UNA FORMA TENSORIAL DE LA MATRIZ INVERSA GENERAL (EN EL ESPACIO CONTRAVARIANTE) A^{-1} DE MATRICES DE ORDEN M×N CON M≥N Y LA SOLUCIÓN CERRADA DE ESTE PROBLEMA

Por: Dr. J. L. Urrutia Galicia
Instituto De Ingeniería, UNAM

- Resumen
- Dada una matriz rectangular A de orden $m \times n$ con $m \geq n$, y el conjunto = $\{\phi_1 , \phi_2,\dots, \phi_n \}$ formado por los vectores columna (covariantes) ϕ_n de A linealmente independientes, pero no necesariamente ortogonales, existe entonces una inversa única A^{-1} formada por la transpuesta de la matriz B $\{\phi^1, \phi^2,\dots, \phi^n \}$ de vectores base columna (contravariantes) de cálculo tensorial.
- En la teoría actual de inversas generalizadas, una matriz A de orden $m \times n$ real (rectangular) con $m \geq n$ tiene una pseudoinversa única $A^{\uparrow}$ si, y sólo si las siguientes ecuaciones de Penrose son satisfechas
-

$$AA^{\uparrow}A = A$$

$$A^{\uparrow}AA^{\uparrow} = A^{\uparrow}$$

$$(AA^{\uparrow})^{T} = AA^{\uparrow}$$

$$(A^{\uparrow}A)^{T} = A^{\uparrow}A$$

Dada una matriz ***A*** de orden $m \times n$ su pseudoinversa $\boldsymbol{A}^{\uparrow}$ se define como sigue

$$A^{\uparrow} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

Un vector cualquiera puede descomponerse en dos espacios coordenados ϕ_n y ϕ^n como sigue

$$\tilde{v} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \tilde{\phi}^n$$

$$\vee \,..$$

$$\tilde{v} = \sum_{n=1}^{\infty} C^n \tilde{\phi}_n$$

- con C_n y C^n representando las componentes covariantes y contravariantes de *v*. Cualquier vector se puede descomponer en bases covariantes o contravariantes ϕ_n y ϕ^m ; por lo tanto un vector base covariante ϕ_n puede descomponerse en bases contravariantes ϕ^n como sigue

$$\tilde{\phi}_n = \phi_{n1}\tilde{\phi}^1 + \phi_{n2}\tilde{\phi}^2 + \phi_{n3}\tilde{\phi}^3 + ...etc.$$

$$\tilde{\phi}_n = \phi_{nm}\tilde{\phi}^m \qquad\qquad \tilde{\phi}^n = \phi^{nm}\tilde{\phi}_m$$

- En la última ecuación ϕ^{nm} es el tensor métrico contravariante de cálculo tensorial. Es fácil escoger un conjunto arbitrario y completo (o incompleto) de vectores base covariantes ϕ_n y con ellos podemos generar el tensor métrico $\phi_{nm} = \langle\phi_n, \phi_m\rangle$. Dada una matriz ***A*** de orden $m \times n$ con $m \geq n$, y adoptando el conjunto de *n* vectores columna $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ de orden $m \times 1$, podemos llamar a este conjunto el espacio covariante ***s***.
- Como podemos conocer todos los elementos del tensor métrico covariante, entonces los elementos del tensor métrico contravariante se calculan de la siguiente identidad tensorial

$$\phi_{11}\phi^{m1} + \phi_{12}\phi^{m2} + \phi_{13}\phi^{m3} + ... += \delta_1^m$$
$$\phi_{21}\phi^{m1} + \phi_{22}\phi^{m2} + \phi_{23}\phi^{m3} + ... += \delta_2^m$$
$$.....$$
$$etc.$$

