UN ESTUDIO DIDÁCTICO DE LA RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES A TRAVÉS DE LA VARIACIÓN PROPORCIONAL

Teodoro M. Ceballos- Instituto Tecnológico de Tlalnepantla-Facultad de Ingeniería, División de Ciencias Básicas Depto. de Matemáticas Avanzadas-UNAM.

Ma. Del Socorro Reyes Baños-Instituto Tecnológico de Tlalnepantla-ITTLA.

Alrededor de las transformaciones que tiene día a día el avance tecnológico y de la globalización que experimenta el mundo, las instituciones educativas deben y algunas ya lo están haciendo desarrollar procesos educativos importantes con calidad certificada para que los que en ellas se forman alcancen un nivel óptimo en la carrera que estén estudiando. En el caso de la educación universitaria y tecnológica, se están haciendo esfuerzos de tal manera que prácticamente en todas las carreras se implementen propuestas de modificación a sus currículas; como resultado de estas acciones en el área de las ingenierías el avance que se tiene es alentador.

Con estas perspectivas, la currícula matemática es considerada como parte de la formación básica de un ingeniero. Por consiguiente, el uso de las matemáticas a la resolución de problemas de inecuaciones y desigualdades o al estudio de aspectos científicos en el área de ingeniería se deja como una responsabilidad académica en otros cursos paralelos. Con esto, se espera que los que aprenden se apropien suficientemente de la información de por si poca sobre estos conceptos, y especialmente sobre técnicas y algoritmos para ser aplicados posteriormente.

Así, todos estamos enterados de alguna manera de que el divorcio que existe entre el conocimiento básico y lo específico, ha conducido al Discurso Matemático Escolar (DME), a que los alumnos cuando tienen que usar conocimientos matemáticos en la resolución de problemas sobre inecuaciones y desigualdades, no tenga la argumentación necesaria y suficiente para plantear un proceso metodológico adecuado con el cual él este seguro de la adecuada interpretación del problema, desarrollo operacional del mismo, el resultado que espera encontrar y del significado de éste; de tal manera que pueda incorporar estas ideas en el ejercicio profesional de su carrera. Además, muestra cierta incapacidad de poder identificar la matemática para cada uno de los procesos en la cual se requiera, este comentario se desprende del reporte de investigaciones de otros colegas.

En esta dirección, los conceptos matemáticos en el nivel superior deben proporcionarse con precisión, además de seguir su lógica interna, pero siempre en función de las necesidades que de esta disciplina tiene el que se está formando como ingeniero. En este contexto adquiere particular importancia el uso de formas de motivación, tales como el planteo de situaciones problemáticas que tengan que ver con el nivel, la situación curricular y la carrera; con preguntas abiertas que impulsen la búsqueda de respuestas y soluciones. Por consiguiente, como resultado de esta expectativa, se lograría, la ventaja de una posibilidad de presentar desde los primeros cursos, una matemática de usuarios y, como una meta inmediata, propiciar de manera mas efectiva, el desarrollo de actitudes y habilidades de pensamiento que son requerimientos necesarios en la solución de problemas que involucran problemas que son el motivo de nuestro trabajo de estudio.

Por otra parte, todos sabemos que el desarrollo epistemológico de las matemáticas y en particular, la teoría de las desigualdades viene siendo un concepto importante muy complicado de enseñar y aprender en cálculo. Esto puede ser por muchas razones, p.ej., no se cuenta con información bibliográfica suficiente donde se sustente el uso que un profesional de ingeniería tenga que darle; por otra parte, no conocemos los significados que esta teoría pueda tener con las otras ciencias, si no es que con la matemática misma y finalmente, al solucionar una desigualdad, nos podemos percatar sin mayores problemas, que los procesos algorítmicos desarrollados aquí, son tan abstractos como los que se hacen con otros conceptos matemáticos. Antes de extender los beneficios que nuestra propuesta pueda aportar al solucionar desigualdades, nos pareció oportuno presentar en forma compacta las Teorías de Desigualdades y Variación Proporcional, veamos

TEORÍA DE DESIGUALDADES.

