

# **LAS ECUACIONES DIFERENCIALES: SU SENTIDO Y SIGNIFICADO EN INGENIERÍA.**

Ruth Elba Rivera Castellón  
Facultad de Ingeniería-Unidad Mexicali  
Universidad Autónoma de Baja California

## **RESUMEN**

Es indudable que el análisis ha sido la rama dominante de las matemáticas durante 300 años, y las ecuaciones diferenciales están en el corazón del análisis; ya que constituyen el objetivo natural del cálculo elemental y la zona más importante para la comprensión de las ciencias físicas en ingeniería. El interés de indagar sobre “sentido y significado” de las ecuaciones diferenciales, es porque estos términos se consideran íntimamente ligados dentro de la investigación y en la práctica de la educación matemática.

Se considera esencial que los estudiantes conozcan el significado de los términos, expresiones representaciones, a que se hace referencia dentro del lenguaje matemático y en sus diferentes registros.

El presente reporte de investigación muestra los resultados obtenidos al indagar sobre cual es el sentido y significado que los estudiantes de ingeniería, le asignan a las ecuaciones diferenciales. Con este fin se encuestaron a 96 estudiantes de 4 carreras distintas de ingeniería: Ingeniería en Computación, Mecánica, Industrial y Electrónica, así como también a 8 profesores que imparten el curso de ecuaciones diferenciales en la misma Facultad. De los 96 estudiantes se selecciono una muestra de 6 alumnos a los cuales posteriormente se les entrevisto en forma individual.

Con la finalidad de realizar un análisis mas completo se revisaron los textos sobre ecuaciones diferenciales mas utilizados en la Facultad. Se observa que cuando un profesor imparte una materia, cualquiera que esta sea, se apoya regularmente en un texto, mismo que podrá ser el de moda, el que tenga a su alcance o con el que se identifique por diversas razones. La revisión se centro en la forma de abordar los contenidos, tipo de problemas de aplicación, metodología, etc.

## **Introducción**

Algunos de los motivos para realizar el presente trabajo de investigación son:

- La importancia del curso de ecuaciones diferenciales para las carreras de ingeniería, ya que son el enlace entre los cursos de matemáticas puras y los problemas propios de ingeniería; es aquí donde el alumno debiera darse cuenta de la utilidad de las matemáticas.
- Los estudiantes de semestres avanzados no recuerdan métodos de solución para las ecuaciones diferenciales.
- Se les dificulta interpretar los problemas de los textos, analizar resultados tanto gráficos como numéricos.

El problema que se aborda en este trabajo, puede resumirse en dos cuestionamientos:

- ¿Cuál es el sentido y significado que los estudiantes del área de ingeniería le dan a las ecuaciones diferenciales?
- ¿Qué papel juegan en la adquisición de dichos sentidos y significados, los profesores y los textos?

¿Por qué sentido y significado? La construcción del conocimiento esta orientada a compartir significados y sentidos, el aprendizaje se caracteriza porque a través de actividades, relaciones e interacciones, se llegan a compartir parcelas más amplias de significados respecto a los contenidos del currículum escolar. El sentido de los contenidos los otorgará el estudiante cuando sea capaz de ubicar, enganchar y aplicar dichos contenidos.

El curso de ecuaciones diferenciales establece un puente entre las matemáticas básicas y las materias de las especialidades, le proporciona al alumno herramientas necesarias para modelar y resolver problemas de circuitos eléctricos, velocidades de reacciones químicas, vibraciones mecánicas, modelos económicos, etc. La finalidad de llevar a cabo una investigación que permita entender que significan y que sentido tienen las ecuaciones diferenciales para los estudiantes, es aportar información que pudiera ayudar a la interpretación de la problemática de su enseñanza.

### **Fundamentos Teóricos y Metodología**

Primeramente se establecerá la concepción que se tiene sobre sentido y significado, así como los preceptos teóricos que permitan establecer la relación entre dichos preceptos y la enseñanza, el aprendizaje y los textos utilizados en los cursos de ecuaciones diferenciales.

El sentido se concibe como la interpretación personal, no institucionalizada que un sujeto le asigna a un objeto de conocimiento, dentro de un contexto. El significado es la síntesis conceptual de dicho objeto, la cual es un producto social, algo institucionalizado, y que por lo tanto se dará después de haber manipulado al objeto en diferentes contextos, esto es el sujeto construye el significado a partir de los sentidos en contexto.

