El laboratorio de Matemáticas un lugar para vincular la Matemática, la Física y la Ingeniería

Pedro Luis Cruz Galindo
Universidad Nacional
Autónoma de México
Escuela Nacional de
Estudios Profesionales Aragón

Resumen

En el presente trabajo se propone una estrategia didáctica que tiene la finalidad de integrar los conocimientos de Matemáticas, Física e Ingeniería, aplicando nuevas tecnologías.

Para tal fin se crea un Laboratorio de Matemáticas en el que a través de prácticas diseñadas, el alumno pueda encontrar la integración de los conocimientos que ha ido adquiriendo a lo largo de su carrera.

Introducción

En primer lugar quiero aclarar por qué se eligió el tema de Ecuaciones Diferenciales como punto de partida del proyecto, la razón es que la materia de Ecuaciones Diferenciales la imparto desde hace más de dieciocho años, en las carreras de Ingeniería (Mecánica Eléctrica, Civil y en Computación) de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales “Aragón” de la UNAM, con esto quiero decir que estoy bastante familiarizado con ella, y que conozco muy de cerca los problemas que hay en la enseñanza de esta materia, así como las aplicaciones desde un punto de vista real y teórico.

Por otro lado en las carreras de ingeniería las estadísticas muestran el alto índice de alumnos reprobados en las materias de matemáticas, uno de los factores que más influyen en esta problemática lo encontramos en la forma tradicional de abordar los temas, los cuales se encuentran totalmente desvinculados de la propia ingeniería. Esta situación a la larga repercute en una deficiente habilidad para modelar problemas de ingeniería durante la vida profesional del egresado.

La falta de integración de los conocimientos de matemáticas con los de las materias propias de ingeniería que durante su carrera cursó el alumno lo llevan a esta problemática, creándole confusión y propiciando que subestime la importancia de las matemáticas en su carrera.

En este punto cabe hacerse el siguiente cuestionamiento: *¿Son las Matemáticas en las carreras de Ingeniería sólo una herramienta que informa?.* Al reflexionar sobre esta pregunta seguramente descubriremos (profesores y alumnos) que las matemáticas también son ***formativas*** , aunque en Ingeniería la matemática no es una meta por sí misma.

Justificación del Contexto General

Nuestras concepciones matemáticas se formaron como resultado de un prolongado proceso social e intelectual, cuyas raíces se esconden en el remoto pasado[1]. Pensando en lo anterior sabemos que las matemáticas que se requieren en las escuelas de ingeniería históricamente tenían su origen dentro del contexto del área de conocimiento en donde se le necesitaba . Al pasar el tiempo se perdió el contexto general y los libros que tratan los temas de matemáticas que requiere el ingeniero, se presentan desvinculados de la realidad, como si fueran conocimientos acabados con una formalidad y un rigor matemático extremadamente abstracto, los cuales le son sumamente ajenos a los estudiantes.

Parece ser que olvidamos el hecho de que las matemáticas a través de la historia se desarrollaron por su propio valor, pero esto no quiere decir que se tenga que perder la conexión entre la teoría y la práctica. Las matemáticas, a los ojos de todos los grandes matemáticos, desde Descartes hasta Leibniz, constituían la clave para la mecánica y, al mismo tiempo, la clave para el entendimiento de la naturaleza. La matemática no sólo llegó a ser el modelo de toda la ciencia, sino que proporcionó también la clave de los inventos.

Hasta el siglo XIX los conocimientos que se recibían en las escuelas estaban integrados debido a la relación que existía entre ellos, pero esa interrelación se perdió cuando las ciencias avanzaron por sí mismas; para la matemática este problema se magnificó por el avance tremendo que tuvo y comenzaron a aparecer textos de matemáticas que no contenían aplicaciones, en vez de éstas se profundizaba en la parte teórica.

Hasta los años setentas y ochentas aparecen textos de matemáticas para ingenieros en donde se encuentran aplicaciones de matemáticas en la ingeniería.

