LA UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA GRAFICADORA SIMBÓLICA Y PROGRAMABLE (TI-92 PLUS) EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, EL CASO DEL PROBLEMA DE LA CAJA SIN TAPA, UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN.

M.C MAXIMILIANO DE LAS FUENTES LARA
M.C CARLOS VALDEZ GONZÁLEZ
ING. OLGA GONZALES ZAVALA
FACULTAD DE INGENIERIA (UNIDAD MEXICALI)
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Resumen

Apoyados en la teoría de la escuela francesa sobre las representaciones (Duval y otros) se diseñó una estrategia didáctica de acercamiento a conceptos matemáticos del cálculo diferencial, como lo son: función, dominio, rango, límite, derivada, entre otros. So pretexto la resolución de problemas de optimización. Dicho acercamiento se logra mediante el apoyo de la calculadora graficadora, simbólica y programable, en particular el uso de la programación, la que de manera simultánea y a conveniencia permite visualizar y conectar distintas representaciones, a saber: gráfica, icónica, numérica y algebraica. Esta estrategia didáctica de acercamiento también se justifica en virtud de las serias dificultades que tienen los estudiantes para enfrentar y resolver por si solos situaciones problemáticas, la deficiencia para asociar los conceptos con su funcionalidad en diferentes contextos y la aplicación correspondiente de los conceptos matemáticos a los problemas de ingeniería.

Introducción

Tradicionalmente, la función del profesor de matemáticas, en todos los niveles de la enseñanza, ha sido la de transmitir a los alumnos un cuerpo sistematizado de conocimientos, es decir, ha consistido en transmitir información. En nuestros días, y sobre todo a raíz de las reflexiones provocadas por el desarrollo social, el impacto de las nuevas tecnologías de la información, las reformas curriculares y las aportaciones de la Matemática Educativa a la comprensión de los procesos de aprendizaje de las matemáticas, se ha venido definiendo una nueva actividad o responsabilidad del profesor: la de diseñar la enseñanza. En parte, eso es lo que significa profesionalizar la labor docente. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que el diseño de la enseñanza es una actividad del profesor cualitativamente diferente de su actividad práctica. El diseño de la enseñanza es

una actividad teórica, y requiere de conocimientos más profundos del profesor no solamente en lo que concierne a la asignatura, sino también en lo relativo al proceso docente, al aprendizaje y a los estudiantes. Es un proceso creativo que exige no solamente profundos conocimientos psicológicos y pedagógicos, sino también del pensamiento lógico y en buena medida de la intuición.

La ubicación temática que describe el título de este trabajo no es de ninguna manera desconocida para los profesores de matemáticas, pues la mayoría de los docentes que impartimos cursos de matemáticas I en las distintas Instituciones Educativas de Nivel Superior abordamos tal temática, en mayor o menor grado de profundidad, con alguna u otra estrategia didáctica, utilizando recursos tecnológicos o no, de cualquier forma los docentes esperamos que los estudiantes realicen conexiones de manera mas o menos adecuada entre los conceptos matemáticos y los algoritmos asociados a los mismos para la obtención de los resultados finales.

La aplicación de las herramientas matemáticas en la resolución de problemas físicos, químicos, de la ciencia o ingeniería en general, en particular las del cálculo diferencial, es uno de los objetivos que se pretende logren los estudiantes en los cursos de matemáticas I (cálculo diferencial), sin despreciar de ninguna forma las competencias en los distintos contextos privilegiados por la matemática, a saber: Geométrico, numérico, algebraico y verbal, las que también forman parte importante sin lugar a duda de la formación del pensamiento matemático de nuestros estudiantes.

Para los docentes no cuesta trabajo percibir que la solución sintética de los problemas de optimización de los cursos de matemáticas I se reduce a resolver la ecuación $f'(x) = 0$, con el planteamiento previo de la función $f(x)$. Sin embargo tal percepción no es fortuita, la comprensión auténtica no creemos pueda restringirse solamente al desarrollo de procedimientos algebraicos y demostraciones formales en este sistema de representación.

Por otra parte la presencia y disponibilidad real de recursos tecnológicos, en particular computadoras o calculadoras, es evidente, y abstraerse de su uso e incluso de su existencia misma, nos parece preocupante, en educación, los usos que se le den a las calculadoras o computadoras son diversos y dependen directamente de los objetivos planteados.

