

EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS CON BASE EN UN AMBIENTE DE REPRESENTACIONES DINÁMICAS

ENRIQUE ARENAS
earenass@hotmail.com
JUAN ESTRADA
estrada@servidor.unam.mx

INTRODUCCIÓN

¿Qué tipo de actividades promueven en los estudiantes un pensamiento o razonamiento covariacional el cual es una base para el entendimiento del cálculo?

Los estudiantes al inicio de un curso de cálculo a menudo revelan el siguiente tipo de dificultades. Por ejemplo, cuando se les pide que formulen un problema a partir de la información dada: de una pieza de lámina de forma rectangular de 15 x 30 cm; construir un canal para el paso del agua de lluvia doblando las paredes formando un ángulo recto. La mayoría de los pupilos no reconocen que la situación involucra una variación simultánea de cantidades; por ello los problemas que la mayoría plantea son del siguiente tipo:

- “¿De cuantos centímetros deben ser las paredes del canal para soportar un flujo de 20 litros?”
- “¿Qué altura deben tener las paredes si se desea que el área de la base sea 5000 cm² ?”
- “¿Cuál será el ancho final de la hojalata si la altura de cada una de las paredes es de 2.5 cm?”

En una primera fase, no identifican la variación de cantidades, a pesar de que se trazan varias figuras y se muestran diferentes secciones del canal, con el propósito de llamar la atención de los alumnos sobre la variación del área de la sección:



Dicho con otras palabras, no ven la variación simultánea del ancho y la altura del canal y en consecuencia no se percatan de la variación del área de la sección, la cual es una componente relevante para entender la situación. Reconocer este aspecto podría conducirlos a formular un problema de optimización. Otro tipo de dificultad que guarda relación con la anterior, es la que aparece en el contexto del análisis del comportamiento de una función con el fin de trazar la gráfica. En esta circunstancia, un alumno expresó: “Prof. si una función es creciente en un intervalo, entonces la función no puede tener un punto de inflexión en este intervalo”. Al parecer, los alumnos tiene una imagen global de la propiedad creciente de una función, dejan de lado, el análisis de los cambios en la tendencia de la función. No se dan cuenta, que en un punto de inflexión se produce un cambio en dicha tendencia (ej. La razón de cambio pasa de un incremento a una disminución o viceversa).

Thompson (1994) señala que estas dificultades que exhiben los alumnos en los cursos de cálculo se explican por una falta de coordinación de imágenes. Una imagen para el autor es un tipo de conocimiento que está constituido por fragmentos coordinados de experiencias (cinestésicos, tocar, ver, oír) y son parecidas a un conocimiento figural o metafórico y que tienden a ser altamente idiosincráticas. Pero estas imágenes no siempre están coordinadas. Es el caso de una desconexión entre dos variables que cambian simultáneamente. Es decir, la inhabilidad para imaginar lo que le está sucediendo a una variable (¿Su razón de cambio se

incremento o disminuye?) mientras la otra recorre un dominio. Además de lo anterior, un punto sustancial, es que los alumnos tampoco poseen un concepto robusto de la tasa de cambio de una función y de acumulación y su comprensión de su relación que se realiza a través del teorema fundamental del cálculo. La solidez de estos conceptos son básicos para el entendimiento del cálculo y para la resolución de problemas que involucran covariación, límite y acumulación.

Bajo estas consideraciones, el propósito del trabajo es presentar una propuesta¹ de un conjunto de actividades para favorecer en los alumnos un pensamiento covariacional. El cual se asume como fundamental para el entendimiento del cálculo y la resolución de problemas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LAS ACTIVIDADES

La propuesta está dirigida a estudiantes que cursan la asignatura cálculo I en la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Algunos de los objetivos particulares de las actividades que presentamos a continuación son: a) favorecer una imagen dinámica y coordinada de cantidades que varían simultáneamente, b) una imagen coordinada de acumulación de una cantidad mientras otra cantidad recorre un dominio, c) fortalecer el concepto del valor de cambio (tasa) de una cantidad, d) una imagen coordinada entre el valor de cambio de una función y acumulación (el teorema fundamental del cálculo), e) estimular una habilidad para interpretar y representar gráficamente cantidades que varían simultáneamente en diversos contextos (geométrico, físico, vida real).

