USO DE LA MICROCOMPUTADORA EN LA VISUALIZACIÓN EN EL CÁLCULO INFINITESIMAL

Ismael Arcos Quezada (iarcos@fi.uaemex.mx)
Alejandro Osorio Jaramillo (aosorio@fi.uaemex.mx)
Facultad de Ingeniería, UAEMéx

RESUMEN

El concepto fundamental en el cálculo infinitesimal leibniziano era el diferencial y éste era concebido, en ese tiempo, como el cambio (infinitamente pequeño) del valor de una variable geométrica. Con esa nueva herramienta, una gran cantidad de problemas geométricos que no habían sido satisfactoriamente resueltos, o que lo habían sido para ciertos casos particulares, fueron exitosamente abordados y resueltos, de una manera general.

Por otra parte, para esa misma época había una concepción infinitesimalista de las curvas, identificándolas con poligonales con un número infinito de lados, cada uno de estos de longitud infinitamente pequeña.

Lo anterior dio lugar a una solución general, relativamente sencilla, de los dos problemas básicos del cálculo, desde una perspectiva geométrica, es decir, la recta tangente y el área bajo la curva. En efecto, la recta tangente resultará ser, desde esta perspectiva, la recta que pasa por dos puntos de la curva, infinitamente próximos entre si, y el área bajo la curva será la suma de las áreas de los trapecios situados bajo la poligonal.

En este trabajo se muestran algunas animaciones en computadora que ilustran algunas situaciones de carácter geométrico, relacionados con curvas en el plano, haciendo acercamientos sucesivos para simular lo que ocurre en una escala infinitesimal.

Leibniz: curvas y poligonales

Para el siglo XVII ya había una concepción infinitesimalista de las curvas, identificándolas con poligonales con un número infinito de lados, cada uno de ellos de longitud infinitamente pequeña. Así, en el prólogo de su *Análisis*, L'Hôpital decía que «las poligonales inscritas o circunscritas a las curvas, que por la multiplicación infinita de sus lados se confunden finalmente con ellas, han sido siempre tomadas como las curvas mismas».

Esta manera de ver las curvas permitía dar una definición sencilla de la recta tangente. Por ejemplo, Leibniz, en su "nuevo método de máximos y mínimos...", decía:

> Encontrar la *tangente*, es trazar una recta que une dos puntos de la curva, separados una distancia infinitamente pequeña, o bien, prolongar el lado de un polígono de un número infinito de ángulos, lo que para nosotros es equivalente a una *curva*... ([1], p. 7)

De acuerdo con esta idea el trazo de la tangente a una curva dada, en uno de sus puntos, ciertamente resulta sencillo, como lo expone L'Hôpital en la segunda sección de su *Análisis*, en la que sólo da la siguiente definición:

> Si se prolonga uno de los pequeños lados *Mm* de la poligonal [fig. 1] que compone a una línea curva [§3], este pequeño lado, así prolongado, será llamado la tangente de la curva en el punto *M* o *m*. ([2], p. 41)

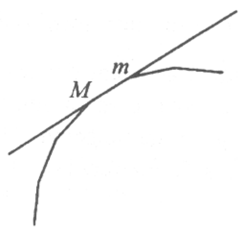

Fig. 1

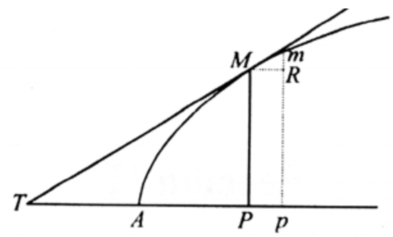

Fig. 2

El resto de la sección se dedica, íntegramente, al problema de la recta tangente en diversas situaciones. En la primera proposición se plantea el siguiente problema:

> §9. Sea AM una línea curva [fig. 2] tal que la relación de la abscisa AP con la ordenada PM esté expresada por una ecuación cualquiera; se requiere trazar la tangente MT por el punto M dado sobre esta curva.