Sabemos que podemos entender como la definición de una desigualdad, como la expresión de dos expresiones numéricas o literales mediante alguno de los siguientes signos:

1. $>$ (“mayor”).
2. $<$ (“menor”).
3. $\neq$ (“desigual”).
4. $><$ (“mayor o menor”).
5. $\geq$ (“mayor o igual”).
6. $<$ (“no es menor”).
7. $\leq$ (“menor o igual”).
8. $>$ (“no es mayor”).

Las anotaciones (3), (4), (5), (6), (7) y (8) tienen un mismo significado y pueden ser reemplazadas una por otra.
Las desigualdades de los tipos (1), (2) y (3) se llaman estrictas y las del tipo (6) y (7) no estrictas.

Por consiguiente, una desigualdad se llama identidad, si es válida para todos los valores de las letras que figuran en ella. Una desigualdad válida que contiene solo números, también se llama identidad.
Las desigualdades al igual que las ecuaciones, pueden contener cantidades incógnitas (generalmente estas últimas se designan por las últimas letras del alfabeto).
Por otra parte, resolver una inecuación (o un sistema de inecuaciones), significa determinar entre que límites deben estar comprendidos los valores de las incógnitas para que la desigualdad (o todas las desigualdades contenidas en el sistema) sea válida. Se puede buscar la solución para desigualdades de los tipos (1) al (7); más frecuentemente se suelen resolver desigualdades estrictas de los tipos (1) y (2). Si dos desigualdades pertenecen ambas al tipo (1) o al tipo (2), entonces son desigualdades en un mismo sentido, i.e., varían directamente proporcional, mientras que si una de ellas pertenece al tipo (1) y la otra al tipo (2), entonces son desigualdades en sentido contrario pero esto no hará que dejen de seguir teniendo variación proporcional directa. Ahora, dos inecuaciones que contengan las mismas incógnitas se llaman equivalentes si ambas son válidas para los mismos valores de las incógnitas.

Propiedades fundamentales de las desigualdades de los tipos (1) y (2):

1) **Cambio de signo de la desigualdad.** Si $a > b \Rightarrow b < a$; si $a < b \Rightarrow b > a$.
2) **Propiedades transitivas.** Si $a > b$ & $b > c \Rightarrow a > c$; si $a < b$ & $b < c \Rightarrow a < c$.
3) **Suma y resta de una desigualdad y una cierta cantidad.**

Si $a > b \Rightarrow (a \pm c) > (b \pm c)$; si $a < b \Rightarrow (a \pm c) < (b \pm c)$; al sumar una misma cantidad en ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no varia.

4) **Suma de desigualdades.** Si $a > b$ & $c > d \Rightarrow (a + c) > (b + d)$; si $a < b$ & $c < d \Rightarrow (a + c) < (b + d)$: dos desigualdades de un mismo sentido se pueden sumar lado a lado.
5) **Sustracción de desigualdades.** Si $a > b$ & $c < d \Rightarrow (a - c) > (b - d)$; si $a < b$ & $c > d \Rightarrow (a - c) < (b - d)$; de una desigualdad se puede restar lado a lado otra desigualdad de sentido contrario, sin que por ellos varié el signo de la primera desigualdad. (¡No se pueden restar lado a lado desigualdades de un mismo sentido!).
6) **Multiplicación y división de desigualdades.**

   Si $a > b$ & $c > 0 \Rightarrow ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

   Si $a < b$ & $c > 0 \Rightarrow ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

   Si $a > b$ & $c < 0 \Rightarrow ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

   Si $a < b$ & $c < 0 \Rightarrow ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

> Al multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un mismo número positivo, resulta una desigualdad del mismo sentido; al multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por un mismo número negativo, resulta una desigualdad de sentido contrario.

Resolución de inecuaciones de primero y segundo grado.

La resolución de inecuaciones se reduce al reemplazo sucesivo de una inecuación por otra equivalente a ella. Al igual que en la resolución de ecuaciones, en las inecuaciones los sumandos se pasan de un lado a otro con signo contrario y se multiplican o dividen ambos lados de la inecuación por un mismo número (distinto de cero; si el factor es positivo, se conserva el signo de la desigualdad y si es negativo, se cambia por el contrario). Mediante tales transformaciones siempre se puede reducir una inecuación de primer grado a la forma $ax > b$, y una inecuación de segundo grado, en el caso general, de la forma $ax^2 + bx + c < 0$ ó $ax^2 + bx + c > 0$.