En particular la calculadora graficadora simbólica y programable (la cual verdaderamente es una microcomputadora, dotada con casi todos los adelantos de la tecnología del campo: mayor capacidad de memoria, interactividad con la computadora, manipulación simbólica, menú icónico, entre otras, con alcances sustantivos y limitaciones por supuesto) es objeto de un verdadero examen de reflexión, la capacidad expresiva es potente en relación con la estrategia didáctica que se diseñe para la apropiación y/o desarrollo de competencias, debe aclararse que su uso en la educación no tiene por objeto reducir operaciones o simplificar

procedimientos algebraicos o numéricos, mas bien se trata de un mediador cuyo fin es entre otros la de auxiliar al estudiante en la observación de los efectos de la variación de parámetros, el estudio y análisis de fenómenos de tipo geométrico o numérico, en general la exploración y el descubrimiento de ciertas regularidades mediante la construcción de situaciones hipotéticas a partir de estrategias didácticas previamente diseñadas.

Estrategia didáctica

A continuación, con apoyo de la calculadora graficadora simbólica y programable, en particular utilizando la programación, se intenta mostrar una idea que creemos permite conectar diferentes representaciones, hemos aprovechado para tal caso un problema típico de optimización, el conocido problema de la caja sin tapa. Dicho problema se describe en la figura 1. Mientras que la figura 2 presenta el menú de opciones del programa, nos hemos asegurado de incurrir a propósito en ese menú con la entrada de datos que correspondería únicamente al volumen propuesto de la caja, un análisis de propuestas que incorpora de manera simultánea tres distintas representaciones, y que posibilita la conexión de las mismas, (figuras 3, 4 y 5). Es factible abordar el análisis gráfico el cual se despliega con la opción f4 (figuras 6, 7 y 8). La última parte del programa de refiere a la emisión de los resultados en donde consideramos los modelos algebraicos (figuras 9 y 10). Al final del documento se presenta el programa correspondiente al problema de la caja sin tapa con volumen definido para calcular área o cantidad de material mínimo.

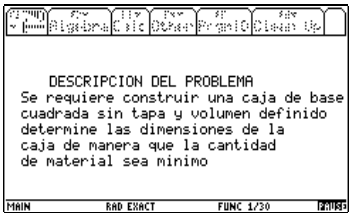

Figura 1

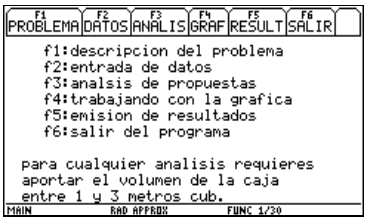

Figura 2

Análisis de propuestas:
En este apartado del programa tenemos la posibilidad con el apoyo del recurso tecnológico de abordar distintas propuestas virtuales, esto se traduce en la promoción de sentido de las distintas representaciones bajo cierto contexto físico, los inicios de la fabricación de un gráfico continuo a través de un gráfico discreto, la descripción, el tratamiento y la conversión de cada representación, así como el principio del análisis gráfico de la función.

En este mismo sentido podemos asociar, conectar y transitar en las distintas representaciones, digamos de la icónica a la numérica y de esta última a la gráfica, en general realizar conversiones de un registro a otro. En todos los casos tales registros contemplan un sentido práctico, es decir están ligados a un contexto físico.

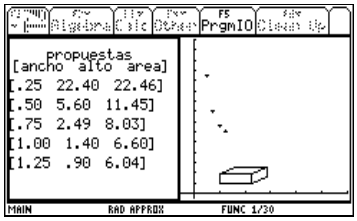

Figura 3

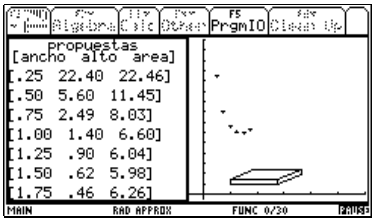

Figura 4

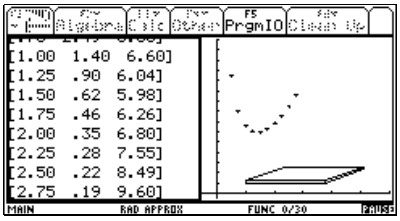

Figura 5

Trabajo con la gráfica:
En este rubro del programa tenemos la posibilidad de realizar distintas asociaciones, como el valor y el signo de las pendientes de las rectas tangentes y plasmarlo en el mismo sistema de coordenadas, posibilitando la fabricación de la idea de derivada como una función. Recordemos que tales gráficos corresponden a un problema físico, esto es, tienen sentido para el estudiante.