La Propuesta Didáctica

Uno de los problemas principales al que nos enfrentamos cuando impartimos un curso de matemáticas es, sin duda, el número de horas limitado que se tienen durante el semestre para cubrir el temario completo. De este cuestionamiento nace la idea de crear un espacio llamado *Laboratorio de Matemáticas* en donde se pueda atacar la desvinculación de la matemática con las aplicaciones reales, donde se trabaje la integración de los conocimientos, donde se cumpla uno de los objetivos principales del ingeniero ¿Cómo resolver problemas?. Por otro lado este laboratorio debe tener peso curricular y debe ser independiente de cualquier materia en particular, su carácter debe ser general y de uso multidisciplinario, en el cual puedan acudir alumnos de cualquier semestre.

Para lograr esto, partimos del desarrollo de algunos problemas y situaciones propias de la ingeniería desde un contexto general, haciendo uso de las nuevas tecnologías para el análisis de sus soluciones, es decir, se trabaja de acuerdo a las necesidades y ritmo que marquen los mismos alumnos dependiendo del semestre en el que se encuentren, esto se debe a que las necesidades son diferentes para cada grupo y están marcadas por los cursos básicos de la ingeniería y propios de la ingeniería que se hayan cubierto, esto no implica que sea un curso mecánico o meramente informativo, los elementos con los que se cuente en cada caso suponemos que estarán determinados por la forma como el profesor imparta o haya impartido los temas. En este punto encontramos el carácter **formativo** que le queremos dar y para encontrar mejores resultados observamos que dependerá en gran medida del profesor, de su formación y experiencia (los programas de estudio no indican por ningún lado el carácter formativo de la matemática, pero tampoco que sea o no de tipo operativo).

Cada problema lo abordaremos desde un contexto general, situación que no es fácil de lograr, pero al presentar aplicaciones que sean de su carrera, los alumnos se ven favorecidos, se motivan, le encuentran sentido a los cursos de matemáticas que reciben o recibieron, entienden por qué se les imparten, y cómo y dónde los aplicará.

Se dan cuenta de que las matemáticas toman un sentido durante sus estudios y vida profesional y se podrán enfrentar al modelado de problemas que son propios de su carrera.

Etapas en que se divide el diseño de un problema desde el punto de vista de un contexto general, con aplicación de las nuevas tecnologías

1. Planteamiento del problema.
2. Selección de las variables y de las constantes asociadas al problema.
3. Determinación del modelo matemático.
4. Solución matemática del problema.
5. Determinación de la solución requerida por el problema, con base en las condiciones dadas.

6. Interpretación de la solución en términos del problema.
7. Simulación del problema utilizando software especializado (MATLAB).

Analizando las etapas en que se divide el diseño de un problema, se puede observar que el problema no puede ser cualquiera, debido que no siempre es factible asociarle un modelo matemático, debe ser un problema real que tenga que ver con el área de estudio del alumno. A este tipo de problemas dada su naturaleza se le puede interpretar su solución y con la ayuda de las nuevas tecnologías el análisis de los resultados se puede hacer en forma más detallada y minuciosa , modificando algunos parámetros o variables en forma casi automática, del problema en estudio.

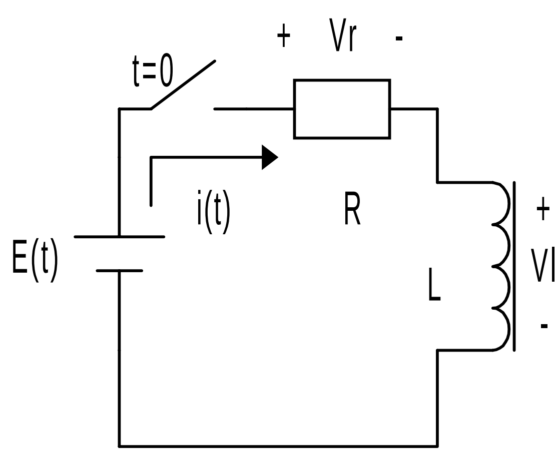
En muchos casos se requieren evaluar los resultados en forma gráfica, proceso muy difícil de realizar manualmente, en nuestro caso con la ayuda de la computadora y el software utilizado lo podremos hacer cuantas veces sea necesario, modificando, como se comentó anteriormente las variables o parámetros del problema, esta situación nos da una gran ventaja y nos permite analizar el problema en forma exhaustiva.

