Inclusión de la Geometría Fractal en los cursos de matemáticas básicas

Martín Bárcenas Escobar
Facultad de Ingeniería, UNAM
marba@citlalli.fi-c.unam.mx

Introducción

Tendemos a pensar que si se varían las condiciones iniciales de un sistema un poquito, el resultado final será básicamente el mismo, o por lo menos eso nos dice nuestra experiencia matemática al redondear un número de 3 a 2 decimales. Pero nada más lejos de la realidad. La aplicación de las matemáticas a fenómenos naturales no consiste en acarrear un decimal de menos en un par de operaciones sino en cientos de miles y/o millones de cálculos.

Los sistemas dinámicos, son sistemas que varían con el paso del tiempo, tales como la teoría maltusiana de población y recursos, la meteorología, los sismos, los movimientos que efectúa un chorro de café humeante al entrar en contacto con la leche de una taza (mecánica de fluidos), el giro impredecible de una noria de agua cuando su caudal es inusitadamente acelerado, la gran mancha de Júpiter, las fluctuaciones económicas de los precios, etc.

Es en los sistemas dinámicos donde podemos usar el término "caos" y donde una variación mínima de las condiciones iniciales supone un comportamiento totalmente distinto del esperado por parte del sistema. Es decir, que un sistema podrá ser caótico cuando su comportamiento sea impredecible.

El caos es determinista al estudiar uno de estos sistemas, si se trata en su globalidad. No podrá predecir el estado futuro del mismo, pero sí modelar su comportamiento general.

Estos sistemas pueden comportarse de diferentes formas, pero muchos de ellos tras suficientes iteraciones de las funciones que los determinan, su función tiende a estabilizarse en uno o más valores. Este conjunto de valores para los cuales la función f(x) se estabiliza cuando el número de iteraciones tiende a infinito (¥), se denomina "atractor". En general podemos decir que los sistemas caóticos son:

Deterministas	Siguen reglas que pueden resumirse en una serie de funciones
Sensibles	A las condiciones iniciales ya que un cambio mínimo en sus condiciones iniciales puede provocar un cambio totalmente inesperado
Simples	No en cuanto a su comportamiento sino en cuanto a las funciones que los determinan

Tiende a confundirse Caos y Fractales. Son dos términos que suelen venir aparejados en las publicaciones, sin hacer distinciones o mezclando conceptos. No son sinónimos y tienen comportamientos distintos, a pesar de compartir una formulación sencilla y que ciertos fenómenos caóticos tengan una estructura fractal (atractor).

Caos	Fractales
Dependencia sensitiva de las condiciones iniciales	Recursividad infinita
Impredicibilidad	Autosemejanza, invariablemente de la escala
Definido por ecuaciones deterministas	Muchos fractales no son caóticos

Los sistemas dinámicos son la base del caos y de los atractores, debemos sumergirnos en ellos para comprender el concepto de "caos" y de "atractor". Un sistema dinámico es un sistema matemático que estudia procesos en movimiento y que podemos encontrar por doquier en la Naturaleza y en nuestra sociedad:

Ciencia	
Economía	Distribución de rentas
Demografía	Crecimiento de población
Física	Mecánica de fluidos
Astronomía	Órbitas estelares
...	...

Estos sistemas dinámicos pueden simularse en una computadora e incluso con una simple calculadora científica, si se conocen las ecuaciones que los rigen.

Breve Reseña Histórica

A comienzos del siglo XX, surgió en matemáticas la necesidad de estudiar estructuras geométricas que hasta entonces eran consideradas como curiosidades. Personas como Cantor, Koch, Hilbert Hausdorff entre otros, sin saberlo fueron precursores de algo más importante que los fractales, el mayor problema que se tenía a la hora de estudiar estos tipos de conjuntos era que no se tenía la herramienta matemática necesaria para abordar el problema.

La creación del Polvo o Conjunto de Cantor comienza con un segmento de recta. A continuación se quita el tercio central y así sucesivamente en los restantes segmentos, obteniendo a las pocas iteraciones un conjunto de puntos que recibe el nombre de "polvo de Cantor", en honor al matemático Georges Cantor que en 1883 lo descubrió.

Gaston M. Julia participó de forma activa en la 1ª Guerra Mundial, perdiendo su nariz y viéndose sometido a una interminable serie de operaciones faciales, que finalmente le obligaron a llevar una capucha negra que le cubría la zona afectada durante el resto de sus días. Fue en sus largas estancias en los hospitales donde llevó a cabo sus teorías y estudios matemáticos. Publicó en 1918 la obra "Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles" que le supuso el respeto y consagración en el ámbito académico. Contaba solamente con 25 años, ganando con su publicación el "Grand Prix de l'Académie des Sciences". La teoría fractal de Mandelbrot es un estudio basado en el conjunto de Julia creado por Gaston Julia, al que Mandelbrot le dio un aspecto visual, generando así el interés por el tema incluso en el ámbito no académico.