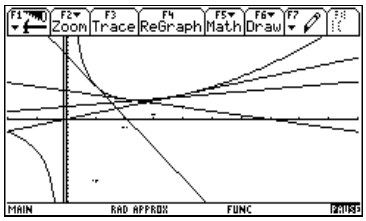

Figura 6

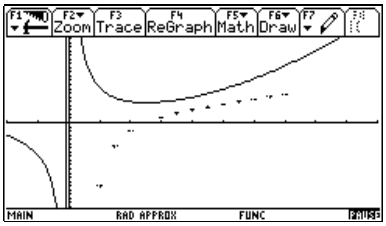

Figura 7

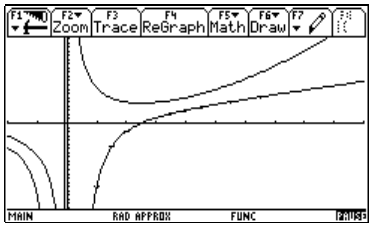

Figura 8

Esta actividad se refuerza mediante la colocación de los puntos (derivadas puntuales) asociando por ejemplo los signos de la derivada con la condición creciente o decreciente de la función de origen, además de considerar la posibilidad de construir la derivada en un contexto geométrico a partir del trazo imaginario o virtual de rectas tangentes, es decir, hay intentos de incorporar el pensamiento visual a través de este análisis, así como de identificar o vincular la raíz de la gráfica de la derivada como el correspondiente punto crítico, en nuestro caso un mínimo local.

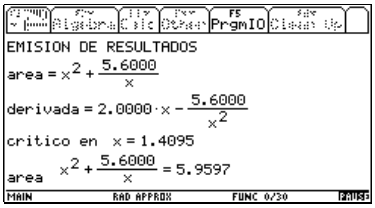

Figura 9

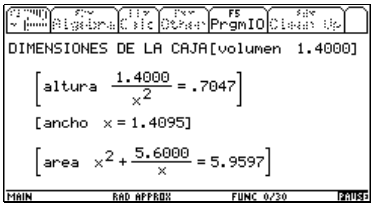

Figura 10

Emisión de resultados
En algunas ocasiones dependiendo de las estrategias diseñadas se puede incorporar el trabajo con cálculo de regresiones polinomiales o de otro estilo. Nos parece que el tratamiento en el campo algebraico después de realizar una tarea

descriptiva en cada representación, así como conexiones, análisis e interpretaciones con los registros anteriores, evita ejecutar desarrollos algebraicos sin comprender, ver figura 9 y 10.

Observaciones

La idea presentada se sustenta en la importancia que tienen las actividades cognitivas (formación, tratamiento y conversión) que marca Duval para el logro de la coordinación de los registros de representación en el proceso de la aprehensión conceptual de objetos matemáticos en juego.

La verdad es que es común pensar en alguna representación como el objeto matemático mismo, sin embargo como apunta Duval al respecto, *...los objetos matemáticos jamás deben ser confundidos con su representación, en efecto, toda confusión desencadena, a mediano o a largo plazo, una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos llegan a ser pronto inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje...* Entendemos con lo anteriormente citado, por una parte, que desarrollar únicamente actividades cognitivas en un solo sistema de representación y no practicar la conversión de registros puede generar la confusión a la que hacemos alusión en la cita, y por otra limitar de cierta forma la apropiación conceptual misma, eliminando la posibilidad de utilizar tal objeto matemático en otros contextos, esto reduce sobremanera la funcionalidad de los conceptos, acotando su uso específicamente al contexto en el que fue asimilado.