La inecuación de primer grado $ax > b$ tiene la solución:

$$x > \frac{b}{a} \ \ para\ \ a > 0\ \ y\ \ x < \frac{b}{a}\ \ para\ \ a < 0$$

Las inecuaciones elementales de segundo grado $x^2 < m$ & $x^2 > m$, tienen las soluciones:

a) $x^2 < m$. Para $m > 0$ la solución es: $-\sqrt{m} < x < +\sqrt{m}\left(|x| < \sqrt{m}\right)$.

Para $m \leq 0$ no tiene solución.

b) $x^2 > m$. Para $m > 0$ la solución es: $x > \sqrt{m}$, & $x < -\sqrt{m}\left(|x| > \sqrt{m}\right)$.

Para $m = 0$ la solución es: $x > 0$ & $x < 0$ ($x \neq 0$).

Para $m < 0$ la desigualdad es una identidad.

El caso general de una inecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c < 0$ ó $ax^2 + bx + c > 0$.

se divide la inecuación por a (cambiando el signo de la inecuación en el caso $a < 0$) y se reduce a la forma $x^2 + px + q < 0$ ó $x^2 + px + q > 0$. La última inecuación se transforma a la forma:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

o, respectivamente a la forma:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\ .$$

Designando $x + \frac{p}{2}$, por z y $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, por m resulta la inecuación $z^2 < m$ ó $z^2 > m$; resolviéndola se halla x.

TEORÍA DE LA VARIACIÓN PROPORCIONAL INVERSA Y DIRECTA.

La naturaleza de la proporción.

La teoría de las proporciones ha encontrado aplicaciones prácticas en la resolución de numerosos problemas de aritmética relativos al comercio, a la distribución de los impuestos, y a muchos otros en esta misma dirección. Sin embargo, lo admirable de este concepto, es que su idea germinal esta basada en la teoría de los números, cita particular en el conjunto de los números racionales, es reclamado en múltiples fenómenos que se presentan en la naturaleza como hechos interesantes del mundo real y que tienen que ver con el tema que nos ocupa. Como referencia se cita la regla de las dos posiciones falsas que se aplicaban a la resolución básicamente mecánica de los problemas que eran representadas por una ecuación lineal de una incógnita o por un sistema determinado de ecuaciones lineales de varias incógnitas; era de uso ordinario como el de la regla de tres.

♦Variación Directamente Proporcional.

En el proceso de variación o variaciones en algunos problemas, principalmente en física y química son de gran interés, pero su análisis resulta bastante complejo; p.ej., en estas dos áreas importantes de la ciencia, aparecen dos cantidades que pueden variar sin que la razón que las relaciona cambie. Por lo tanto, el análisis de la variación proporcional directa origina un marcado interés.

Para resolver problemas sobre variaciones, es necesario: primero, señalar de que tipo es la variación, a menos de que el texto del problema en cuestión lo indique y segundo, establecer la ecuación de la variación con base en los datos del problema, por lo que surge la necesidad de expresar como ecuaciones las expresiones: **m** es directamente proporcional a **n**.

$$\frac{m}{n} = k,\ de\ donde\ m = kn\,.$$

Definición 1. Se dice que dos cantidades son directamente proporcionales, cuando haciendo una de ellas cierto número de veces mayor o menor, la otra resulta el mismo número de veces mayor o menor.

Definición 2. Dadas dos cantidades, si a un aumento de una corresponde un aumento de la otra, o a una disminución de una corresponde una disminución de la otra, entonces se dice que son directamente proporcionales.

$$\frac{a}{b} = k, de\ donde: a = bk$$

en la que **k** es la constante de proporcionalidad y siempre se representará con esta letra, a menos que se cite en el problema otra cosa, es necesario calcularla en cada caso. Para determinar la constante de proporcionalidad basta con

conocer el valor de **a** y de **b**, por lo que $\frac{a}{b} = k$. Desde luego que el valor de **k**, dependerá siempre de los datos experimentales de algún evento que se este llevando a cabo dentro del mundo real.
La siguiente definición, precisamente se desprende de un contexto experimental figurado, sin embargo es importante señalar que a partir de estos tipos de eventos ya definidos dentro del mundo real, es donde se empieza a establecer el principio de relación entre dos objetos, veamos:
Definición 3. Cuando a los datos experimentales consignados en un plano cartesiano se ajusta una recta (curva más simple) que pasa por el origen, se dice que existe entre las variables consideradas una relación proporcional directa. Observemos, si las variables involucradas fueran **u** y **v**, diríamos que u es directamente proporcional a **v** y viceversa.

