Cómo alcanzar los objetivos de las asignaturas de matemáticas usando las calculadoras y Maple V

Isabel Patricia Aguilar Juárez, A. Leonardo Bañuelos Saucedo
Facultad de Ingeniería, UNAM

El estudio de las matemáticas y en particular del cálculo es y ha sido desde siempre, fundamental en la formación del ingeniero, no solamente por las habilidades matemáticas que permiten al estudiante desarrollar proyectos de ingeniería, sino por la sólida formación de la capacidad de razonamiento y abstracción. Esta característica peculiar de las matemáticas hace de ellas una disciplina difícil de cultivar. No todos tenemos la capacidad de abstracción suficiente para lograr comprender algunos conceptos o visualizar mentalmente comportamientos hasta cierto punto complejos; es por esto que las calculadoras o los programas de cálculo simbólico como Maple V, pueden ser de gran utilidad en el proceso enseñanza-aprendizaje de estas asignaturas.

Aunado a lo anterior, los métodos de solución de problemas en varios de los campos de las matemáticas suelen ser variados tanto en su desarrollo como en su grado de dificultad, por lo que no es posible dominarlos en muy poco tiempo. Así, tradicionalmente muchos profesores ponen especial énfasis en sus cursos en intentar lograr el dominio de las técnicas por parte de sus alumnos, lo cual puede ser importante, pero limita el tiempo disponible para desarrollar en ellos otras habilidades tales como el planteamiento y análisis de los problemas así como el análisis de los resultados obtenidos y las conclusiones y decisiones a tomar con base en tales resultados.

Consideramos que es muy importante, fundamental, como parte de esa formación integral de los alumnos para tener éxito en el desempeño profesional, enseñarlos a aprovechar la tecnología actual, tanto para ayudar a la comprensión como para generar resultados con rapidez y precisión. Nos estamos refiriendo al uso tanto de calculadoras (programables, graficadoras, etc.) que tenga a su alcance, como a equipo de cómputo y programas desarrollados con fines específicos, de manera que su formación esté actualizada y que desarrolle al mismo tiempo, la capacidad de actualizarse en todos lo sentidos. Esta actualización, desde luego, implica que aún los objetivos de nuestras asignaturas sean un tanto dinámicos, para que no sólo permitan incorporar constantemente estos aprendizajes, sino que los fomenten.

Actualmente por ejemplo, consideramos que algunos de los objetivos que podemos leer en los temarios de ciertas de nuestras asignaturas, pueden ser fácilmente rebasados con el uso de algunas calculadoras con que ya algunos de los alumnos cuentan, como pueden ser la HP49G, algunas Casio, o Texas Instruments en las que además de los programas de que disponen ya desde su fabricación, es posible instalarles programas tan sencillos como DERIVE, que les permiten realizar por lo menos un análisis básico de funciones, como puede ser su gráfica, raíces, y en el peor de los casos, aproximaciones de máximos o mínimos relativos. Tal es el caso del objetivo del tema I de la asignatura Cálculo III que a la letra dice: "*El alumno será capaz de identificar los máximos y los mínimos de funciones de dos o más variables y los relacionará con algunos conceptos elementales de la optimación en la solución de problemas de ingeniería, con lo cual empezará a comprender la importancia de la optimación en el ejercicio profesional*". Este objetivo puede alcanzarse con mayor facilidad al utilizar calculadoras programables o bien programas tales como Maple V, Mathematica o Matlab entre otros. Con el uso de Maple V, la operatividad en los problemas de máximos y mínimos se reduce considerablemente; de manera que es posible darle un mayor énfasis a la formulación y al análisis e interpretación de los resultados. Asimismo, el uso de las computadoras con los programas de matemáticas adecuados puede proporcionar una alternativa didáctica al explicar la metodología o procedimiento a desarrollar.

Considérese por ejemplo la condición para encontrar puntos críticos de una función de dos variables independientes $z = f(x, y)$, la cual es $\nabla f = \overline{0}$. Esta condición se puede ilustrar con facilidad utilizando Maple V trazando las curvas de nivel y asociándolas con la gráfica de la función, mostrar diversos vectores gradientes (lo cual constituye un campo vectorial) que permiten precisar el comportamiento de dicha función, así como visualizar fácilmente resultados importantes tales como la ortogonalidad del gradiante con la curva de nivel [Figuras 1 a 4].