Una característica en esta propuesta es que se introduce la tecnología para representar dinámicamente algunas actividades (¿las dificultades que revelan los educandos en un contexto de papel y lápiz se vuelven a manifestar –o surgen nuevas- cuando la misma tarea se presenta en un ambiente dinámico?). Pero también se emplean otro tipo de recursos didácticos: solicitar a los alumnos que proporcionen explicaciones de su razonamiento cuando llevan a cabo este tipo de tareas. Tampoco se dejan de lado actividades en un contexto de lápiz y papel. Todos estos escenarios son importantes para promover los cambios deseados.

MARCO CONCEPTUAL

Un concepto importante en los estudios de Piaget (1967) es el de imagen. La imagen no es una representación estática o una fotografía de un objeto, sino el resultado de las acciones que un individuo realiza sobre un objeto, es decir, son las acciones sobre el objeto las que son interiorizadas por el sujeto para construir una imagen del objeto. Sin embargo, esta imagen no va al parejo con las acciones: "...[pero] la imagen no puede ir al paso con las acciones, debido a operaciones desiguales, tales acciones no son coordinadas una con la otra" (Piaget op.cit, p.265, citado en Thompson 1994). Esta observación ayuda a entender acerca de la naturaleza de las dificultades que muestran los alumnos cuando son expuestos a situaciones que involucran una variación simultánea de cantidades. Por ejemplo, cuando se les pide establecer una relación matemática funcional entre las cantidades que aparecen involucradas (ej. Expresar el área de una sección de un recogedor de basura en términos de un solo parámetro cuando involucra la variación simultánea de tres magnitudes o expresar el volumen de agua que está entrando en un recipiente de forma cónica invertida en función de un solo parámetro cuando está involucrada la variación simultánea de dos magnitudes).

En este contexto, Thompson (1994) afirma que el bajo desempeño de los estudiantes en los cursos de cálculo en Norteamérica, sugieren una falta de entendimiento de conceptos como el de tasa de cambio, un raquítico desarrollo y deficiente coordinación en la imagen de covariación funcional. En esta misma línea, Carlson *et al* (2001) estudió los efectos de materiales curriculares que fueron empleados durante un semestre con estudiantes universitarios en un curso de cálculo. El propósito de estas tareas fue para desarrollar un razonamiento covariacional. También exploró el papel de esta capacidad en la adquisición de los conceptos de límite y acumulación. La experiencia realizada reporta resultados alentadores en los avances de los alumnos.

¹ Este conjunto de actividades forman parte de una investigación. La siguiente etapa será documentar los posibles cambios en los estudiantes expuestos a este tipo de actividades

Los materiales tenían las siguientes características: “Cada actividad contenía un conjunto de sugerencias que estimulaban a los estudiantes a coordinar una imagen de dos variables que cambiaban y atender y representar la manera en la cual las variables independiente y dependiente cambiaban una con relación a la otra” (p.147).

Una diferencia importante de la presente propuesta con la de Carlson, es que nosotros introducimos la tecnología para representar dinámicamente la covariación, ya que, consideramos importante documentar lo que sucede cuando la interacción se presenta en este tipo de ambiente.

Para observar los procesos de razonamiento de los alumnos las autoras, utilizaron las siguientes categorías:

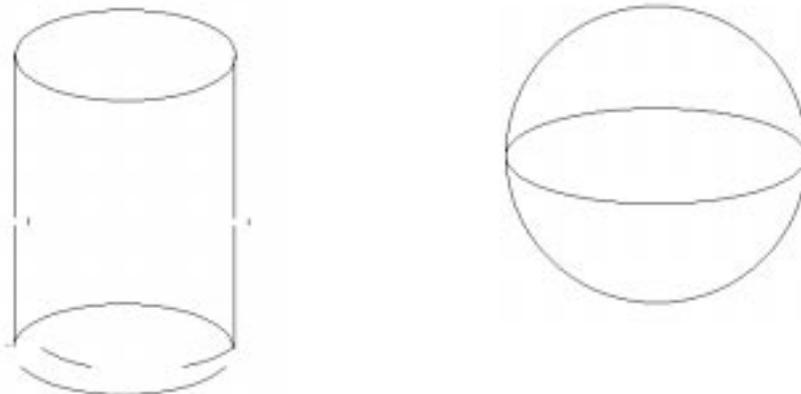
- MA1) Una imagen de dos variables que cambian simultáneamente.
- MA2) Una coordinación frágil de una imagen de cómo las variables están cambiando una con respecto a la otra (ej., aumentando, disminuyendo).
- MA3) Una imagen de la cantidad de cambio de una variable mientras se consideran cambios en cantidades discretas de la otra variable.
- MA4) Una imagen de tasa/pendiente para intervalos contiguos del dominio de una función.
- MA5) Una imagen de la tasa del cambio continuo sobre el dominio.