Cuando la base covariante tiene tres elementos el tensor métrico contravariante se calcula de las siguientes tres ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{11} \\ \phi^{12} \\ \phi^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{21} \\ \phi^{22} \\ \phi^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{31} \\ \phi^{32} \\ \phi^{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- De donde se calculan todos los elementos de ϕ^{mn} del tensor métrico contravariante de orden 3×3.
- Con las métricas covariantes y contravariantes disponibles, los vectores base contravariantes pueden calcularse como sigue

$$\tilde{\phi}^{n} = \phi^{nm}\,\tilde{\phi}_{m}$$

- **INVERSA A-1, EL CASO GENERAL**

- **TEOREMA 1**. Dada una matriz ***A*** de orden $m \times n$ con $m \geq n$, y el conjunto $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ formado por sus vectores covariantes columna , linealmente independientes, pero no necesariamente ortogonales, existe entonces una inversa única ***A***-1 formada por la transpuesta de la matriz ***B*** = $\{\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n\}$ de vectores base columna contravariante calculados mediante la ecuación (12). El caso cuando $m = n$ para matrices cuadradas es únicamente un caso particular.

- **TEOREMA 2.** Dada una matriz ***A*** de orden $m \times n$ con $m \geq n$, el conjunto $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, de sus vectores columna, será linealmente independiente si y sólo si, el determinante del tensor métrico ϕ_{mn} es diferente de cero. El tensor métrico siempre es cuadrado.

- **EJEMPLO** Se toma este problema de7, para mostrar una propuesta que mejora la solución presentada para un problema relacionado con los niveles de producción de ciertos productos químicos en una refinería petrolera.
- **PROBLEMA**. Encontrar la mejor solución al siguiente sistema de ecuaciones en dos de sus formas más comunes:

$$\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 10 & 14 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 850 \\ 1000 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 20\,x_1 + 4\,x_2 &= 500 \\ 10\,x_1 + 14\,x_2 &= 850 \\ 5\,x_1 + 5\,x_2 &= 1000 \end{aligned}$$

$$A\tilde{x} = b$$

Sin embargo, es más conveniente verla en forma vectorial como sigue

$$x_1\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 850 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Cuando esta última ecuación se resuelve se obtiene la siguiente aproximación $\bar{p}$ mostrada en la siguiente figura

$$\tilde{p} = 14.6\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + 64.7\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 551 \\ 1051 \\ 394 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 500 \\ 850 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

La diferencia entre el vector $\bar{b}$ y el vector $\bar{p}$ da el vector error $\bar{e}$

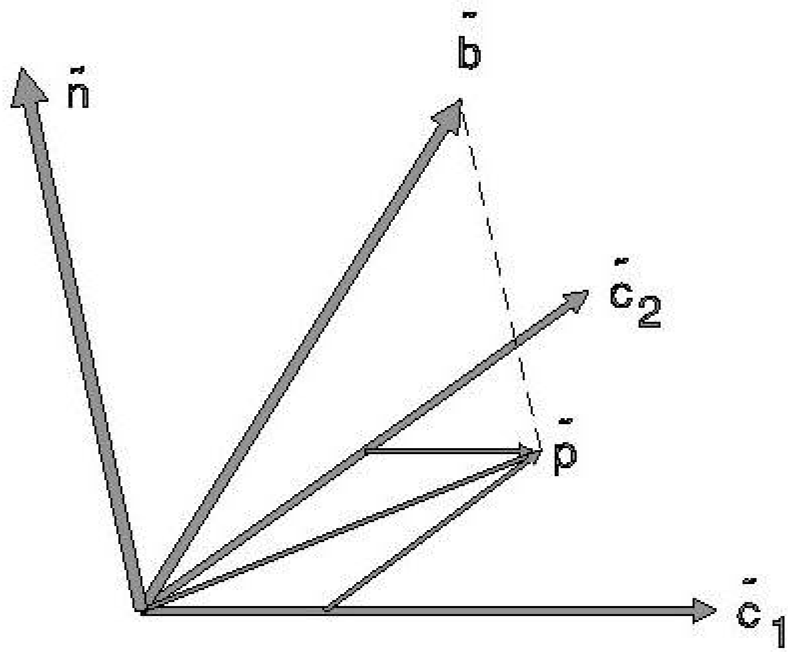

Figura 4

$$\tilde{b}_n = \begin{pmatrix} 0.35601 \\ 0.60522 \\ 0.71202 \end{pmatrix} \quad \tilde{e} = \begin{pmatrix} -51 \\ -201 \\ 606 \end{pmatrix}$$

