INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE OBJETOS MATEMÁTICOS ASISTIDOS CON MAPLE 8.0 EN ÁLGEBRA LINEAL, EN LA FES CUAUTITLÁN

Autores:

Ing. Juan Contreras Espinosa

Ing. José Luz Hernández Castillo

Ing. Carlos Oropeza Legorreta.

Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán.

RESUMEN

En la Ingeniería, una de las ramas importantes de las matemáticas y sus aplicaciones, es la asignatura de Álgebra Lineal. Lo abstracto de esta materia ha promovido diversas reflexiones profundas en torno a la búsqueda de presentaciones diferentes del tema en cuestión.

Con el fin de clarificar la comprensión de los conceptos matemáticos que se abordan en la asignatura, en este trabajo se pretende hacer uso de las representaciones geométricas, producto de inquietudes que han sido sembradas en el salón de clase.

Estudiar Matemáticas o enseñar Matemáticas haciendo uso de las nuevas tecnologías y en particular el software conocido como Maple 8.0 ya no es algo extraño. Al contrario, en los últimos años, la difusión de esta nueva forma de trabajar ha alcanzado cotas insospechadas, y no sólo en nuestra Universidad, sino en muchas Instituciones educativas a nivel Internacional.

En general, la intención es resaltar la importancia de la conversión entre representaciones y la visualización matemática, con la finalidad de que los alumnos realicen, de manera natural, las conexiones necesarias entre representaciones gráficas para la solución de problemas.

Por tanto, habría que decir que este trabajo está dirigido a estudiantes y profesores que con toda seguridad lo pueden aplicar y enriquecer de manera ilimitada. Se sabe que el uso de Maple 8.0 no sólo es de la incumbencia de esta asignatura, sin embargo, la utilidad ha promovido una latente inquietud en el desarrollo de los temas que se involucran en los cursos de Álgebra Lineal y otros más.

INTRODUCCIÓN

Para que exista un Aprendizaje Significativo, se deben cumplir varios puntos, entre ellos los siguientes:

a) Que el material que se va a aprender tenga significado y no esté falto de coherencia.
b) Que entre el material de aprendizaje y los conocimientos previos de los alumnos exista una distancia óptima, para que ellos puedan encontrarle sentido.
c) Que exista disponibilidad, intención y esfuerzo por parte del alumno para aprender.

Para que se logre este último punto, tal vez el más importante, el profesor tiene que crear un ambiente de confianza para poder acercarse a los alumnos y así paulatinamente crear una relación entre ellos.

Una vez que existe la relación docente-alumno se puede comenzar a realizar el aprendizaje, ya que la participación del alumno para el desarrollo de material didáctico y de investigación trae consigo que el estudiante encuentre un significado a lo que está estudiando.

En este trabajo se propone hacer uso racional del software, que sirva como una herramienta auxiliar para los alumnos que estudian Álgebra Lineal y sus aplicaciones.

DISCUSIÓN

Un caso particular dentro de la asignatura de Álgebra Lineal, es el tema de Cambio de Base, en donde el procedimiento que se sigue para poder llegar a un resultado analíticamente es muy extenso y no es fácil encontrar algún significado a lo que se realiza.

Partiendo del obstáculo que los alumnos encuentran en este tema, podemos hacer notar los beneficios que conllevan la utilización del software (Maple 8.0), el cual es útil, en este caso, sobretodo para la interpretación geométrica en dicho tema.

Sabemos que cuando los ejercicios involucran números enteros no representan un gran trabajo, pero es aquí donde se presenta el primer problema para los estudiantes, porque hay muchos ejercicios en los que se involucran números racionales y para hacer una representación geométrica de vectores es un poco complicado, más aún cuando la representación se tiene que realizar en tercera dimensión.

El objetivo de que los alumnos utilicen este programa es que puedan darle un significado geométrico a lo que realizan en su cuaderno y puedan utilizarlo para el análisis de sus resultados. Maple 8.0 proporciona gráficos con muchas características que ayudan a la visualización de estos, sobre todo en 3D. Por ejemplo, puedes rotar la imagen para obtener una mejor perspectiva, los ejes pueden ser visibles o se pueden ocultar, en el caso de vectores puedes sólo ver el punto final de dicho vector o el vector completo, según sea más benéfico, etc.

A continuación se presenta la solución de un ejercicio utilizando Maple 8.0. Podemos observar que los resultados se obtienen a partir de indicaciones muy sencillas.

CAMBIO DE BASE

Con Maple 8.0 se puede observar la interpretación geométrica del Cambio de Base, se puede comprender la parte analítica del procedimiento y el resultado de las operaciones se obtiene con mayor facilidad.

Para el Cambio de Base se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1: Sean B_1 y B_2 para un espacio vectorial V. Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces para toda $x \in V$ se tiene que $(x)_{B_2} = A \cdot (x)_{B_1}$.

Ejemplo: En R^3 suponga $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, donde $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. Expresar *x* en términos de los vectores de B_2.