El cual se resuelve como sigue:

> Habiendo trazado la ordenada MP, y suponiendo que la recta MT que intersecta al diámetro en el punto T sea la tangente buscada, se concebirá otra ordenada mp infinitamente cercana a la primera, con una pequeña recta MR paralela a AP. Y al denominar a AP, x y a PM, y, que están dadas (luego, Pp = MR = dx y Rm = dy), los triángulos semejantes mRM y MPT darán
>
> $$\frac{mR}{RM} = \frac{MP}{PT} \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{PT}$$
>
> Esto es, $PT = \dfrac{y\,dx}{dy}$. Luego, por medio de la diferencia de la ecuación dada, se encontrará un valor de dx en términos que estarán afectados todos por dy, el cual al ser multiplicado por y y dividido entre dy dará un valor de la subtangente PT, en términos completamente conocidos y libres de diferencias, el cual servirá para trazar la tangente buscada MT. ([2], p. 42)

Así pues, esta visión infinitesimalista de las curvas da lugar a una simplificación de los conceptos geométricos involucrados, en particular, el de la recta tangente.

Por otra parte, la longitud de la curva será la del polígono con infinito número de lados, cada uno de ellos de longitud infinitesimal. Esto implica, entre otras cosas, que la longitud de la curva puede ser aproximada por medio de la longitud de una poligonal, a condición de que dicha poligonal contenga un número de lados suficientemente grande.

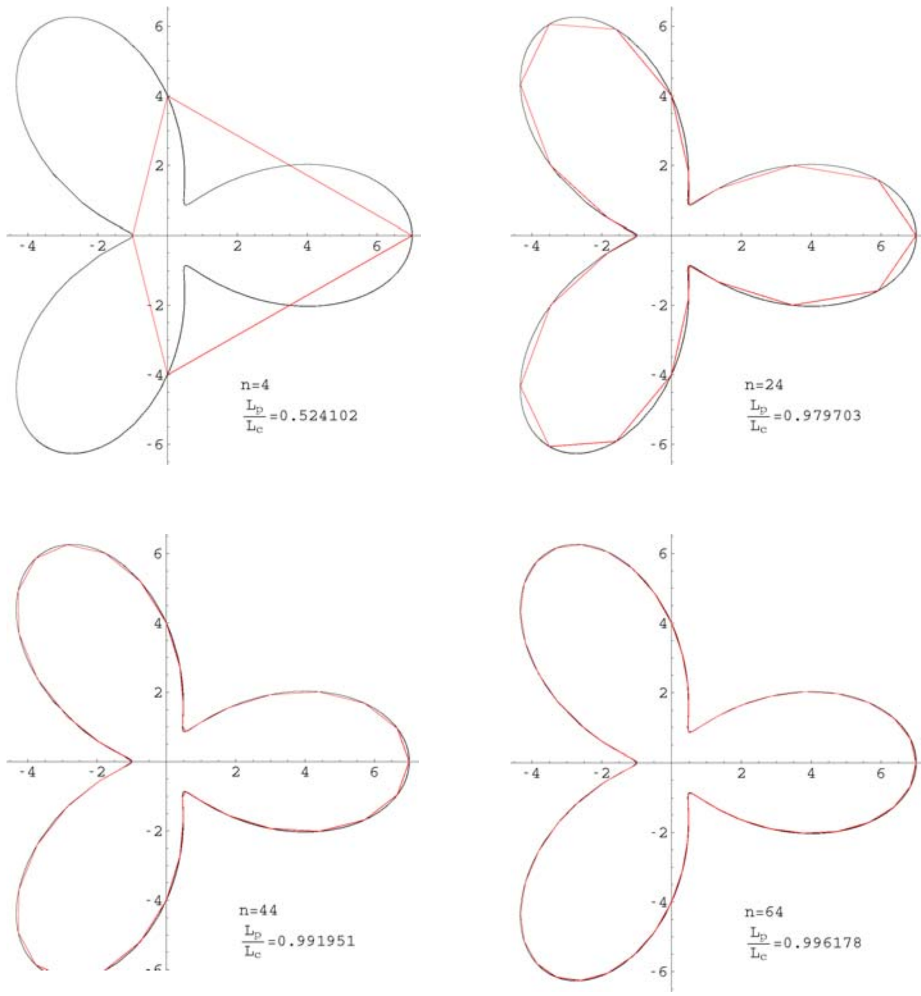

Fig. 3 Curvas y poligonales

Así pues, una forma de visualizar lo anteriormente dicho consiste en trazar una curva cualquiera, preferentemente una cuya ecuación esté dada en forma paramétrica, de manera que, dividiendo el intervalo recorrido por el parámetro en *n* partes iguales (obteniéndose así *n* + 1 puntos, o *n*, si la curva es cerrada), pueda construirse la poligonal correspondiente.