El matemático Edward Lorenz usaba su computadora para desentrañar la maraña matemática que él mismo había creado con sus doce ecuaciones para predecir el tiempo atmosférico en el Massachusetts Institute of Technology (MIT). Era el año 1960 y su pasión por el pronóstico atmosférico le vino durante la 2ª Guerra Mundial. Tras su graduación en Matemática Pura en el Dartmouth College en 1938 participó en la contienda diagnosticando el tiempo para las fuerzas aéreas. Transcurrida la guerra, optó por dedicar sus esfuerzos matemáticos aplicándolos a la metereología.

La predicción del tiempo se debía regir por ecuaciones, al igual que las órbitas de los planetas, satélites y galaxias, quizá más complicadas pero ecuaciones al fin y al cabo. Para ello escogió 12 funciones, unas establecían el vínculo entre velocidad y viento, otras entre presión y temperatura y así unas cuantas variables más. No le promovía un interés meramente físico sino también matemático.

Su trabajo fue de boca en boca por el MIT, llegando a tal punto que se organizaban apuestas sobre los pronósticos que darían las ecuaciones de Lorenz. En 1961, Lorenz cansado de observar ese vaivén numérico salido de la impresora de su computadora, intentó atajar partiendo de una sucesión anterior pero al traspasar los dígitos sólo tecleó 3 en vez de los 6 originales, esperando que el comportamiento no cambiaría. Los resultados obtenidos trajeron de cabeza a Lorenz pues no eran los esperados y revisó el software y hardware hasta darse cuenta finalmente, que el error lo cometió al truncar el valor inicial de la función cambiando la entrada de 0,506127 a 0,506. No creyó que una variación tan pequeña pudiera comportar un cambio tan radical de la función al cabo de unas cuantas iteraciones. El modelo de Lorenz no es una representación realista de un fenómeno metereológico en particular, pero resulta un impresionante ejemplo de cómo un simple conjunto de ecuaciones no lineales puede generar un comportamiento sumamente complejo. Su publicación en 1963 marcó el inicio de la teoría del caos y el atractor del modelo, conocido desde entonces como atractor de Lorenz o de mariposa, se convirtió en el atractor extraño más popular y ampliamente estudiado.

A Michel Hénon físico francés nacido en París en 1931, se le debe uno de los atractores extraños más reveladores y simples. Durante su tesis doctoral en 1960 empezó a trabajar con el tema de cúmulos globulares y las consecuencias de la llegada de una tercera estrella a un sistema binario, que desencadenaron en lo que Hénon bautizó como "colapso gravotérmico". Trabajaba en el Instituto de Astrofísica de París, cuando 5 años más tarde de que Lorenz diera a conocer sus trabajos, Hénon descubría un sistema dinámico capaz de explicar las oscilaciones sufridas por ciertos entes astronómicos que se desviaban ligeramente de la trayectoria elíptica predicha por las leyes que rigen la Astronomía. El sistema ideado por Hénon es de una simplicidad aplastante, y aún ahora, los matemáticos se maravillan al contemplar su sistema de ecuaciones y ver los sorprendentes resultados que con él se obtienen. Se diría que son necesarias docenas de variables matemáticas para obtener un resultado parecido, pero Hénon con sólo 2 ecuaciones de 2 variables lo consiguió.

Se considera a Benoît Mandelbrot como El "Padre de los Fractales", nace en Varsovia en el año 1924. El término 'fractal' lo acuñó Mandelbrot al hojear un diccionario de latín de su hijo al fusionar las palabras fractus (romper) + fracture (fractura), dando pues una función doble (sustantivo/adjetivo) a su creación. Fue en la IBM donde se fraguó la teoría de la Geometría Fractal, tan bellamente representada por el conjunto de Mandelbrot.

Mandelbrot vio reflejarse en el conjunto de Cantor los errores aparentemente desordenados de las líneas de datos de IBM. Vio que era una muestra de tiempo fractal y que extendiendo esta teoría a otros campos, la importancia del término fractal ganaría la partida frente a los matemáticos ortodoxos que pensaban en la geometría euclídea como forma ideal de belleza y como piedra filosofal sobre la que giraba las matemáticas y físicas modernas. En 1980 Mandelbrot descubrió el principio organizativo de los Conjuntos de Julia. Ideó una forma fractal que servía de índice para los infinitos Conjuntos de Julia **(z^2+c)**. Este conjunto único lleva su nombre: El Conjunto de Mandelbrot. Dentro de los infinitos conjuntos posibles de Julia, sólo existen dos clases importantes: o bien toda la figura forma una estructura conectada, siempre conexa; o bien está fragmentada en un número infinito de partes que forman una nube de puntos.