Ejemplo

A continuación se presenta un problema que muestra las etapas anteriormente mencionadas, dentro de un contexto general aplicando el uso de la computadora y del programa MATLAB.

1. Planteamiento del problema.

Circuito R-L con voltaje constante.



Vamos a ver el comportamiento de la corriente a través de un inductor cuya inductancia es L, cuando esta corriente eléctrica es obligada a pasar por una resistencia de valor R. Para tal propósito se tiene un circuito en el cual un inductor totalmente descargado, está conectado en serie con una resistencia, a las terminales de una fuente de voltaje constante E.

En este caso se tiene un circuito real, el más simple que contiene un inductor.

2. Selección de las variables y de las constantes asociadas al problema.

Para nuestro problema supondremos conocidas las siguientes constantes:

R, **L** y **E.** El tiempo y la corriente en el inductor serán variables.

3. Determinación del modelo matemático.

En esta etapa se deben plantear las ecuaciones que definen el comportamiento físico para cada uno de los elementos que forman el sistema, así como las ecuaciones de equilibrio, considerando los principios físicos.

Para nuestro problema tenemos las siguientes relaciones que se cumplen al cerrar el interruptor para todo tiempo **t**.

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}............(1)$$
$$v_R(t) = Ri(t)...............(2)$$
$$i_R(t) = i_L(t) = i(t).......(3)$$
$$v_R(t) + v_L(t) = E........(4)$$

$v_R \quad y \quad v_L$ representan la caída de voltaje en la resistencia y en el inductor respectivamente.

$i_R \quad e \quad i_L$ representan la corriente en la resistencia y en el inductor respectivamente.

La ecuación (1) nos da la relación que hay entre el voltaje y la corriente dentro de un circuito magnético (ver la Ley de Faraday). La (2) es la formulación de la Ley de Ohm, la que determina la caída de voltaje en la resistencia.

Las relaciones (3) y (4) son consecuencia de las Leyes de Kirchhoff, en nuestro problema son las ecuaciones de equilibrio.

Las unidades para cada una de las variables y constantes son:

$v_L(t), v_R(t)$ están dadas en volts; $i_L(t), i_R(t) \quad e \quad i(t)$ están dadas en amperes; R en omhs; L en henrys y **t** en segundos.

Sustituyendo (1), (2) en (4) obtenemos:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$$

Si consideramos la forma normal de la ecuación resulta entonces:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}$$

Que es el modelo matemático que representa el comportamiento de nuestro circuito en estudio para todo tiempo **t**.

4. *Solución matemática del problema.*

El modelo matemático obtenido es una ecuación diferencial en donde la incógnita es $i_L(t)$ la corriente del inductor que varia con el tiempo.

Para encontrar la solución de esta ecuación podemos proceder aplicando el procedimiento que se conoce como “Separación de Variables” o como la ecuación diferencial resultó ser una ecuación lineal de primer orden no homogénea, podemos aplicar la solución general para este tipo de ecuaciones.

Sabemos que una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea tiene la siguiente forma general.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

y su solución esta dada por:

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$$

Esta solución se obtiene por el método de Variación de Parámetros.

Si aplicamos esto a nuestra ecuación del problema podemos obtener la solución.