Características de la variación directamente proporcional.

1). En toda variación proporcional directa, la razón de dos valores cualesquiera de la primera cantidad es igual a la razón de los valores correspondientes a la segunda.
2). Una variación proporcional directa puede estar integrada de cuatro términos en donde uno de ellos es la incógnita, por ejemplo:

$$\frac{1}{d} = k, \text{lo cual implica que } x = \frac{bc}{d}.$$

Que podría ser redefinido como un caso de variación conjunta, se aclara que las diferentes clases de variaciones pueden presentarse simultáneamente en un problema, si esto sucede recibe el nombre de variación conjunta y se define cuando una cantidad varía conjunta y proporcionalmente con dos o más cantidades, entonces la primera es igual al producto de la constante de proporcionalidad por el producto de las otras.

Del ejemplo ya expresado y donde **x** representa la incógnita, hacemos que $\frac{1}{d} = k$, con **k** definida como constante de proporcionalidad, entonces **x = kbc**, lo cual se usa con el mismo significado que corresponde a variación conjunta las expresiones: **a** varia al mismo tiempo que **b** y **c**. O también, en $z = \frac{kx}{y}$ significa que **z** varia directamente con **x** e inversamente con **y**, o también en $w = \frac{kxy^3}{z^2}$, significa que **w** varia directamente con **x** y $\mathbf{y^3}$ e inversamente con $\mathbf{z^2}$.
Regresando a la segunda característica, puede decirse que la variación proporcional directa, también puede estar representada por tres términos en la cual uno de sus términos es la incógnita. Por ejemplo, en la segunda Ley del Movimiento de Newton; **F** = **ma**, donde **F** es la fuerza, **m** la masa del cuerpo en movimiento y **a** la aceleración, se tiene que la fuerza **F** es directamente proporcional a la masa **m** y a la aceleración **a**.

Propiedades de la variación directamente proporcional.

1). La variación directamente proporcional es utilizada únicamente a problemas donde las variables que están involucradas aumentan o disminuyen simultáneamente.
2).Toda representación geográfica de la variación proporcional directa, es un gráfico representado por una recta (curva más simple) que pasa por el origen.

Entre otras, son cantidades directamente proporcionales, las siguientes:

1. El espacio y el tiempo.
2. El radio de una circunferencia y la longitud de la misma.
3. El alargamiento de un resorte y la fuerza que emplea(dentro de ciertos limites).
4. El número de obreros al trabajo que realizan, suponiendo a cada obrero el mismo rendimiento (dentro de ciertos limites).
5. El volumen de gas a la temperatura, si la presión es constante (dentro de ciertos limites).
6. La intensidad de una corriente al voltaje, si la resistencia es constante.
7. La distancia que recorre un tren y la velocidad que lleva o el tiempo durante el cual se desplaza.
8. La superficie de un campo y su longitud o su anchura.

♦Variación proporcional inversa.

En la búsqueda de una relación funcional entre variables, alguna veces nos percatamos de que al creer una de ellas como ya hemos mencionado, la otra disminuye y viceversa. Esto nos puede llevar a sugerir que la relación entre las variables involucradas sea del tipo $y = \frac{k}{x^n}$, con n > 0. Por tanto, primeramente se mostrarán dos definiciones que se consideran como fundamentales y posteriormente, estudiaremos primeramente como operar y determinar relaciones de tipo $y = \frac{k}{x}$, que se cumple para cuando n = 1, empezaremos con las de este tipo por dos razones: primera son las más simples de la familia, $y = \frac{k}{x^n}$, y segunda su aparición es frecuente en las ciencias naturales.
Definición 1. Dos cantidades son inversamente proporcionales, cuando haciendo una de ellas cierto número de veces mayor o menor , la otra resulta el mismo número de veces menor o mayor.
Definición 2. Dadas dos cantidades, pueden ocurrir que a todo aumento de una corresponda una disminución de la otra, entonces se dice que las dos cantidades son inversamente proporcionales entre si.

