y un esfuerzo tan grandes que se corra el riesgo de perder de vista el tema central del curso, esto es, las matemáticas.

No se debería confundir el objetivo que tiene en nuestra propuesta el abordar aplicaciones físicas. Éste es, simplemente, el de estimular el *hemisferio derecho* del cerebro para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. No se trata, en modo alguno, de adelantarse a los cursos de física o de ciencias de la ingeniería. Ese no es el objetivo.

Entre las aplicaciones físicas sencillas que se prestan para apoyar el aprendizaje, por ejemplo de los temas de cálculo vectorial, se citan a continuación.

- Densidades lineales, superficiales y volumétricas de masa y de carga eléctrica, y distribuciones de temperatura (funciones reales de varias variables).
- Ecuación de movimiento de una partícula (funciones vectoriales de una variable real).
- Campos de velocidades y de fuerza gravitacional, eléctrica o magnética (campos vectoriales).
- Trabajo y energía de una partícula (integrales de línea).
- Centroides, momentos de inercia, y empujes hidrostáticos (integrales dobles y triples).
- Flujo volumétrico y gasto másico (integrales de superficie).

De igual manera, consideramos que se pueden encontrar aplicaciones similares a las anteriores para otras asignaturas de matemáticas.

EMPLEO DE LA COMPUTADORA COMO ELEMENTO AUXILIAR PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Una de las tecnologías que más auge ha tenido en los últimos años es el de la computadora personal. Año tras año, los equipos de cómputo van mejorando sustancialmente, al incrementar su velocidad de procesamiento y su capacidad de almacenamiento; los programas de aplicación son cada vez más versátiles e interactivos, y cada vez resuelven mejor las necesidades de los usuarios. La red internacional de información, o *Internet*, como se le conoce más comúnmente, está presente cada vez con mayor frecuencia en nuestras labores académicas.

Ante esta situación, podríamos llegar a la conclusión de que el futuro de las instituciones de educación superior dependería de su capacidad de explotar la tecnología de cómputo para la docencia. Desde nuestro punto de vista particular, esta conclusión es errónea. Creemos que la computadora no podrá sustituir la labor de un buen profesor, al menos en el mediano plazo. Consideramos que el aprendizaje de las habilidades y las actitudes por parte del alumno, no lo podrá propiciar una máquina mejor de como lo puede efectuar un profesor medianamente consciente de su labor docente.

Lo que sí se puede aprovechar muy bien, es la capacidad que tienen las computadoras para realizar operaciones repetitivas muy rápidamente, y la facilidad con que pueden dibujar gráficas. Estas características pueden emplearse con bastante eficacia para la visualización de algunos conceptos matemáticos, que difícilmente podría realizarse en el pizarrón.

Por ejemplo, el concepto de aproximación funcional por medio de polinomios de Taylor, puede entenderse muy bien con el auxilio de una computadora personal y el programa MatLab. En la figura 10 se muestran cuatro gráficas en las que se ilustran la función **y = cos(x)** junto con el polinomio de grado **n** que mejor se le ajusta en el punto **x = p/2** . Se puede observar que en la medida en que crece el orden del polinomio, en esa misma medida éste se parece más a la función original.

Para este caso particular, el polinomio de Taylor es de la forma:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i-1)!} (x - \frac{\pi}{2})^{2i-1} ,$$

expresión que es muy engorrosa evaluar para valores de n más o menos grandes, y más aun el dibujar su gráfica correspondiente.