No negamos, desde luego, la importancia tan grande que tienen el proceso de abstracción y asimilación de conceptos, la comprensión y conocimiento de las técnicas de solución de problemas, y por tanto la capacidad de realizarlos de forma manual. Lo que proponemos, por el contrario, es hacer esos aprendizajes más eficientes apoyándonos en la tecnología como lo comentamos antes. Por ello, retomando el tema I de la asignatura Cálculo III, proponemos que después de deducir y realizar ejemplos sencillos que ilustren la metodología que se debe seguir para encontrar los puntos críticos de la función y determinar su naturaleza, se pueden realizar ejemplos más complicados utilizando calculadoras o computadoras en los cuales el alumno pueda repasar la metodología, y al mismo tiempo observar diversas aplicaciones de los conceptos que está aprendiendo. Estos apoyos permiten mostrar diversas posibilidades de aplicación o variaciones del método que han aprendido.

La complejidad de las funciones presentadas, cuando se apoya la solución en las más modernas herramientas disponibles, ya no es importante, lo que permite analizar situaciones que estén más apegadas a la realidad, o bien, analizar el comportamiento bajo distintas variaciones en la función. Por otro lado, una vez estudiada la metodología para las funciones de dos variables, la generalización a tres o más variables puede hacerse por asociación, con la ventaja de que será la computadora o la calculadora la que realice las operaciones adicionales que implican el estudiar funciones de más variables. De esta forma el problema de una función de cuatro variables, en la que se requieren cuatro derivadas parciales para obtener el gradiente y la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, generalmente no lineal, para determinar los puntos críticos, con la computadora puede ser resuelto en segundos. Evidentemente el alumno no debe perder el conocimiento algebraico para llegar a la solución por sí solo, pero resolver en clase o de tarea un sistema así no contribuye prácticamente en nada al objetivo que se persigue en la asignatura.

Análisis de la función $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$

Figura 1.
Gráfica de la función

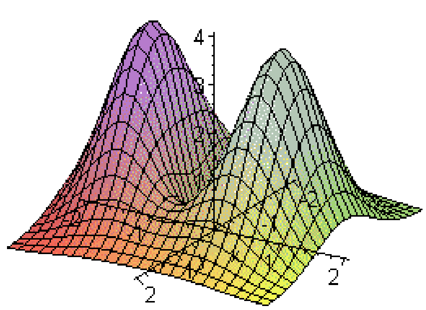


Figura 2.
Curvas de nivel.

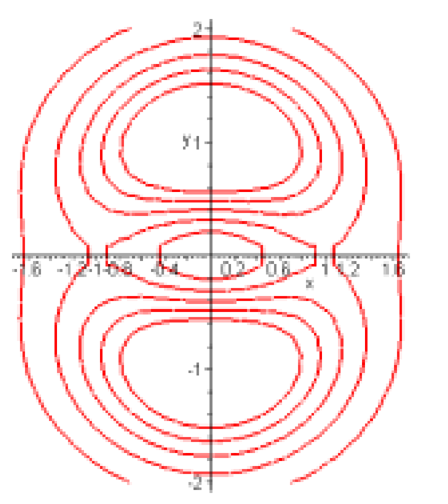


Figura 3.
Curvas de nivel y dirección de los gradientes.