Características de la variación proporcional inversa.

1). La razón de dos valores cualesquiera de la primera cantidad es igual a la razón inversa de los valores correspondientes a la segunda .
2). Cuando una cantidad varía inversamente proporcional con otra, entonces se da que la primera es igual al producto de una constante por el reciproco de la segunda.
3). En los problemas en los que intervienen cantidades inversamente proporcionales, no pueden resolverse por una proporción, ya que los términos intermedios son iguales y esto reduce la relación proporcional a solo tres términos, en la cual uno de ellos es constante y los otros dos varían según la definición.

Propiedades de la variación proporcional inversa.

1). Su definición geométrica únicamente puede ser representada por el modelo matemático de la hipérbola equilátera ($\mathbf{xy = k^2}$), ya que cuando una cantidad aumenta la otra disminuye de modo proporcional (este proceso de variación evidentemente está controlado por la constante de proporcionalidad **k**) y viceversa.
2). Únicamente se redefine dentro de la proporcionalidad continua.
3). La variación proporcional inversa, es un tipo de proporcionalidad continua.

Con la anterior información teórica, estamos ya en posibilidades de poder describir el desarrollo de la investigación. En este trabajo lo que se ha hecho y se sigue haciendo, es usar tópicos de la teoría de la aritmética, en particular la teoría de la variación proporcional para los que aprenden, puedan apropiarse completamente de una herramienta didáctica que les sirva comprender, resolver y analizar, el proceso de solución de desigualdades e inecuaciones en el primer semestre escolar de una carrera de ingeniería en su curso de cálculo diferencial, y en lo particular, en el tópico de inecuaciones y desigualdades. Hemos observado que cuando los estudiantes se enfrentan con este tema de estudio en matemáticas, tienen la incertidumbre de no saber con seguridad que hacer, como hacerlo, que resultados esperan y cual sería la interpretación de esté, cuando se enfrentan ante un problema de cálculo del conjunto solución para una desigualdad o inecuación. Por tanto, de la investigación realizada, nosotros estamos seguros que utilizando la teoría de la variación proporcional, el alumno adquirirá la destreza de conocer el tipo de variación que experimenta una desigualdad que se tenga como problema, además de poder pronosticar el número puntos críticos que se generarán al resolver dichos problemas.

Finalmente, lo que estamos utilizando de la teoría de la variación proporcional de la aritmética de los números; es el concepto de variación proporcional directa e inversa para definir de inicio, el número de puntos críticos que tiene una inecuación o una desigualdad.

Criterios de solución: todas aquellas desigualdades que no contienen como denominador al número desconocido **x** en ellas, p.ej., $(x^2 - 9)/(x - 3) > (3 - x)$ donde el inverso $1/(x - 3)$ converge a un cociente entero, tendrán una variación proporcional directa, i.e., que la variación de su movimiento sobre la recta numérica es únicamente en una o dos direcciones contrarias con movimiento uniformemente acelerado hacia + ∞, hacia - ∞ o hacia + ∞ y - ∞ al mismo tiempo.

Ejemplo recreativo. Determinar el conjunto solución (CS) que satisfaga a la siguiente desigualdad definida por

$$(x^2 - 9)/(x - 3) > (3 - x)$$

utilizando la teoría de la variación proporcional y atendiendo a

i) Definir el tipo de variación proporcional que tiene la desigualdad,
ii) ¿cuántos puntos críticos tiene la misma?
iii) ¿qué tipo de movimiento tiene la variación con la que trabaja la desigualdad?
iv) Construir la definición geométrica del CS.