En matemáticas los objetos de estudio, en este caso las ecuaciones diferenciales, son objetos abstractos que existen en la mente del sujeto, con los cuales solo se puede interactuar mediante sus diferentes representaciones o bien mediante su estudio en los diferentes contextos. Cuando un sujeto es capaz de abstraer las características esenciales, cuando puede identificar, relacionar y se da cuenta de las analogías entre los diferentes sentidos que el objeto tiene dependiendo del contexto en que se este estudiando, dicho sujeto ha logrado construir el significado de dicho objeto.

En lo que respecta a la enseñanza y el aprendizaje, las acciones que el profesor realiza en clase están influenciadas por la concepción que él tiene del cómo los estudiantes aprenden. El profesor es quién diseña, organiza, planea, las situaciones problémicas a través de las cuales pretende que los estudiantes generen significados. En esta actividad, frecuentemente echa mano de los libros

de textos. Los fundamentos teóricos de la Transposición didáctica<sup>1</sup>, nos ayudan a precisar de que manera los profesores utilizan los textos de ecuaciones diferenciales, para transponer los conocimientos en conocimientos que generen en el alumno sentidos y significados. Chevallard intenta explicar el tránsito del saber matemático sabio, erudito al saber matemático susceptible de ser enseñado. El saber a enseñar se encuentra alejado del sabio que lo produjo y de sus circunstancias; es un saber disociado de la problemática original que le da sentido y significado a su existencia, y no es legitimado por nadie, excepto por el profesor que imparte clase.

Entonces el saber transpuesto a la enseñanza no muestra su origen epistemológico y su naturaleza queda reducida a definiciones, lemas y teoremas que solo presentan un concepto finamente construido, sin permitir recrear los conflictos, conjeturas e interpretaciones originales que le dieron los primeros significados. Chevallard apunta que los libros de texto desprovveen de situaciones asociadas con el saber original.

Para la realización del presente trabajo se utilizó una metodología cualitativa, apoyada en el estudio de casos. Iniciando con la aplicación de un cuestionario, diseñado con la doble finalidad de indagar cual es el sentido y significado que los estudiantes de diferentes carreras de ingeniería le asignan a las ecuaciones diferenciales y para seleccionar a aquellos estudiantes que conformarían el estudio de casos.

El cuestionario esta compuesto de 4 ecuaciones diferenciales ordinarias de 1er. orden, y para cada ecuación se le pide al encuestado que describa el comportamiento de la función encontrada.

### El Cuestionario.

Resuelve la siguiente ecuación diferencial y analiza su solución.

1.  $(y^2 + 1) dx = y \sec^2 x dy$

2.  $2xy y' + y^2 = 2x^2$

3.  $xy y' + y^2 = 2x$

4.  $(2x + y + 1) \frac{dy}{dx} = 1$

¿ Que comportamiento presenta la función solución ?

### A quienes y a cuantos se aplicó

El cuestionario se aplicó a 96 estudiantes de cuatro carreras diferentes de ingeniería: Electrónica, Industrial, Mecánica y de Computación, distribuidos en las etapas Básica y Disciplinaria, lo equivalente a cuarto, quinto y sexto semestre.

El mismo cuestionario también se aplicó a 8 profesores que imparten el curso de ecuaciones diferenciales o bien que imparten materias de la etapa disciplinaria que requieren de las ecuaciones diferenciales como herramientas para la resolución de problemas propios de su carrera.

<sup>1</sup> La teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1985) se refiere al tratamiento adaptativo del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado.

En la siguiente etapa, se analizaron las encuestas, y basándonos en las actividades realizadas por los estudiantes, así como características establecidas previamente, se seleccionaron 6 de ellos para formar el estudio de casos. A estos estudiantes se les entrevistó, estas entrevistas fueron grabadas en video para facilitar su análisis.