Con el vector $\bar{b}_n$ (normalizado de $\bar{b}$) y el vector $\bar{e}$ normalizado a norma "1" se forma la siguiente matriz

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 0.35601 & -0.07963 \\ 0.60522 & -0.31524 \\ 0.71202 & 0.94573 \end{pmatrix}$$

Cuya inversa (ya no pseudoinversa) se define como sigue

$$A^{*-1}=\begin{pmatrix} 0.49386 & 0.94341 & 0.35562 \\ -0.30329 & -0.74405 & 0.78408 \end{pmatrix}$$

El segundo renglón de esta última matriz es perpendicular al vector objetivo $\bar{b}$ y cuando lo normalizamos nos queda

$$\tilde{N}_T=(-0.27015,-0.66275,0.69841)$$

El plano cuya normal es $\tilde{N}_T$ es el siguiente

$$-0.27015X-0.66275Y+0.69841Z=0$$

Este plano es satisfecho por el siguiente vector arbitrario

$$\tilde{t}_T=(1.0,1.0,1.33582)$$

Y por el siguiente vector, cien veces más pequeño que el vector objetivo original $\bar{b}^{\,T}$ = (500, 858, 1000)

$$\tilde{s}_T = (5, 8.5, 10)$$

En el espacio generado por estos vectores $\tilde{t}_T = (1, 1, 1.33582)$ y $\tilde{s}_T = (5, 8.5, 10)$ proyectamos la primer columna del problema original de la solución de la siguiente ecuación

$$X_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 8.5 \\ 10 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.3358 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solución nos da

$$X_1 = -3.81493 \quad , \quad X_2 = 36.7681$$

Que al substituirse en la última ecuación nos da la proyección de $\bar{b}^{\,T}$ = (500, 858, 1000) $\tilde{C}_1$ como sigue (similarmente $\tilde{C}_2$)

$$\tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 17.698 \\ 4.349 \\ 10.9724 \end{pmatrix} \quad \tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} 2.1449 \\ 9.44877 \\ 9.796 \end{pmatrix}$$

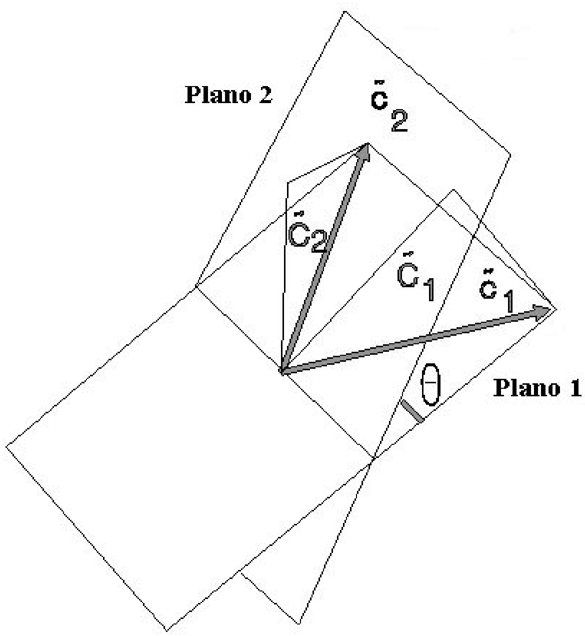

Figura 5

El problema original lo reemplazamos por la siguiente ecuación

$$X_1\begin{pmatrix} 17.698 \\ 4.349 \\ 10.9724 \end{pmatrix} + X_2\begin{pmatrix} 2.1449 \\ 9.44877 \\ 9.796 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 850 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Que admite la siguiente solución exacta

$$18.3743\begin{pmatrix} 17.698 \\ 4.349 \\ 10.9724 \end{pmatrix} + 81.5015\begin{pmatrix} 2.1449 \\ 9.44877 \\ 9.796 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 850 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

REFERENCIA.

J. L. Urrutia Galicia, "La matriz inversa generalizada (el espacio contravariante) a^{-1} de matrices de orden m x n con m ≥ n y la solución cerrada de este problema" Revista: INGENIERÍA, Investigación y Tecnología, (FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM), Vol. IV, No. 1 - enero - marzo 2003.