La visualización puede resultar más efectiva si se hace un efecto de animación, al presentar la curva y la poligonal para valores crecientes de *n*. En la figura 3 se muestran cuatro de los "momentos" de dicha animación, para el caso de la curva definida mediante $x = r\cos t$, $y = r\,\mathrm{sen}\,t$, con $r = 4 + 3\cos(3t)$, y $t \in [0, 2\pi]$.

Los momentos mostrados corresponden, respectivamente, a $n = 4$, $n = 24$, $n = 44$ y $n = 64$. Puede verse que para desde $n = 44$ la poligonal ya se confunde con la curva misma. Además, para cada valor de *n* se calcula la longitud de la poligonal y se compara con la de la curva misma, indicándose el valor de la razón L_P / L_C, cuyo valor tiende a 1 conforme crece el valor de *n*. En el caso mostrado, para $n = 24$ ya se tiene una cifra decimal correcta y para $n = 64$ ya se tienen dos cifras.

El principio de las primeras y últimas razones de Newton

Este concepto es un claro antecedente del concepto de límite, sin embargo, y a pesar de que Newton parece indicar que en su cálculo no están presentes las cantidades infinitesimales, no se desprende absolutamente de ellas.

La proposición básica, en la que se basa el principio, es el lema primero de la sección primera del libro primero de *Los Principios* [3]: "El Movimiento de los Cuerpos", en el cual, Newton indica:

> Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales.
> Si lo niegas, supón que son en última instancia desiguales, siendo D su diferencia última. Así pues, no pueden acercarse más a la igualdad que por su diferencia dada, D, cosa contraria a la hipótesis.

Un poco más adelante, en el lema VI, dice (ver figura 4):

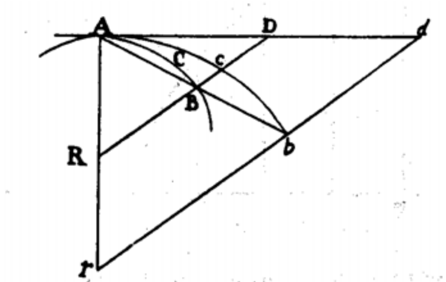

Fig. 4

Si cualquier arco ACB*, en una posición dada, es subtendido por su cuerda* AB*, y en cualquier punto* A *situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta* AD *prolongada en ambos sentidos, si los puntos* A *y B se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el ángulo* BAD *contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito, desapareciendo en última instancia.*

> Porque si ese ángulo no desapareciese, el arco ACB contendría con la tangente AD un ángulo igual a un ángulo rectilíneo y, por lo tanto, la curvatura en el punto A no será continua, cosa contraria a la hipótesis.

Finalmente, en el lema VII, indica:

> *Suponiendo las mismas cosas, afirmo que la última razón del arco, la cuerda y la tangente entre sí es la razón de igualdad.*

Así pues, Newton afirma que en la razón última, el arco, la cuerda y la tangente se funden en un solo segmento. Esto permite afirmar, como ocurre con la concepción leibniziana de las curvas, que si se eligen los puntos de una curva cualquiera, suficientemente próximos entre sí, entonces el arco comprendido entre estos, puede ser reemplazado por la cuerda, o por la tangente (y viceversa) en cualquiera de los puntos, argumento que resultará ser un recurso básico entre los matemáticos del siglo XVIII.

Otro aspecto muy importante, que puede observarse, en los lemas antes reproducidos, es que la recta tangente no se define; los tres elementos citados: cuerda, arco y tangente, son conocidos y ubicados en la figura, independientemente de la posición límite. Lo que ocurre “al último” es que los tres se funden en uno solo, por lo que pueden ser usados, cada uno de ellos, en lugar de cualquier otro[1].