Procedimiento: Para el conjunto de vectores arriba mencionados, se utiliza el criterio del determinante para verificar que sean linealmente independientes. El criterio dice que un conjunto de vectores es Linealmente Independiente si y solo si $\Delta \neq 0$.

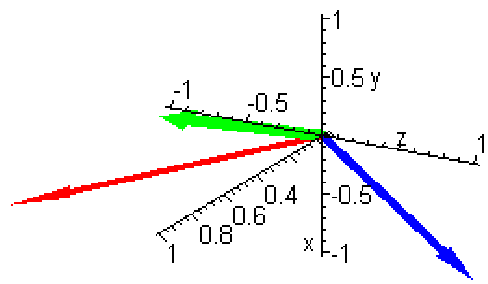
```
[> with(plots):
[> with(linalg):
[> u1:=(<1,-1,0>):
[> u2:=(<0,1,-1>):
[> u3:=(<1,0,1>):
[> v1:=(<3,0,0>):
[> v2:=(<1,2,1>):
[> v3:=(<0,1,5>):
[> B1:=Matrix([u1,u2,u3]);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
[> det(B1);
```

$$2$$

```
[> u11:=arrow(u1,color=red,shape=double_arrow):
[> u22:=arrow(u2,color=blue,shape=double_arrow):
[> u33:=arrow(u3,color=green,shape=double_arrow):
[> display(u11,u22,u33,axes=normal,labels=[x,y,z],orientation
   =[29,64]);
```



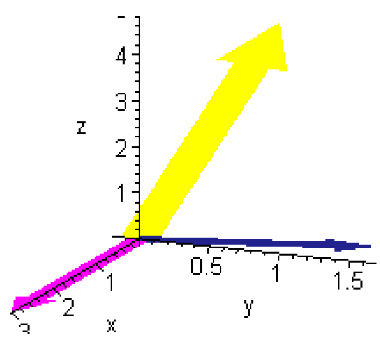

```
[> B2:=Matrix([v1,v2,v3]);
```

$$B2 := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
[> det(B2);
```

$$27$$

```
[> v11:=arrow(v1,color=magenta,shape=double_arrow):
[> v22:=arrow(v2,color=navy,shape=double_arrow):
[> v33:=arrow(v3,color=yellow,shape=double_arrow):
[> display(v11,v22,v33,axes=normal,labels=[x,y,z],orientation
   =[23,71]);
```



Teorema 2: Cualquier conjunto de n vectores linealmente independiente en R^3 genera a R^3 .

Como ambos determinantes son diferentes de cero y los conjuntos de vectores no son coplanares, es decir, que no se encuentran en un solo plano, se puede decir que son Linealmente Independientes y por el Teorema 2, se concluye que si son bases para el espacio vectorial en R^3.

Para encontrar la matriz de transición se realizan las siguientes indicaciones:

```
[> A:=evalm(inverse(B2)&*B1);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{14}{27} & \frac{-2}{9} & \frac{10}{27} \\ \frac{-5}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

Ahora se tiene que encontrar a $(x)_{B_1}$.

```
[> x:=(<2,-1,4>);
```

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
[> X:=array([[1,0,1,2],[-1,1,0,-1],[0,-1,1,4]]);
```

$$X := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
[> X1:=gaussjord(X);
```

$$X1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

```
[> a:=X1[1,4]:b:=X1[2,4]:c:=X1[3,4]:x1:=<a,b,c>;
```

$$x1 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

```
[> x1:=matriz(3,1,[-1/2,-3/2,5/2]);
```

Ahora para encontrar $(x)_{B_2}$, se utiliza el Teorema 1.

```
[> x2:=evalm(&*(A,x1));
```

$$x2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
[> x2:=multiply(A,x1);
```

$$x2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
[> c1:=1:c2:=-1:c3:=1:
```

Comprobación: $x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

```
[> au:=evalm(a*u1):bu:=evalm(b*u2):cu:=evalm(c*u3):
[> cv1:=evalm(c1*v1):cv2:=evalm(c2*v2):cv3:=evalm(1*v3):
[> x:=(evalm(au))+(evalm(bu))+(evalm(cu))=evalm(au+bu+cu);
```

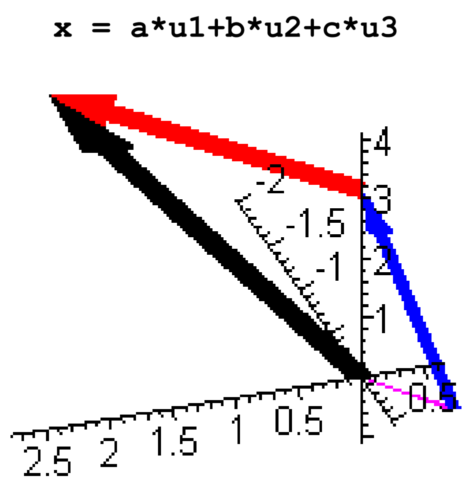
$$x := \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right] + \left[0, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right] + \left[\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right] = [2, -1, 4]$$

```
[>x:=(evalm(cv1))+(evalm(cv2))+(evalm(cv3))=evalm(cv1+cv2+cv3);
```