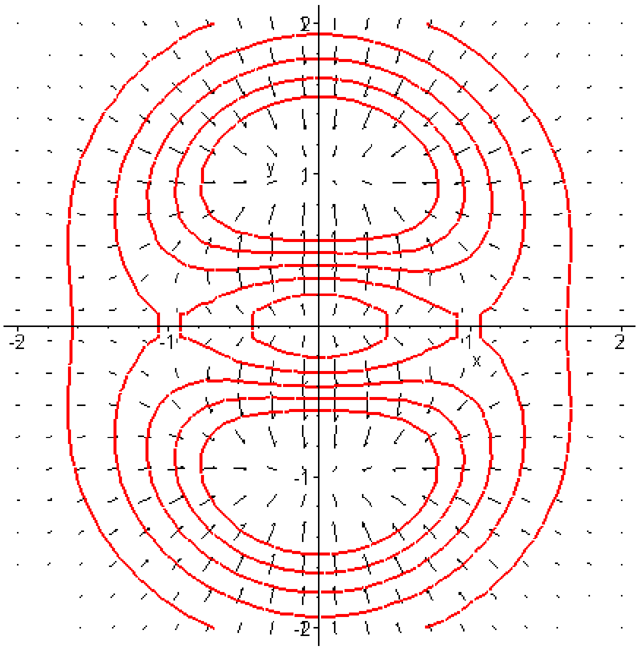
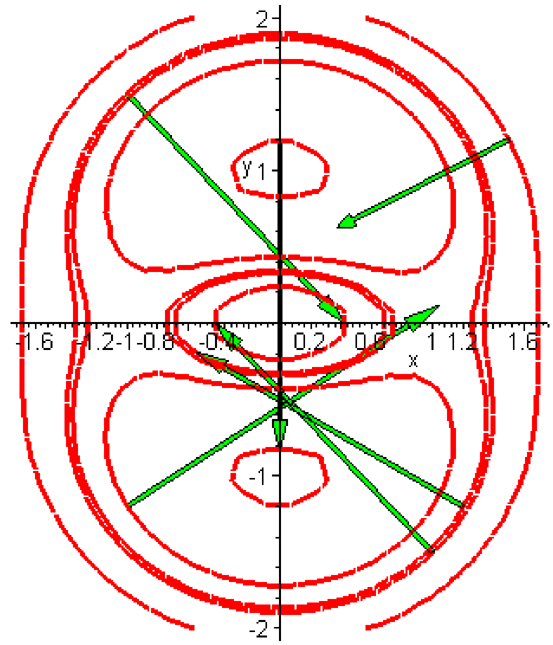


Figura 4.
Curvas de nivel y gradientes a escala real.



El método de los multiplicadores de Lagrange también puede ilustrarse con una computadora o una calculadora que trace gráficas, y después de estudiarlo el anclarlo con el método para los máximos y mínimos libres resulta bastante sencillo e inclusive permitiría una interpretación de los multiplicadores de Lagrange.

En el apéndice se muestra un programa en Maple V para obtener los puntos críticos de una función de dos variables, lo único que debe hacerse es introducir la función y el programa calcula las derivadas parciales, resuelve el sistema de ecuaciones, elimina las raíces complejas, obtiene el hessiano y lo valúa en los puntos críticos y finalmente determina la naturaleza de los puntos críticos, clasificándolos en máximos, mínimos o puntos silla. Los resultados más significativos son los siguientes:

La función es:

$$f := (x^2 + 3\,y^2)\,\mathbf{e}^{(1 - x^2 - y^2)}$$

Las derivadas parciales son:

$$fx := \frac{\partial}{\partial x} f = 2\,x\,\mathbf{e}^{(1 - x^2 - y^2)} - 2\,(x^2 + 3\,y^2)\,x\,\mathbf{e}^{(1 - x^2 - y^2)}$$

$$fy := \frac{\partial}{\partial y} f = 6\,y\,\mathbf{e}^{(1 - x^2 - y^2)} - 2\,(x^2 + 3\,y^2)\,y\,\mathbf{e}^{(1 - x^2 - y^2)}$$

Los puntos críticos son:

$P1 := [0, 1.]$ $P2 := [1., 0]$ $P3 := [-1., 0]$ $P4 := [0, 0]$ $P5 := [0, 1.]$

La matriz hessiana, valuada en los puntos críticos es:

$$H1 := \begin{bmatrix} -4.\,\mathbf{e}^0 & 0 \\ 0 & -12.\,\mathbf{e}^0 \end{bmatrix} \qquad H2 := \begin{bmatrix} -4.\,\mathbf{e}^0 & 0 \\ 0 & 4.\,\mathbf{e}^0 \end{bmatrix}$$

$$H3 := \begin{bmatrix} -4.\,\mathbf{e}^0 & 0 \\ 0 & 4.\,\mathbf{e}^0 \end{bmatrix} \qquad H4 := \begin{bmatrix} 2\,\mathbf{e} & 0 \\ 0 & 6\,\mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$$H5 := \begin{bmatrix} -4.\,\mathbf{e}^0 & 0 \\ 0 & -12.\,\mathbf{e}^0 \end{bmatrix}$$

Y los resultados son:

Punto, [0, -1., 3.], *Naturaleza*,"Máximo relativo"

Punto, [1., 0, 1.], *Naturaleza*,"Punto silla"

Punto, [-1., 0, 1.], *Naturaleza*,"Punto silla"