En este sentido hacemos énfasis en la promoción de visualizar, analizar y vincular o conectar las diferentes representaciones (icónica, gráfica, numérica, algebraica), éstas acciones y/o habilidades pueden impulsarse mediante el diseño de estrategias didácticas fundamentadas teóricamente, en las que se incorpore tecnología de avanzada como lo es la calculadora graficadora simbólica y programable. Puede notarse la capacidad expresiva y las bondades de la calculadora con relación a su utilización en la enseñanza de las matemáticas, sin embargo es sustancialmente importante las “buenas preguntas” que el profesor incorpore en la dinámica de la estrategia didáctica diseñada, éstas dependerán de los objetivos que se persiguen.

El mayor peligro en el diseño de la enseñanza mediada por la calculadora simbólica consiste en transferir mecánicamente las particularidades de la enseñanza tradicional, no tecnologizada, a la enseñanza mediada por un nuevo recurso. Es necesario tener en cuenta que la calculadora simbólica no solamente plantea determinadas restricciones al proceso docente, sino que a la vez abre nuevas posibilidades para conducir la actividad de aprendizaje, a cuenta de sus capacidades funcionales. Sin embargo, las posibilidades funcionales de las calculadoras simbólicas deben ser analizadas en términos de la psicología del aprendizaje y utilizarse siempre desde el punto de vista de la conducción de la actividad de aprendizaje.

Si tradicionalmente nos hemos percatado de que la mayoría de los alumnos resuelven los problemas que les planteamos por imitación, por mecanización inconsciente de los algoritmos, ¿qué tan válido es que continuemos fomentando estas actitudes, hoy que se requieren nuevas destrezas y que los estudiantes pueden contar con un instrumento que fácilmente se constituye en una valiosa herramienta de exploración?.

Es evidente que la incorporación de tecnología de avanzada contrae modificaciones en los esquemas educativos, el protagonismo del profesor se transforma en un verdadero y auténtico protagonismo de los estudiantes.