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E}{L}$$

Sustituyendo en la solución general:

$$i(t) = Ce^{-\int \frac{R}{L}dt} + e^{-\int \frac{R}{L}dt} \int e^{\int \frac{R}{L}dt} \frac{E}{L} dt$$

Calculando las integrales obtenemos finalmente:

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

Que es la solución general de la ecuación diferencial.

5. *Determinación de la solución requerida por el problema con base en las condiciones dadas.*

   Como el inductor está totalmente descargado al inicio del problema, lo que se tiene es que en $t = 0$ la corriente era cero, es decir, $i(0) = 0$. Esta condición es llamada condición inicial.

   Si sustituimos esta condición inicial en la solución general, se obtiene

$$i(0) = 0 = Ce^{-\frac{R}{L}0} + \frac{E}{R}$$

$$C = -\frac{E}{R}$$

Sustituyendo el valor de esta constante C en la solución general, obtenemos.

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

(Recordar que $i_L(t)=i(t)$)

Por lo tanto

$$i_L(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

A esta solución se le llama la solución para la condición inicial o solución particular de la ecuación para la condición inicial dada.

6. *Interpretación de la solución en términos del problema.*

Si observamos la solución

$$i_L(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

se ve que físicamente esta expresión sólo tiene sentido para tiempos mayores o iguales a cero, es decir, para $t\geq 0$.

Si hacemos que t se haga muy grande tendremos

$$\lim_{t\to\infty} i_L(t)=\frac{E}{R}(1-0)=\frac{E}{R}$$

Es decir, la corriente final en el inductor, será $\frac{E}{R}$.

La diferencia de potencial en el inductor será igual a E, el voltaje de la fuente. Desde el punto de vista teórico para alcanzar la corriente total, al inductor le tomaría un tiempo infinito. Esto, en la práctica, no es cierto.

Si analizamos la solución, se observa que el factor $\frac{E}{R}$ es constante, el valor de $i_L(t)$ depende del cociente $t\frac{R}{L}$. Al valor $\frac{L}{R}=\tau$, expresado en segundos, recibe el nombre de constante de tiempo. Es decir una constante de tiempo es igual a $\frac{L}{R}$ segundos.

Transcurrida una constante de tiempo, se tiene que $i_L(\tau)=\frac{E}{R}(1-e^{-1})=0.632\frac{E}{R}$, puesto que $\frac{E}{R}$ es la corriente final total, se observa que transcurrida una constante de tiempo se tendrá el 63.2% de su corriente final. Esta independencia del voltaje justifica el nombre de constante de tiempo.

Al transcurrir 2, 3, 4 y 5 constantes de tiempo tendríamos:

$$i_L(2\tau)=\frac{E}{R}(1-e^{-2})=0.865\frac{E}{R} \qquad 85\%$$

$$i_L(3\tau)=\frac{E}{R}(1-e^{-3})=0.950\frac{E}{R} \qquad 95\%$$

$$i_L(4\tau)=\frac{E}{R}(1-e^{-4})=0.982\frac{E}{R} \qquad 98.2\%$$

$$i_L(5\tau)=\frac{E}{R}(1-e^{-5})=0.993\frac{E}{R} \qquad 99.3\%$$

Al llegar a cinco constantes de tiempo se tendría el 99.3% de la corriente final que para fines prácticos, se considera que el inductor alcanzó su carga total.

Con esto podemos concluir que, el tiempo que tarda un inductor en cargarse, depende de la resistencia y la inductancia del circuito, no del voltaje que suministre la fuente.

De lo anterior podemos concluir también lo siguiente:

Si se mantiene R constante y se reduce L, la razón L/R disminuye y se reduce el tiempo de elevación de cinco constantes de tiempo.

La razón L/R tiene siempre algún valor numérico, aún cuando puede ser muy pequeño en algunos casos. Por esta razón, la corriente que pasa por el inductor no puede cambiar instantáneamente. De hecho, la inductancia de una red es una medida de cuánto se opondrá a un cambio en la corriente de la red. Cuanto mayor sea la inductancia, tanto mayor será la constante de tiempo y se requerirá un periodo mas prolongado para que alcance su valor final.