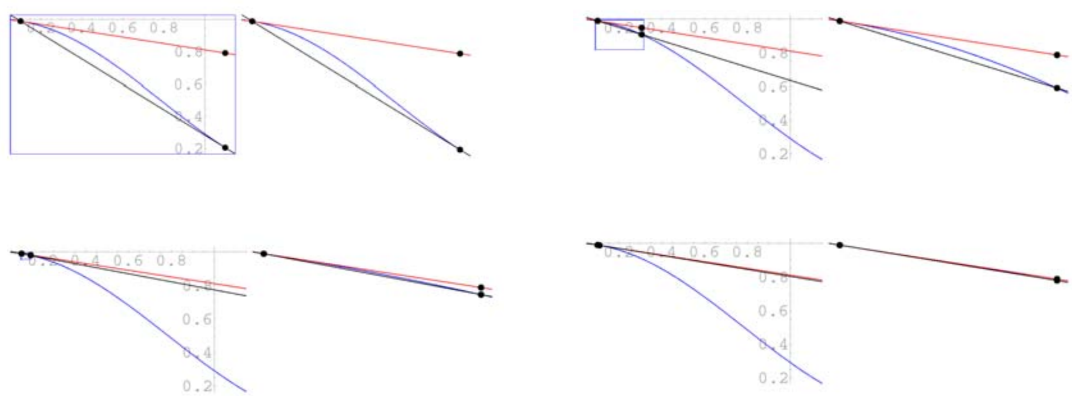

Figura 5. El arco, la cuerda y la tangente se confunden

Así pues, si se mantiene fijo un punto de una curva y un segundo punto, que también está sobre la curva, se coloca cada vez más cerca del primero, la cuerda, el arco y la tangente se irán confundiendo entre sí.[2]

En la figura 5 se muestran cuatro momentos de una segunda animación, en la que, dada una curva ($y = \cos(x^2)$ en el caso mostrado), se elige uno de sus puntos (el correspondiente a $x = 0.1$, en la figura). En seguida se hacen “acercamientos” de la zona próxima (a un mismo lado del punto, en la figura mostrada, a la derecha) al punto elegido, de manera que la “ventana” cortará a la curva —y a la tangente también— en un segundo punto.

Para cada acercamiento se muestra la “ventana”, como un rectángulo, y las porciones de la curva, la secante y la tangente, determinadas por dicha ventana. En el último de los momentos mostrados en la figura se observan dos cosas, la primera que los puntos (fijo y móvil) terminan confundiéndose en uno solo, y la segunda, que es la que confirma el principio de Newton, que la cuerda, la curva y la tangente “terminan” confundiéndose entre sí.

Las animaciones mostradas, lo mismo que algunas otras figuras (generalmente obtenidas mediante computadora) permiten presentar visualmente algunos resultados de la geometría infinitesimalista, y esto permite, a su vez, introducir al

[1] En cambio, actualmente, en los libros de texto, la tangente siempre surge como una posición límite de la secante y no como un elemento independiente, conocido previamente.

[2] La cuerda y el arco de la curva están claramente limitados, por el punto fijo hacia un lado, y por el móvil por el otro. Al hablar de la tangente deberá entenderse como un segmento de esta recta, en la proximidad del punto fijo, tal como se muestra en la figura.

estudiante en los conceptos del cálculo, y de sus aplicaciones, desde las primeras semanas del curso, y no al final del mismo, como suele ocurrir con la presentación tradicional.

En otro trabajo que se presenta en este mismo Foro [4] se muestran algunas otras de las ventajas que presenta el acercamiento infinitesimalista en la enseñanza del cálculo en escuelas de ingeniería.

REFERENCIAS

[1] Leibniz, W. G., “Nouvelle method pour les maxima et les minima,…”, contenido en Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal, versión en francés (Jean Peyroux, Blanchard, Paris, 1983) de las obras de Leibniz acerca del cálculo infinitesimal. El artículo original fue publicado en latín, en las actas de Leipzig, en 1684.

[2] L’Hôpital, Marqués de; *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, colección MATHEMA, UNAM, México, 1998. Versión en español del original en francés: *Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes*, de 1696. Traducción e introducción de Rodrigo Cambray.

[3] Newton, I., *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, Altaya, Barcelona, 1993, p. 61. Esta edición española se basó en la tercera edición en latín (1726) y la primera versión inglesa (1729), actualizada por F. Cajori (1934). Las notas y el estudio preliminar son de Antonio Escohotado y la truducción de Antonio Escohotado y M. Sáenz de Heredia.