Benoît Mandelbrot fue uno de tantos otros visionarios del caos y de los fractales, que tuvo la suerte de ver realizados sus sueños al materializar su engendro matemático y hacerle corresponder una realidad perteneciente a la naturaleza. Esto es lo único que lo distingue de otros matemáticos que ya en el siglo XIX se topaban con cualidades paradójicas e incomprensibles de ciertos objetos surgidos de sus pasatiempos y quehaceres matemáticos y todo ello gracias a una herramienta que le sirvió para tal fin a Mandelbrot: la computadora. Y es que a Mandelbrot le sobraban computadoras ya que trabajaba en la IBM y disponía a su alcance de una gran cantidad de recursos informáticos.

Algunas aplicaciones

La **complejidad** asociada a los sistemas vivos vistos como redes autoorganizadoras, cuyos componentes están interconectados y son interdependientes, ha sido expresada repetidamente de una u otra forma a lo largo de la historia de la ciencia y la filosofía. Sin embargo, modelos que detallen dichos sistemas autoorganizadores sólo se han podido formular recientemente con ayuda de herramientas matemáticas nuevas, capaces de permitir el diseño de modelos para la interconectividad no lineal característica de las redes. El descubrimiento de estas "matemáticas de la complejidad" se va reconociendo cada vez más como una de las aportaciones más importantes del siglo XX. No existe aún un nombre definitivo para estas matemáticas y el término "teoría de los sistemas dinámicos" es quizá el más usado, cabe resaltar que esta teoría no es una teoría de fenómenos físicos, sino una teoría matemática, cuyos conceptos y técnicas se aplican a un amplio espectro de fenómenos. Lo mismo se puede decir de la teoría del caos y de la teoría de fractales, que son importantes ramas de la teoría de los sistemas dinámicos.

No podemos dejar de tener presente, que las matemáticas, al igual que todas las ciencias, intenta reproducir el entorno que nos rodea mediante modelos, estos modelos son tan perfectos que es difícil que el modelo se ajuste a la realidad, siempre hay errores e imperfecciones. Los objetos fractales son abundantemente encontrados en procesos físicos o químicos como la cristalización, descargas eléctricas, movimiento de pequeñas partículas en gases, etc. El primer modelo de fractal y que podemos ver en la naturaleza es el llamado crecimiento fractal. Este crecimiento se origina principalmente en algas, musgos, árboles, e incluso en nuestro cuerpo, aunque parezca asombroso, el sistema de transporte de la sangre por los pulmones es considerado como un objeto fractal y esta siendo estudiado desde éste punto de vista. Y no sólo es este punto de nuestro cuerpo donde podemos verificar la existencia de fractales, los latidos del corazón, no son uniformes, eso todos lo sabemos, lo que no sabemos, es que el ritmo cardiaco puede ser considerado un fractal. Un ejemplo interesante de aplicación, es el de investigadores que tratan de "unir" polímeros con silicio, una unión de materiales opuestos, pues mientras el silicio consta de cristales ordenados, los polímeros constan de largas cadenas caóticas. El resultado de esa unión en el campo de los dispositivos electrónicos tendrá una flexibilidad maravillosa, será menos costosa su manufactura y en consecuencia será accesible a muchas personas. Del manejo del orden y el desorden al mismo tiempo se podría acuñar un término nuevo, que podría ser "ingeniería del caos".

Pero no solamente en el campo de las ciencias experimentales tiene cabida el concepto de fractal, estos han sido utilizados en el cine para representar planetas, estrellas, montañas, cielos y distintos paisajes, debido a que con poca información, y unos rápidos cálculos se puede generar todo un mundo nuevo. Ultimamente, los fractales también han sido utilizados en informática para reproducir algoritmos de compresión de datos.