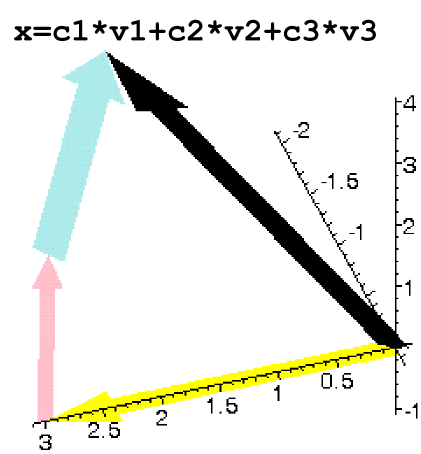
$$x := [3, 0, 0] + [-1, -2, -1] + [0, 1, 5] = [2, -1, 4]$$

```
[> ua:=arrow(au,color=magenta,shape=double_arrow):
[> ub:=arrow(au,bu,color=blue,shape=double_arrow):
[> uc:=arrow([(-1/2),-1,(3/2)],cu,color=red,shape=
   double_arrow):
```

```
[> ux:=arrow([2,-1,4],color=black,shape=double_arrow):
[> k:=arrow(cv1,color=white,shape=double_arrow):
[> l:=arrow([2,-2,-1],color=white,shape=double_arrow):
[>display(ua,ub,uc,ux,k,l,axes=normal,orientation=[71,52],
  title="x=a*u1+b*u2+c*u3");
```




```
[> vc1:=arrow(cv1,color=yellow,shape=double_arrow):
[> vc2:=arrow(cv1,cv2,color=pink,shape=double_arrow):
[> vc3:=arrow([2,-2,-1],cv3,color=turquoise,shape=
  double_arrow):
[> display(vc1,vc2,vc3,ux,axes=normal,orientation=[71,52],
  title="x=c1*v1+c2*v2+c3*v3");
```



Nuevamente se ha comprobado que los resultados se cumplen, analíticamente y geométricamente.

CONCLUSIONES

En el ejercicio anterior se observó que el procedimiento manual es muy largo y es difícil interpretar geométricamente lo que se está haciendo en forma analítica y con la ayuda del software el procedimiento es más corto pues sólo se dan algunas instrucciones a Maple 8.0 y arroja los resultados en forma inmediata y con ello poder comparar y comprobar los resultados. Otro de los aspectos relevantes en la utilización de Maple 8.0 es la interpretación geométrica ya que permite visualizar en diferentes perspectivas y efectos en tercera dimensión los resultados de los procedimientos, situación muy complicada si se intentan realizar en el cuaderno a mano.

Como se puede observar, la participación del estudiante es muy importante para la enseñanza, ya que de esta manera se puede promover que los alumnos sean autodidactas a partir de constatar los avances que se realizan entre ellos. Es como una especie de competencia, en donde unos, observando el avance de los demás, quieren alcanzar ese nivel o mejor aún, superarlo.

De esta manera se crea una cadena de conocimientos y en algunos casos de investigación, que serán útiles a lo largo de toda la vida y que enriquecen poco a poco el conocimiento de las personas que se encuentran alrededor, ya sea alumnos o maestros, porque de ambos depende la enseñanza y el aprendizaje. Uno a otro se pueden complementar para poder llegar a un nivel óptimo en la educación.

BIBLIOGRAFÍA

- ✓ Antón, Howard: Introducción al Álgebra Lineal. 3ra. Ed. Limusa Wiley.
- ✓ Nakos, George; Joyner, David: Álgebra Lineal con Aplicaciones. Ed. International Thomson Editores.
- ✓ León, Steven J.: Álgebra Lineal con Aplicaciones. 3ra. Ed. (primera en español). Ed. Continental S.A de C.V.
- ✓ Maple. Aplicaciones Matemáticas para PC. Agustín Carrillo de Albornoz Torres, Inmaculada Llamas Centeno, 1994. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, ra-ma. Maple ver. 3.0.
- ✓ Calculo Cientifico con Maple V. Felix Rincon, Alfonsa García, Angeles Martínez. Ed. Ra-ma (Alfaomega). Maple V ver. 3.0, México, 1995.
- ✓ Experimental Matematics with Maple. Franco Vivaldi, Ed. Dmatematics, Chapmane Hall/CRCmatematic. Ed. Ra-ma (Alfaomega). Maple V ver. 3.0, México, 1995.

- ✓ Maple V (Manual de vuelo). Tutoriales para Cálculo, Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales. Ed. Series de Computación Simbólica Brooks/Cole. Ver. 4.0, 1997.
- ✓ Aprenda Maple Vers. 3.0 (6/03/96), 5.0 (6/10/98) y 8.0 (6/10/02). Como si Estuviera en Primero. San Sebastián, España.
- ✓ **http://www.maplesoft.com/flash/index.html**
- ✓ **http://www.nuclecu.unam.mx/~unamaple/**
- ✓ **http://www.unamaple-homepage/**