Punto, [0, 0, 0], *Naturaleza*,"Mínimo relativo"

Punto, [0, 1., 3.], *Naturaleza*, "Máximo relativo"

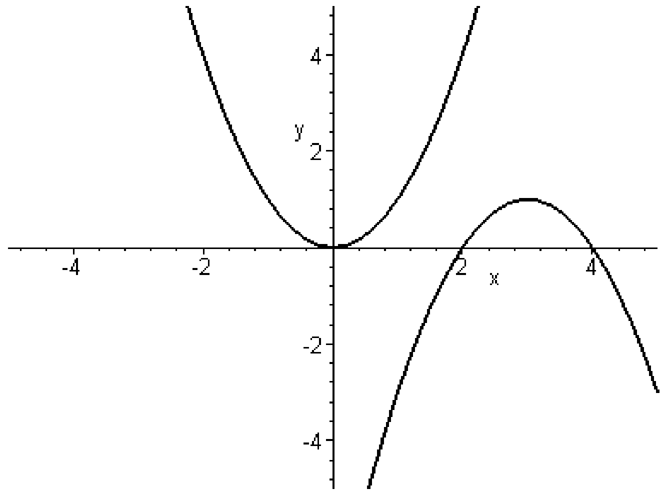
Otro punto a favor del uso de las herramientas mencionadas es el tiempo de solución. Para un problema del tipo del presentado antes es mucho menor, lo que permite concentrarse ahora en la formulación o planteamiento de la función, así como realizar un análisis de sensibilidad de dicha función, esto es, analizar el comportamiento de los máximos y mínimos a variaciones en los coeficientes de la función original.

Un ejemplo interesante puede ser el del cálculo de la distancia entre dos curvas planas.

Considérense los cursos de dos ríos en cierta región, los cuales se pueden representar por parábolas de ecuaciones $y = x^2$ y $y = -x^2 + 6x - 8$, Se desea construir un canal rectilíneo que una dichos ríos. Determinar la longitud mínima para el canal, así como las coordenadas de los puntos en cada río.

Este problema debe resolverse con multiplicadores de Lagrange, pero la formulación lleva a un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas; sin embargo, la solución con Maple V, es relativamente sencilla, y se puede interpretar la solución proporcionada por el programa.

La gráfica de las parábolas es:



Planteando como función objetivo al cuadrado de la distancia,

F.O. min $D = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

s.a $\qquad g_1(x_1, y_1) = y_1 - x_1^2 = 0$

$$g_2(x_2, y_2) = -x_2^2 + 6x_2 - y_2 - 8 = 0$$

donde (x_1, y_1) son las coordenadas del punto donde se construye el canal sobre el río descrito por $y = x^2$ y (x_2, y_2) las coordenadas para el río descrito por $y = -x^2 + 6x - 8$

La ecuación de Lagrange queda

$$L = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \lambda_1(y_1 - x_1^2) + \lambda_2(-x_2^2 + 6x_2 - y_2 - 8)$$

De donde, al utilizar Maple V se obtiene:

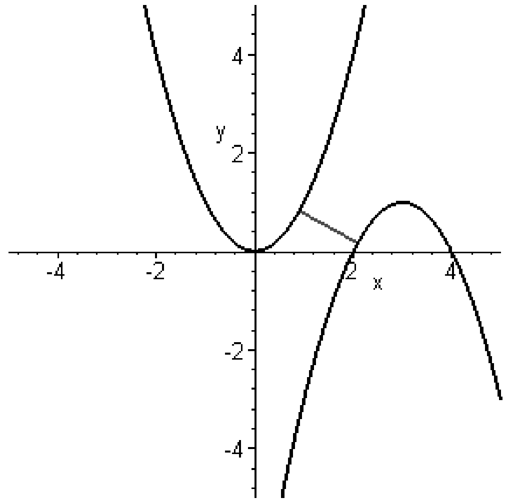
$$\left\{ y_2 = -\frac{1}{4} 6^{\left(\frac{2}{3}\right)} + 1,\ x_2 = -\frac{1}{2} 6^{\left(\frac{1}{3}\right)} + 3,\ y_1 = \frac{1}{4} 6^{\left(\frac{2}{3}\right)},\ x_1 = \frac{1}{2} 6^{\left(\frac{1}{3}\right)} \right\}$$

y la distancia es

$$d := \sqrt{\left(-\frac{1}{2} 6^{\left(\frac{2}{3}\right)} + 1\right)^2 + \left(6^{\left(\frac{1}{3}\right)} - 3\right)^2}$$

Es decir, la distancia es aproximadamente 1.350169 unidades.