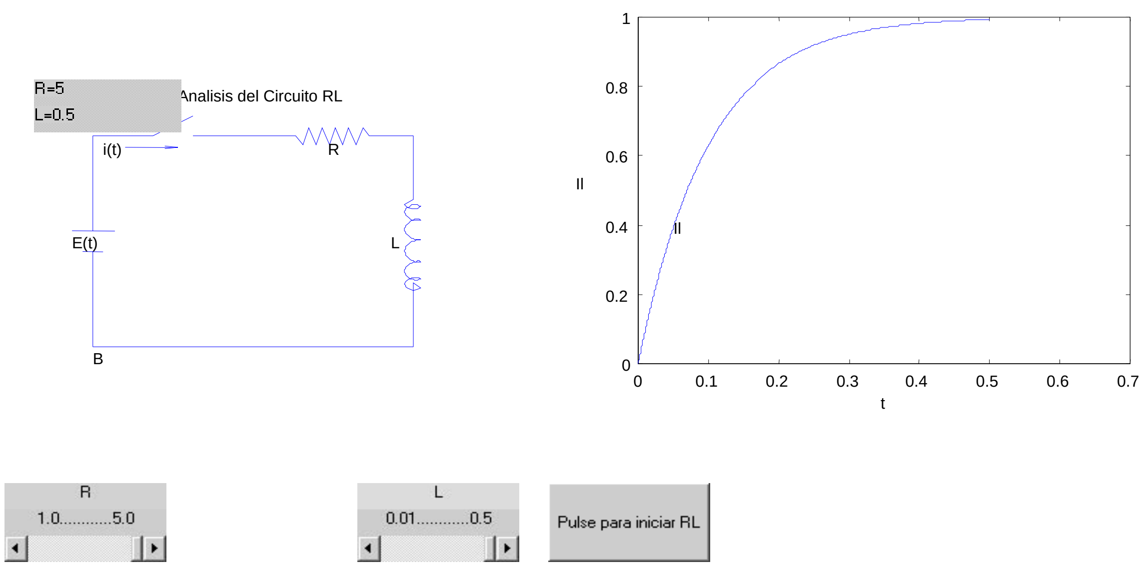
7. Simulación del problema utilizando software especializado (MATLAB).

Para la simulación de nuestro problema se utilizan varios programas hechos previamente en MATLAB construidos expresamente para este tipo de problemas (MATLAB se puede considerar como un lenguaje de programación, como Fortran o C, aunque sería difícil describirlo en unas cuantas palabras y no es propósito del presente trabajo) en un futuro se pretende que los alumnos y los profesores de las diferentes áreas realicen y utilicen todo el potencial de este paquete, así como todas las cajas de herramientas o toolbox existentes en él (SIMULINK, CONTROL SYSTEM TOOLBOX, STATEFLOW).

Por otro lado el propósito de esta etapa es ofrecer al estudiante la oportunidad de tener una forma de análisis más profunda de los problemas a los que se enfrenta, interactuando visual y gráficamente (como punto de arranque del proyecto), teniendo la ventaja de poder comprobar en forma exhaustiva cada afirmación teórica a la que se enfrenta.

Para resolver nuestro ejemplo utilizamos como se mencionó anteriormente, una serie de rutinas para dibujar circuitos, para resolver ecuaciones diferenciales (se utilizó el método de Runge-Kutta), para interaccionar visual y gráficamente con la computadora se utilizo la Interfaz Gráfica realizando los programas correspondientes.

Los resultados que obtuvimos son los siguientes.