Programa de la caja sin tapa

```
: cajaopt( )
:Prgm
:FnOff  :ClrGraph:ClrHome:ClrDraw
:DelVar vol,rara.rare,rari,papata,fin,web
:Output 20, 25, "EL PROBLEMA DE LA CAJA SIN
TAPA"
:Output 30 ,35,   "UN PROBLEMA DE
OPTIMIZACION"
:Pause: ClrIO
:Lbl papata
:Output    0, 25,  "f1:descripción del problema"
:Output  10, 25,  "f2: entrada de datos"
:Output  20, 25,  "f3:análisis de propuestas"
:Output  30, 25,  "f4:trabajando con la grafica"
:Output  40, 25,  "f5:emision de resultados"
:Output  50, 25,  "f6:salir del programa"
:Output  70, 10,  "para cualquier analisis requieres"
:Output  80, 10,  "aportar el volumen de la caja"
:Output  90, 10,  "entre 1 y 3 metros cub."
:Toolbar
:Title  "PROBLEMA",rar:Title  "DATOS", rara
:Title  "ANALIS", rare:Title  "GRAF", rari
:Title  "RESULT",raruco:Title  "SALIR", fin
:EndTBar
:Lbl rar:ClrIO
:Output  20, 30, "DESCRIPCION DEL
PROBLEMA"
:Output  30, 10,  "Se requiere construir una caja de
base"
:Output  40, 10,  "cuadrada sin tapa y volumen
definido"
:Output  50, 10,  "determine las dimensiones de la"
:Output  60, 10,  "caja de manera que la cantidad"
:Output  70, 10,  "de material sea minimo"

:Line  1+s+1/2*s,1/2*s+1,1+s+1/2*s,1/2*s+h(s)+1,0
:Line
1+1/2*s,1+1/2*s+h(s),1+s+1/2*s,1+1/2*s+h(s),0
:Pause : ClrIO:Goto papata
:Lbt rara:Request "valor del volumen", vol
:expr(vol) → vol:Goto papata
:Lbl rare
:Define a(x)=4/x*vol+x^2:Define b(x)=d(a(x),x)
:setMode ("Graph","FUNCTION")
:setMode ({"split screen", "left-right"})
:setMode ({"split 1 app", "home"})
:setMode ({"split 2 app", "graph"})
:setMode ("exact/approx", "approximate")
:setMode ("display digits", "fix 2")
:ZoomStd: -.5→xmin:6→xmax
:-.5→ymin:15→ymax:Output 1, 25, "propuestas"
:Output 8, 3, [[ancho,alto,area]]:Pause
:For s, .25, 3.5, .25:vol/s^2→h(x)
:Line  1,1,1+s,1:Line  1,1,1,h(s)+1
:Line  s+1,1,s+1,h(s)+1
:Line  1,h(s)+1,s+1,h(s)+1
:Line  s+1,1,1+s+1/2*s,1+1/2*s
:Line  s+1,1+h(s),1+s+1/2*s,1+1/2*s+h(s)
:Line  1,h(s)+1,1+1/2*s,1+1/2*s+h(s)
:Line  1+s+1/2*s,1/2*s+1,1+s+1/2*s,1/2*s+h(s)+1
:Line
1+1/2*s,1+1/2*s+h(s),1+s+1/2*s,1+1/2*s+h(s)
:PtOn  s,a(s):PtOn  s+.05, a(s) :PtOn  s-.05, a(s)
:PtOn  s,a(s)+ .08 :PtOn  s,a(s) -.08
:Disp [ [s,h(s),a(s) ] ]:Pause
:Line  1,1,1+s,1,0:Line  1,1,1,h(s)+1,0
:Line  s+1,1,s+1,h(s)+1,0
:Line  1,h(s)+1,s+1,h(s)+1,0
:Line  s+1,1,1+s+1/2*s,1+1/2*s,0
:Line  s+1,1+h(s),1+s+1/2*s,1+1/2*s+h(s),0
:Line  1,1+h(s),1+1/2*s,1+1/2*s+h(s),0

:PtOn web,b(web)-.1:EndFor:Pause :Graph  b(x)
:Pause:Clrgraph: ClrIO:Goto papata
:Lbl raruco:ClrIO
```

```
:EndFor:Pause:DrawFunc  a(x)
:Pause   :ClrIO:setMode ({"split screen","full"})
:Goto papata:Lbl rari:ClrGraph :ClrIO
:setMode ({"split screen", "full"})
:Output  20,10, "trazo de la grafica de la funcion"
:Output  30,10, "ancho contra cantidad de material"
:Output  40,10, "trazo de rectas tangentes y grafico"
:Output  50,10, "de los valores correspondientes"
:Pause  :ClrIO:ZoomStd
:-1→xmin:5→xmax:.5→xscl
:-20→ymin:20ymax:Graph  a(x):For web, .5, 3, .5
:DrawSlp web, a(web), b(web):PtOn web, b(web)
:PtOn web+.03,b(web) :PtOn web-.03,b(web)
:PtOn web,b(web)+.1 :PtOn web,b(web)-.1
Pause:EndFor:Pause:ClrGraph
:Output  20,20,  "trazo de la grafica de la funcion"
:Output  30,20, "y su derivada" :Pause
:Graph  a(x):For web, .5,3.5,.25
:PtOn  web,b(web):PtOn  web+.03,b(web)
:PtOn  web-.03,b(web):PtOn  web,b(web)+.1
:Setmode("exact/approx", "approximate" )
Setmode ("display digits", "fix 4 " )
:Disp "EMISION DE RESULTADOS"
:Disp area=a (x):Disp derivada=b(x)
:Disp "critico en"
:output 62,70,fMin(a(x),x) | x >0
:fMin(a(x),x) | x >0→lala
:Define lala= fMin(a(x),x) | x >0
:Define chaca=a(lala):Disp "":disp "area"
:output 75,35,chaca
:Pause :ClrIO:Vol/lala^2 →alt
:Output 1,1, "DIMENSIONES DE LA CAJA"
:Output 1, 136, [[ volumen, vol]]
:Output  20,20, [[altura,alt]]
:Output  50,20, [[ancho, lala]]
:Output  70, 20, [[ area, chaca]]
: Pause:ClrIO
:Goto papata:Lbl fin:ClrIO:DelVar  s,vol
:EndPrgm
```

Bibliografía

Duval Raymund-Registros de Representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.

Díaz Gómez José Luis-Introducción al uso de los recursos computacionales. Marzo 1995

De Las Fuentes Lara Maximiliano-Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos. El caso de las funciones lineales y cuadráticas. Tesis de Grado. Noviembre 1998.

TI-92-Manual del Usuario. Texas Instruments. 1995