La gráfica que representa esta situación, también generada por MAPLE V es la siguiente:



En la misma asignatura, pero en el tema II (Funciones Vectoriales), los conceptos de curvatura y torsión de una función vectorial de variable escalar, así como la divergencia y el rotacional de un campo vectorial también puede ilustrarse con mayor facilidad, en el tema III, (Integrales de línea) la interpretación de trabajo de un campo de fuerzas puede realizarse con facilidad al dibujar el campo vectorial de fuerzas y la trayectoria de la partícula, con lo cual es posible, en ejemplos sencillos, que el alumno identifique e interprete si el resultado debe ser positivo o negativo. En el tema IV, Integrales múltiples, las regiones de integración pueden visualizarse con mayor facilidad a través de Maple V, y la realización de las integrales puede hacerse de forma prácticamente automática.

Hasta el momento hemos mostrado únicamente algunos ejemplos con relación a la posible aplicación de MAPLE V, del cual no es fácil disponer en un salón de clases normal, sin embargo, las calculadoras pueden también ser aprovechadas. Una calculadora HP49G cuyo costo en el mercado se está reduciendo, es capaz de hacer cálculos un tanto complejos con una simple instrucción. Con esta calculadora es factible calcular analíticamente la derivada de una función real de variable real con la misma facilidad que obtener la matriz Hessiana de una función real de variable vectorial.

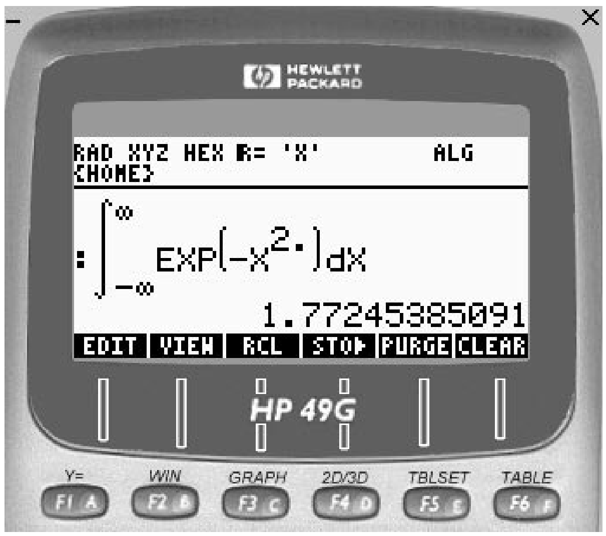
Considérese por ejemplo la función $f(x,y) = x^2y^2$. Introduciendo a la calculadora la instrucción HESS(x^2y^2, [x,y]), automáticamente proporciona tanto la matriz Hessiana como el vector gradiente. Solamente es necesario evaluar los resultados en el punto de interés.

Como se puede ver, esto no representa para el alumno ningún reto adicional, ni requiere ningún conocimiento de cálculo.

Si pensamos en una función real de variable real, considérese ahora el problema de determinar el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

la cual sabemos que se puede resolver de manera analítica utilizando un cambio a coordenadas polares. En la calculadora, basta con saber introducir la expresión para obtener de manera casi inmediata el resultado correcto de la integral.



Así como estos sencillos ejemplos, se puede mostrar que el potencial de este tipo de calculadoras es mucho más amplio de lo que hemos mencionado. Es capaz de derivar implícitamente, calcular integrales con límites infinitos, integrales con límites variables, calcular Transformadas de Fourier, etc., aunque las funciones utilizadas aquí son sencillas, con el fin de mostrar fácilmente las pantallas de salida.

Sin embargo, lo que estos aparatos no pueden hacer es verificar la congruencia de los resultados. No son capaces de analizar los puntos de discontinuidad de una función (aunque apoyan, mediante la construcción de la gráfica, y tal vez en funciones de varias variables la construcción de las curvas de nivel), ni identificar el tipo de metodología que se debe utilizar para resolver un problema específico. Estos problemas, así como la obtención de conclusiones y la toma de decisiones corresponde resolverlos al usuario (en este caso el alumno), lo cual requiere un conocimiento profundo de los conceptos involucrados.