En la gráfica (vista de la pantalla) se aprecian tres controles en la parte baja, los dos primeros nos sirven para modificar los valores de la resistencia R y de la inductancia L, el tercer control es un botón para calcular la solución de circuito cada que se cambien los valores de R y L, en la esquina superior izquierda se muestran los valores que toman las constantes R y L. La gráfica de la derecha de la pantalla muestra la solución gráfica de la corriente en el inductor cada que se calcula, esto sucede cada que se modifican los valores de R y L, del otro lado a la misma altura se muestra la figura del circuito en estudio.

Con este procedimiento podemos comprobar las afirmaciones dadas en el punto (6). Es importante decir que se cuenta con una secuencia didáctica muy detallada (Práctica de laboratorio) para lograr los objetivos planteados.

Conclusiones

Uno de los factores de la falta de motivación y el gran número de reprobados en las carreras de ingeniería en las materias de matemáticas, tiene su justificación en el desconocimiento que muestran tanto alumnos como profesores de la aplicación real de este tipo de materias, situación que pone en un grado muy bajo el desempeño escolar y desmotiva el estudio de las matemáticas.

Sería muy adecuado que los profesores encargados de impartir los cursos de matemáticas en las carreras de ingeniería incursionaran en el estudio de las áreas de conocimiento propios de cada especialidad, esto los llevaría al conocimiento de las aplicaciones reales y por consecuencia a un diseño adecuado de los ejemplos que abordarían en clase, ganando con esto la preparación del futuro ingeniero en el modelado de los fenómenos con que se va a enfrentar en su vida profesional.

Para lograr la integración de los conocimientos desde un punto de vista de contexto general, es importante que se cree un espacio *Laboratorio de matemáticas* con un peso curricular, independiente de cualquier materia en particular, que tenga un carácter general, en donde alumnos y profesores discutan y planteen soluciones a una serie de problemas dados en ingeniería, donde se haga y se propicie la construcción del conocimiento.

Estudiar a las matemáticas desde un punto de vista integral, conlleva la integración de los conocimientos de la Física, la Matemática y la Ingeniería.

El uso de las nuevas tecnologías permite al alumno descubrir algunos conceptos que de otra manera sería difícil o imposible observar; por medio del análisis visual se comprenden mejor algunos aspectos de las matemáticas y se hacen más asequibles, este hecho es bien conocido, ya que en el pasado hacer un estudio gráfico de un problema resultaba muy complicado y tedioso o estaba extremadamente limitado a pequeños esbozos solamente.

La computadora y el software especializado permiten hacer un estudio tan profundo como se quiera de los problemas de ingeniería, dada la rapidez de los cálculos, los resultados gráficos y los procedimientos sistemáticos, por citar sólo algunos.

Bibliografía

[1] Dirck, J. Struik, Historia concisa de las matemáticas, IPN, México,1980.

[2] S.Mochón, Modelos matemáticos: los puentes entre las matemáticas y el mundo real. Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México, 1997.

[3] Roberto L. Boylestad, Análisis introductorio de circuitos. Edit. Trillas,México, 1982.

[4] Yves Chevallard, Estudiar matemáticas el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. SEP, México,1998.

[5] Victor Gerez Greiser y M.A.Murray Lasso, Teoría de sistemas y circuitos. Edit. Representaciones y servicios de ingeniería, S.A.,México, 1972.

[6] Boyce Diprima, Ecuaciones Diferenciales. Edit. Limusa, México,1974.

[7] Derrick/Grossman, Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Edit. Fondo educativo interamericano, México, 1984.

[8] Lev M. Fridman, Metodología para resolver problemas de matemáticas. Edit. Grupo editorial Iberoamericano, México, 1995.

[9] Blum, Numerical Análisis, computation theory and practice. Edit. Adison Wesley, USA, 1972.

[10] Huelsman, Basic circuit theory with digital computations. Edit.Pretince hall, México, 1980.

[11] Charles A desoer, Basic Circuit Theory. Edit. Mc Graw Hill, Inter,1983.

[12] The Mathworks Inc. Manuales de MATLAB.

--- o ---