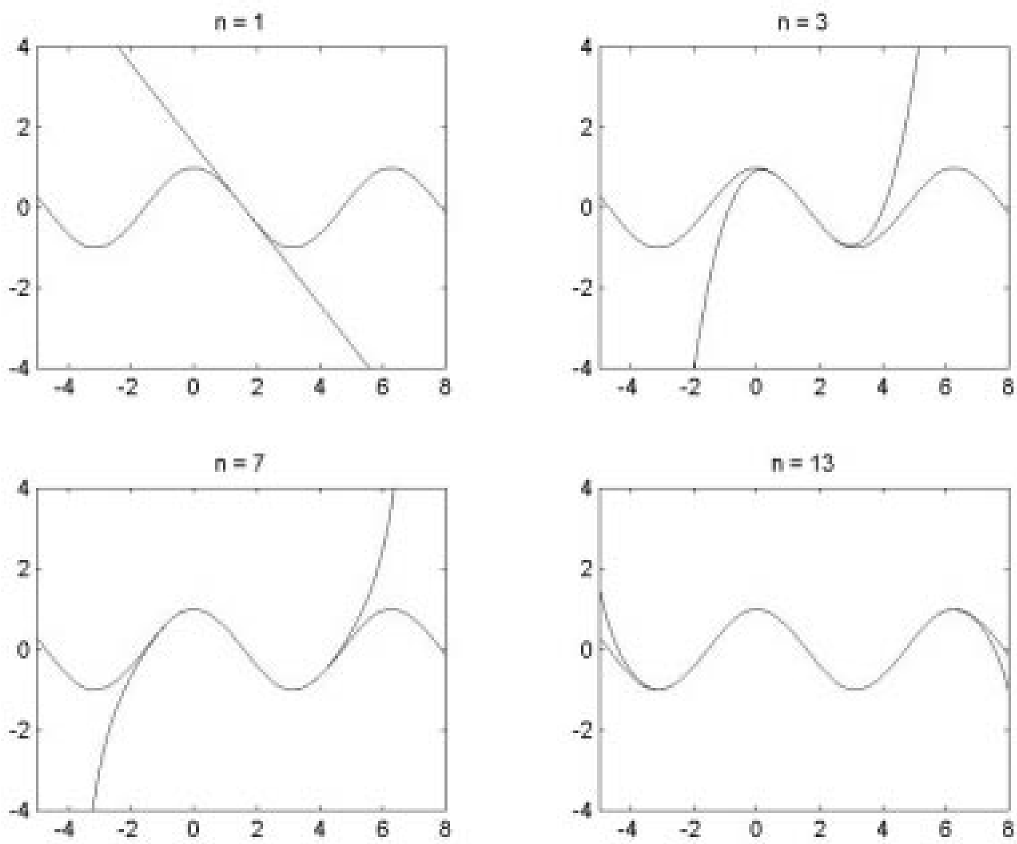

Figura 10. Gráficas comparativas de la función **y = cos(x)** y los respectivos polinomios de Taylor de grado **n** , obtenidos con MatLab.

Queremos hacer énfasis en que la visualización de conceptos corresponde a una operación mental del *hemisferio derecho*, lo cual se complementa muy adecuadamente a la abstracción que implica la idea de la aproximación funcional mencionada, cuyo tratamiento se lleva a cabo básicamente en el *hemisferio izquierdo* del cerebro. Con esto, deseamos reforzar la idea de la importancia que tiene el funcionamiento simultáneo de ambos *hemisferios cerebrales* para el aprendizaje de la matemática.

CONCLUSIONES

En el nivel Educativo Superior continuamos enseñando matemáticas en forma tradicional. Consideramos que los estudiantes deben realizar la abstracción propia de los conceptos matemáticos casi de manera *natural*, y olvidamos que algunos alumnos no han logrado esa madurez intelectual, lo cual tiene como resultado la incapacidad de aprender los contenidos matemáticos y la realización de las operaciones matemáticas.

Aun cuando ambos *hemisferios cerebrales* intervienen en el aprendizaje de las matemáticas, como en cualquier otro aprendizaje, a menudo los procedimientos que se emplean en su enseñanza únicamente estimulan de manera deliberada a uno de los dos: el izquierdo. Existen evidencias de que la estimulación simultánea de ambos *hemisferios* facilita y vuelve más eficiente el proceso de aprendizaje.

Si queremos estimular a los alumnos con la enseñanza de las matemáticas para un aprendizaje significativo, debemos pensar en una estrategia que permita la ejercitación de ambos *hemisferios cerebrales* en los estudiantes.

Una forma para corregir las dificultades de comprensión, y por lo tanto de aprendizaje de las matemáticas, es a través de demostraciones y ejercicios que involucran tanto al razonamiento lógico como a la imaginación, así como analogías y representaciones físicas que estimulan los diferentes canales de aprendizaje del alumno.

Para propiciar en los alumnos la formación de habilidades en la resolución de problemas, es importante mostrarles las estrategias que intervienen para ello, dedicando tiempo a su discusión y a su aplicación por parte de ellos, hasta que logren un cierto grado de dominio.

El deporte es una actividad importante que se debe considerar en todo método de aprendizaje holístico. Prepara al individuo para la realización de esfuerzos intelectuales intensos, y mejora su poder de concentración.

Existen diversas actividades que permiten estimular ambos *hemisferios cerebrales* durante el proceso enseñanza - aprendizaje. En esta ponencia hemos descrito algunos de ellos a manera de ejemplo, pero hay más y, desde luego, se pueden generar muchos más, tantos como la creatividad y el ingenio del profesor sean capaces de producir.

Por lo que se refiere a la computadora, es imprescindible enfatizar que ésta no podrá sustituir la labor del profesor en el trabajo docente ni relevar al alumno de la necesidad de pensar. La utilización de la tecnología de cómputo no debe ser el elemento central de aprendizaje, sino una herramienta para la realización de operaciones repetitivas, siempre teniendo en cuenta que el fundamento de dichas operaciones debe ser asimilado previamente por el alumno.

BIBLIOGRAFÍA

1. Chusid Joseph G. y McDonal J.J., Neuroanatomía Correlativa y Neurología Funcional, Ed. El Manual Moderno, México, 1968.
2. Gardner Howard, Estructuras de la Mente. La Teoría de las Inteligencias Múltiples, Segunda Edición, Ed. Fondo de Cultura Económica, México, 1993.
3. Ganong William F., Fisiología Médica, Tr. Guillermo Aguiano, Ed. El Manual Moderno, México, 1976.
4. Higashida H. Berta Y., Ciencias de la Salud, Segunda Edición, Ed. McGraw-Hill, México, 1994.
5. Kasuga Linda, Gutiérrez de Muñoz C. y Muñoz H., Aprendizaje Acelerado, Ed. Tomo, S.A., México,1998.

6. Marsden J. E. y Tromba A. J., Cálculo Vectorial, Tercera Edición, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, 1991.
7. Piaget Jean, Problemas de Psicología Genética, Ed. Ariel, Barcelona, 1976.
8. Riverón P. O., Martín A. J. A. y González C. I., Resolución de problemas: una alternativa didáctica en el aprendizaje de las Matemáticas.
9. Rodríguez E. M., Creatividad para resolver Problemas. Principios y Técnicas, Pax México, México, 1997.
10. Rodríguez E. M., Manual de Creatividad. Los procesos psíquicos y el desarrollo, Trillas, México, 1987.

--- o ---