Solución. Escribimos la desigualdad

$$(x^2 - 9)/(x - 3) > (3 - x) \qquad (1)$$

(i) Por la construcción de la desigualdad se puede observar muy fácilmente que esta tiene una variación proporcional directa.
(ii) Por consiguiente, sólo tendrá un punto crítico.

$$(x + 3)(x - 3)/(x - 3) > (3 - x)$$

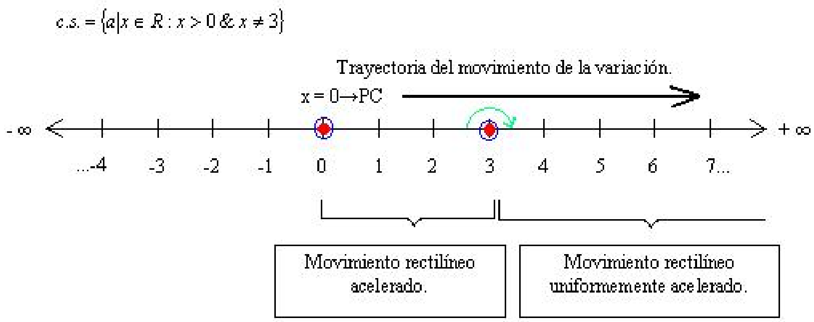
de donde

$$x + 3 > 3 - x \; ; \; \forall \; x \neq 3$$

por consiguiente
$2x > 0 \Rightarrow x > 0$: CS = $\{x \mid x \in \Re \; ; \; \forall \; x > 0 \;\&\; x \neq 3\}$.

(iii) Este ejercicio como ya sabemos tiene variación proporcional directa, de donde se desprendería que tiene un movimiento uniformemente acelerado, sin embargo, como tiene la restricción de que $x \neq 3$, entonces para el intervalo (0,3) el movimiento para la variación será movimiento rectilíneo con una maximización de la variación en las cercanías 3, y dado que el primer lado de la desigualdad tiene una discontinuidad evitable, entonces se puede concluir que después de saltar abruptamente la posición del número 3, el movimiento se vuelve uniformemente acelerado.

iv) Construcción geométrica del CS.



Por otra parte, si el número desconocido **x** en la desigualdad esté definido como denominador, p.ej., (4/x + 5/9 > 1/x +1) y no exista una operación aritmética válida que redefina al lado que corresponda de la desigualdad en entero, p.ej., (x^2 –9)/(x-3) >(3-x); entonces estaremos frente una evidente variación proporcional inversa, i.e., que estas van a tener dos puntos críticos ya que poseen dos movimientos diferentes de variación al mismo tiempo. Por consiguiente, generarán dos tipos de variación proporcional directa sobre la misma recta numérica, lo que se quiere expresar aquí, es que existirán variaciones (movimientos) para cuando ***x→+∞ & x→ -∞***. De todo esto se desprende que:

1) Si x→-∞ & x→+∞ al mismo tiempo, entonces la variación tendrá un movimiento uniformemente acelerado.

2) Si x→a o b : a & b $\in \Re^1$, entonces la variación tendrá un movimiento rectilíneo con una maximización de la variación en los extremos a & b, sin que estos se vean afectados por la variación del movimiento.

3) Si la desigualdad que se tenga que resolver es definida sin error con variación proporcional inversa, entonces todo objeto llamado número que se encuentre en el segundo lado de la misma, tendrán que ser trasladados al primer lado de la misma, por regla.

El accionar de este movimiento de variación del número ***x***, respalda lo que afirma la inversa proporcional, asegura que cuando un número crece el otro disminuye y viceversa; estas ideas conceptuales que se desprenden de la teoría de variación proporcional son las que estamos incorporando en la solución de desigualdades para darle una mejor construcción didáctica a una metodología existente para la solución de desigualdades en la cual, la propuesta existente no permite que el estudiante visualice matemáticamente lo que espera encontrar y mucho menos que tenga la capacidad de poder usarla en el desarrollo y ejercicio profesional de su carrera.

$\Re^1 \rightarrow$ Conjunto de los números reales.

Ejemplo recreativo. Determine el conjunto solución (CS) que satisfaga a la desigualdad definida por

$$(4/x+5/9) > (1/x + 1),$$

utilizando la teoría de la variación proporcional directa e inversa.

- i) ¿Qué tipo de variación proporcional soporta la desigualdad?
- ii) ¿Cuántos puntos críticos tiene la misma?
- iii) ¿Qué tipo de movimiento tiene la variación con la que trabaja la desigualdad?
- iv) Construir la definición geométrica del CS.

Solución.