Propuesta

Una primera aproximación para la introducción de la geometría fractal en los cursos de matemáticas básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM es a través de las asignaturas de Geometría Analítica y/o Álgebra. En el curso de álgebra por ejemplo se estudian los números y el orden en los que éstos están establecidos, así el primer conjunto de números que se estudian son los números naturales, después siguiendo el orden de inclusión nos encontramos los siguientes conjuntos, enteros, racionales y reales. Aquí se podría introducir el conjunto de Cantor y como se construye. Posteriormente se estudian los números complejos. La introducción de los números complejos en las matemáticas se puede abordar de forma distinta, utilizando conceptos analíticos, topológicos, vectoriales, etc. Introducir aquí los conjuntos de Julia y el de Mandelbrot como casos particulares de interés. Tanto álgebra como geometría analítica dan el soporte analítico y el soporte vectorial, pero el soporte topológico no lo tenemos incorporado. Me atrevo a sugerir que a manera de introducción se incorpore un tema adicional en geometría analítica, que pudiera denominarse "geometría no Euclidiana" o de plano "Topología", donde se dé una introducción a la geometría propuesta por Poincaré. La topología es una geometría en la que todas las longitudes, ángulos y áreas pueden ser distorsionados a voluntad. Así un triángulo puede ser transformado en continuidad en un rectángulo, éste en un cuadrado y éste en un círculo, debido a estas transformaciones continuas, la topología es conocida popularmente como la "geometría elástica". Poincaré utilizaba los conceptos topológicos para analizar las características cualitativas de problemas dinámicos complejos y sin proponérselo sentaba las bases para las matemáticas de la complejidad que emergerían un siglo después.

De lo anterior surge la necesidad de incorporar conceptos tales como dimensión topológica y espacios matemáticos abstractos, en particular para el tema que nos ocupa el “espacio fase” (phase space). Las técnicas matemáticas que han permitido a los investigadores el descubrimiento de patrones ordenados en sistemas caóticos a lo largo de las tres últimas décadas, se basan en el enfoque topológico de Poincaré y están íntimamente ligadas al desarrollo de las computadoras. Con estas técnicas nuevas las ecuaciones no lineales pueden ser resueltas con cualquier nivel de aproximación. Como primera propuesta, sujeta a discusión de la academia de matemáticas, podría introducirse en la asignatura de Algebra Lineal, una introducción a espacios matemáticos abstractos y el concepto de dimensión topológica, después de espacios vectoriales.

Un par de temas que habría que reintroducir, puesto que ya antes formaban parte de los programas de matemáticas básicas, son el de sucesiones y el de series, pues para la geometría fractal es importante estudiar la sucesión iterada y saber si tiene límite o no.

La propuesta anterior es sólo un punto de arranque para la discusión académica con los profesores de matemáticas básicas de ingeniería, es sólo una pincelada de cómo se podría iniciar la introducción de conceptos básicos relacionados con la geometría fractal. NO hago mención en este trabajo a las modificaciones que con respecto a las ciencias experimentales (física y química) se tendrían que introducir. En el Congreso Nacional Copei 2001 “Prospectiva de la Ingeniería al 2025”, efectuado en la ciudad de Aguascalientes, Ags. en septiembre de este año, se puede ver mi propuesta del bloque de ciencias básicas en prospectiva al 2025, para tener una idea más generalista de los cambios que habría que introducir al nivel de las asignaturas curriculares para la formación de ingenieros.

Referencias

– “El fin de las certidumbres”, Ilya Prigogine, Ed. Andrés Bello, Chile 1996.

– “CAOS. La creación de una ciencia”, James Gleick, Ed. Seix Barral, España 1998.

– “La geometría fractal de la naturaleza”, Benoît Mandelbrot, Ed. Tusquets, Barcelona, España 1997.

– CONGRESO NACIONAL COPEI 2001“Prospectiva de la ingeniería al 2025”, 12 - 15 de septiembre Aguascalientes, Ags., **Prospectiva del bloque de Ciencias Básicas para las carreras de Ingeniería al 2025,** Ing. Martín Bárcenas Escobar.

RESUMEN

A comienzos del siglo XX, surgió en matemáticas la necesidad de estudiar estructuras geométricas que hasta entonces eran consideradas como curiosidades y anecdóticas. Gente como Koch, Cantor, Hilbert y Hausdorff, sin saberlo fueron los precursores de algo más importante que los fractales, el mayor problema que se tenía a la hora de estudiar estos tipos de conjuntos, era que no se tenía la herramienta matemática necesaria para abordar el problema, hasta que en 1919, Hausdorff, creó un concepto totalmente revolucionario, un nuevo concepto que hablaba de algo muy antiguo, en concreto reintrodujo la definición de *dimensión* .

En el presente trabajo se proporciona un bosquejo histórico y de aplicación de la Geometría Fractal, así como algunas de las características principales que, desde el punto de vista del autor, dan la pauta para proponer la inclusión de dicha Geometría en los cursos regulares de matemáticas básicas para ingeniería. Se hace una propuesta concreta para iniciar la introducción y el posterior desarrollo de esta geometría fractal en los cursos de matemáticas.

--- o ---