Ahora, si pensamos en el problema de la evaluación del aprendizaje de los alumnos e intentamos basarlo, aún cuando sólo sea parcialmente, en exámenes que tienen como objetivo la solución de una serie de ejercicios, es claro que no sería representativo para un alumno que disponga de una calculadora de este estilo, y también nos parece claro que el limitar su uso es equivalente a limitar su aprendizaje, desmotivarlo para la utilización de tales herramientas, y por tanto ponerlo en desventaja con profesionistas egresados de otras instituciones.

En conclusión, consideramos que antes que resultar nociva la utilización de calculadoras y programas de cómputo actualizados, puede favorecer la consecución de una formación más sólida si va de la mano con objetivos y técnicas de enseñanza acordes con estas tecnologías, así como con las necesidades del mundo real.

Apéndice

Máximos y Mínimos

Auxiliar en la obtención de Máximos y mínimos de funciones de dos variables

A. Leonardo Bañuelos S.
I. Patricia Aguilar Juárez

(Se activan las librerías necesarias)

> with(plots):with(linalg):

Debe introducir la función. Por ejemplo: f := x^2+y^2;

> f:=(x^2+3*y^2)*exp(1-x^2-y^2);

Las primeras derivadas parciales son:

> fx:=Diff('f',x)=diff(f,x);

> fy:=Diff('f',y)=diff(f,y);

El sistema que debe resolverse es:fx;

> ec1:=rhs(fx)=0;

> ec2:=rhs(fy)=0;

La solución del sistema es:

> sols:=evalf(solve({ec1,ec2},{x,y}));

El número de soluciones encontradas para el sistema es:

> num_t:=nops({sols});

puesto que solamente interesan las soluciones reales se tiene:

> for i from 1 by 1 to num_t do if (type(rhs(sols[i][1]), realcons) and type(rhs(sols[i][2]), realcons))=true then sols_r.i:={lhs(sols[i][1])=rhs(sols[i][1]),lhs(sols[i][2])=rhs(sols[i][2])} else sols_r.i:="compleja" fi   od:

> sols2:=seq(sols_r.i,i=1..num_t);

> sols3:= ({sols2} minus {"compleja"});

> num_r:=nops(sols3);

> for i from 1 to num_r do if lhs(sols3[i][1])=x then x.i:=rhs(sols3[i][1]); y.i:=rhs(sols3[i][2]) else y.i:=rhs(sols3[i][1]); x.i:=rhs(sols3[i][2]) fi   od;

Los puntos críticos son:

> for i from 1 to num_r do P.i:= [(x.i,y.i)] od;

Las segundas derivadas parciales son:

> fxx:=Diff(f,x,x)=simplify(diff(f,x,x));

> fyy:=Diff(f,y,y)=simplify(diff(f,y,y));

> fxy:=Diff(f,x,y)=simplify(diff(f,x,y));

La matriz hessiana es:

> H:=hessian(f,[x,y]);

Y valuando la matriz hessiana en cada uno de los puntos críticos se tiene:

> for i from 1 to num_r do H.i:=subs(x=x.i,y=y.i,evalm(H))   od;

Y los valores característicos de las matrices hessianas son:

> for i from 1 to num_r do lambda.i.1:=simplify(eigenvalues(H.i)[1]);lambda.i.2:=simplify(eigenvalues(H.i)[2]) od;

Por lo que la naturaleza de los puntos es:

> for i from 1 to num_r do if (evalf(lambda.i.1)>0 and evalf (lambda.i.2) > 0) then nat.i:="Mínimo relativo" elif

```
(evalf (lambda.i.1)<0 and evalf(lambda.i.2)<0)  then nat.i:="Máximo relativo"  elif  (( evalf ( lambda.i.1)<0 and evalf(lambda.i.2)>0) or (evalf(lambda.i.1)>0 and evalf(lambda.i.2)<0)) then nat.i:="Punto  silla"  else nat.i:="El criterio no decide"    fi   od;
```

```
> for i from 1 to num_r do 'Punto ',[x.i,y.i,simplify(subs(x=x.i,y=y.i,f)) ], '   Naturaleza  ', nat.i   od;
```

La gráfica de la función es:

```
> plot3d(f,x=-2..2,y=-2.. 2,axes=normal);>
```

--- o ---