- i) Primeramente definamos con que tipo de variación se comporta nuestro problema, podemos observar que tiene una variación inversamente proporcional.
- ii) por consiguiente, tendrá dos puntos críticos.

Ahora, escribamos la desigualdad de nuestro ejemplo

$$(4/x + 5/9) > (1/x + 1) \qquad (1)$$

de donde

$$4/x + 5/9 - 1/x - 1 > 0$$

o también

$$4/x - 1/x + 5/9 - 1 > 0$$

por tanto

$$3/x - 4/9 > 0$$

Finalmente

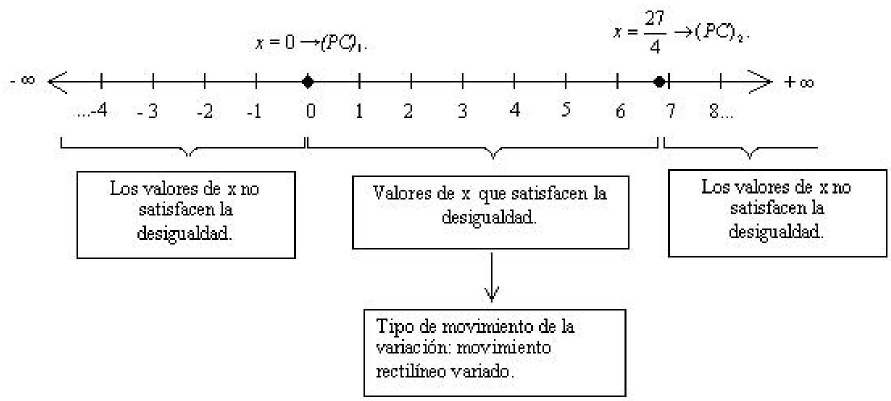
$$(27 - 4x)/9x > 0 \qquad (2)$$

Para obtener los dos puntos críticos, que definirán al conjunto solución, asignamos en (2) a x valores que aborten una indeterminación de la desigualdad y la convergencia de un valor de verdad para la misma pero absurda, de donde

1) Si $x=0 \Rightarrow (27 - 4x)/9x$, se indetermina, por lo que concluimos que $x=0$ es un punto crítico.
2) Si $x=27/4 \Rightarrow 0>0$, que es un valor de verdad pero absurdo, sin embargo, es el segundo ruido, por lo que de aquí, se desprende que $x=27/4$ es el otro punto crítico.

- iii) La variación tiene un movimiento rectilíneo, ocurriendo una maximización de la variación en el interior del intervalo (0,27/4) pero en las proximidades de 0 y 27/4, sin que estos se vean afectados por la variación.

iv) A continuación se visualiza la construcción geométrica del CS.



COMENTARIOS FINALES

Este trabajo de investigación es parte de un proyecto que hemos llamado proyecto maestro y que está acotado como línea de investigación de la variación para el cálculo en una variable.

Se ha observado que cuando en el DME se cuidan los procesos didácticos, pedagógicos y académicos, el alumno transita con mayor seguridad en la acción de apropiación de los saberes, pero si además, estos saberes de las matemáticas tienen significados consistentes y perfectibles; entonces el que aprende se cubre figurativamente hablando de una luz académica que le asegura éxitos en diferentes salidas laterales en el ejercicio profesional de su carrera.

También hemos observado que el tema de desigualdades en el curso de Cálculo Diferencial ya no es tan odiado como hace poco lo era. Personalmente creemos que todavía a este proyecto se le puede obtener mayores provechos en la dirección de líneas de enseñanza, aprendizaje y el aporte de más información para el enriquecimiento del concepto en sí mismo.

Bibliografía

Ceballos, T.M. & Farfán, R.M. *El concepto de función y su relación con la proporción.* Memorias Relme, Puerto Rico, 1966.

Castañeda, de Isla, P. Eric. *Boletín matemáticas y cultura No 207.* Departamento de Matemáticas Básicas, Div. De Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería-UNAM.

Artigue, M. *Ingenierías Didácticas.* Ed. Iberoamericana, Bogotá, Colombia, 1995.

Farfán, R.M. *Ingenierías Didácticas.* Grupo Ed. Iberoamericana. México. 1997.

Farfán, R.M. & Albert. *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades.* México,1997.