Este marco sirvió como un elemento para el diseño de algunas actividades que se presentan a continuación.

TIPO DE ACTIVIDADES

○ **Tipo A:**

Se proporcionan recipientes de diversas formas (embudo, cónica, cilíndricas, cántaro de agua, esféricas, etc.) que se llenan de agua con una tasa constante a través de un orificio. Por ejemplo, se proporciona uno de forma cilíndrica y otro de forma esférica.



Tarea de los estudiantes. Dibujar una gráfica para cada evento que represente la variación de la altura del nivel del agua conforme se llena en cada recipiente. Luego se les solicita que tracen una gráfica de volumen contra la altura y que comparen dichas gráficas. Finalmente se les pide que tracen una gráfica que represente la rapidez de cambio de la altura respecto al tiempo. También se les pide que proporcionen una explicación del razonamiento que les sirvió de apoyo para construir las gráficas.

Objetivo de las actividades. En general estas tienen como propósito que sean los propios estudiantes los que hagan las conexiones. En esta fase inicial también se pretende observar que tiene en mente cuando hablan de que algo está cambiando o acumulando. Si exhiben una falta de coordinación, qué tipo de ideas o imágenes o conceptos ponen en juego cuando tratan de resolver dichas tareas. Esto permitirá detectar patrones o dificultades en los estudiantes y ponerles atención para su corrección en las subsecuentes actividades.

o **Tipo B:**

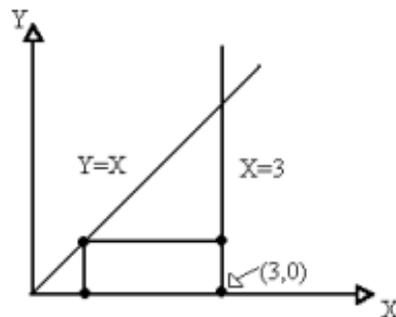
Proporcionar diferentes gráficas y descripciones verbales de un evento covariacional. Por ejemplo: Hacer una correspondencia entre las gráficas y las descripciones que se dan a continuación:

- a) Empezando desde el reposo y ganando gradualmente rapidez, para luego empezar a disminuir.
- b) Empezando rápidamente al principio y disminuyendo lenta y gradualmente hasta el reposo, para luego aumentar la rapidez gradualmente.
- c) Empezar desde el reposo y perdiendo gradualmente rapidez para luego aumentar rápidamente.

Objetivo: Identificar covariación en un contexto verbal.

o **Tipo C:**

Animación en la pantalla de una computadora de figuras geométricas (ej. un rectángulo inscrito en la región triangular formada por dos rectas y el eje x donde uno de los vértices del rectángulo se encuentra en una de las rectas y se mueve sobre esta generando diferentes rectángulos - ¿qué sucede con el área, el perímetro?-)



Tarea de los estudiantes: Identificar las componentes que varían simultáneamente.

Objetivo: Coordinar imágenes geométricas.

o **Tipo D:**

Seleccionar problemas de un libro de texto de Cálculo. Por ejemplo, el problema de una escalera recargada sobre una pared cuya base de apoyo se encuentra a una cierta distancia de la pared.

Tarea de los estudiantes: Determinar la rapidez con que está cambiando el ángulo formado por la escalera y la superficie, si el pie de la escalera se separa con una rapidez de 0.1 cm/s. Hacer una representación gráfica de la situación.

Objetivo: Promover conexiones y resolución de problemas.

o **Tipo E:**

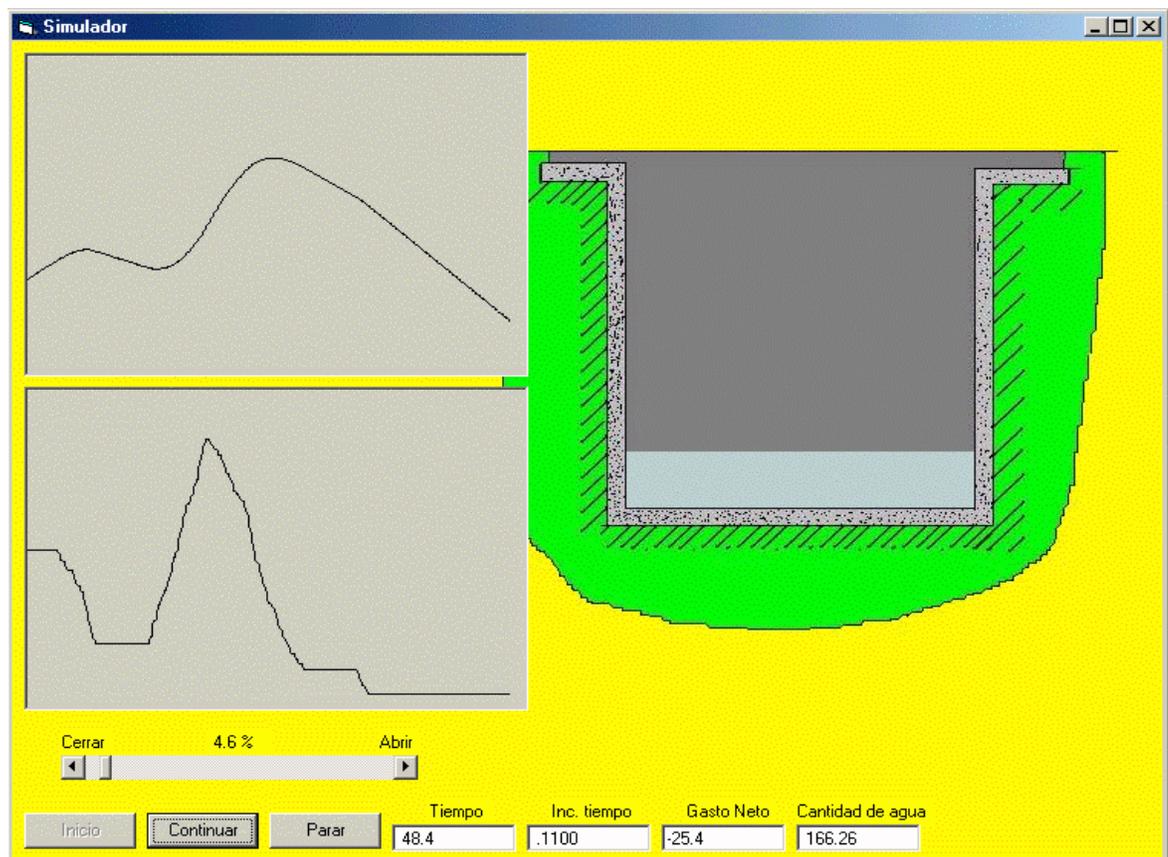
Seleccionar problema de un libro de texto de Física. Por ejemplo, una polea que sostiene en sus dos extremos dos cuerpos de pesos iguales. Donde cualquier desplazamiento de uno hace que cambie la altura del otro.

Tarea de los estudiantes: Trazar una gráfica de la variación de la altura de uno con respecto a la variación de la altura del otro.

Objetivo: Promover conexiones en una situación diferente (Física).

o **Tipo F:**

Los alumnos trabajan en una computadora en donde se simula el llenado de un tanque de agua mediante las acciones sobre una llave que introduce o desaloja agua, pero al mismo tiempo otra llave que no se manipula, desaloja agua con un flujo constante. Al mismo tiempo que el estudiante realiza estas operaciones se va generando simultáneamente una gráfica que represente el volumen de agua contenido en el tanque y por otro lado, la gráfica de la manipulación de la llave.



Tarea de los estudiantes: Esta actividad tiene varias fases, por ejemplo, a) Se pide a los alumnos que propongan una gráfica que representen la variación del volumen respecto al tiempo, b) Se proporciona una gráfica y se pide a los alumnos que hagan una descripción verbal de la gráfica en términos de la manipulación de cerrar o abrir la llave, teniendo en cuenta que una llave desaloja agua con un flujo constante, c) Se proporciona una gráfica que representa la acumulación del *gasto*, se pide también que den una explicación de la gráfica en términos de la manipulación de la llave.

Finalmente, se les solicita que con base en la gráfica de la acumulación construyan la gráfica del volumen contenido en el tanque.

Un punto importante en la actividad anterior es promover una imagen dinámica y coordinada sobre el significado de un punto de inflexión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Carlson, M. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. In Speiser, R; Maher, C; Walter, Ch. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education North America. Vol 2*, Snowbird, Utah PME-NA XXIII.
- Piaget, (1967). *The Child's Concept of Space*, W. W. Norton, New York.
- Thompson, P, (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274.

--- 0 ---