En forma paralela se analizaron los 3 textos más utilizados por los profesores en la Facultad de Ingeniería, dicho análisis se centro en indagar el sentido y significado que los autores de los textos asignan a las ecuaciones diferenciales, se compararon las definiciones, la metodología y el tipo de problemas de aplicación que proponen dichos autores. Se requiere del análisis de textos, porque se observa que cuando un profesor imparte una materia, cualquiera que esta sea, se apoya regularmente en un texto, mismo que podrá ser el de moda, el que tenga a su alcance o con el que se identifique por diversas razones. Por lo que el profesor se ve influenciado por la metodología, la manera de presentar los ejemplos resueltos, ejercicios, aplicaciones, etc. del autor de dicho texto. El profesor tratará de reproducir ante sus alumnos, lo más fielmente posible, su propia interpretación de los sentidos y significados, que no necesariamente es la misma del autor del texto. El profesor "filtra" la información de acuerdo a sus propias estructuras mentales, a sus vivencias, etc. y presenta a los alumnos su versión sobre las significaciones, en este caso particular, de las ecuaciones diferenciales. El revisar los textos servirá como base para la interpretación posterior de las actitudes y acciones realizadas por los profesores y los mismos alumnos.

## Los Resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos a partir de analizar las encuestas aplicadas a los estudiantes y a profesores. La tabla 1 y 2 representa los resultados globales (por grupo), para las ecuaciones 1 y 3, los resultados de las ecuaciones 2 y 4 son muy similares a los obtenidos con la ecuación 3.

### SIGNIFICADO DE LAS CLAVES:

MS = Método de Solución adecuado	CE = Promedio de Calificación en Ecuaciones por grupo
DM = Desarrollo completo del método	PM = Promedio General (kardex)
PI = Presenta la Integral correcta	RM = Alumnos que cursaron la materia por 2 ocasiones
RI = Resuelve la integral correctamente	MG = Caracteriza la función solución graficándola
EF = Encuentra la Función Solución	CM = Caracteriza mal la función
CF = Caracteriza la función solución	
MV = Caracteriza verbalmente la función solución	

Se le asignó un 1 a cada actividad realizada correctamente y un 0 a la no realizada o bien realizada incorrectamente. En las 3 ultimas columnas se muestra información concerniente al historial académico promedio de cada grupo, la antepenúltima columna, muestra el promedio obtenido en el curso de Ecuaciones Diferenciales, la penúltima el promedio general del grupo y la última proporciona el número de alumnos que cursaron la materia por dos ocasiones.

Ecuación No. 1 "ENCUESTAS A ESTUDIANTES"											Totales por Grupo	
Grupo	MS	DM	PI	RI	EF	CF	MV	MG	CM	CE	PM	RM
232	18	18	18	18	13	2	2	0	0	9.2	8.65	0
431	9	7	6	6	3	2	2	0	1	8.2	8.37	0
441	13	12	12	7	4	4	3	1	0	8.23	8.12	4
442	12	13	10	2	1	0	0	0	0	7.11	7.77	2
452	10	10	7	2	0	4	3	1	4	8.08	7.69	2
551	17	15	14	2	2	2	1	1	2	7.57	7.6	2
<b>Total</b>	<b>79</b>	<b>75</b>	<b>67</b>	<b>37</b>	<b>23</b>	<b>14</b>	<b>11</b>	<b>3</b>	<b>7</b>			<b>10</b>
<b>%</b>	<b>82</b>	<b>78</b>	<b>71</b>	<b>38</b>	<b>24</b>	<b>14.5</b>	<b>11.4</b>	<b>3.1</b>	<b>7.2</b>			<b>10.4</b>

Tabla No. 1

La ecuación 1 es una ecuación con un grado mínimo de dificultad, ya que solo basta con separar las variables y aplicar integración a ambos lados, para encontrar su solución. Los resultados observados en la tabla No. 1, arrojan que un 82% de los estudiantes identificaron correctamente la ecuación, esto es, realizaron la actividad 1, el 78% desarrollo bien el método de solución, el 71% se quedo en la actividad de proponer las integrales apropiadas para su resolución, pero solo el 38% resolvió dichas integrales, y el 14.5% caracterizó la función solución. Se hace notorio el hecho que solo 3 estudiantes de los 96, utilizó el modo grafico para caracterizar la función, lo cual nos hace pensar que la mayoría no relaciona las ecuaciones diferenciales con la representación grafica de funciones.

Ecuación No. 3											Totales por Grupo	
Grupo	MS	DM	PI	RI	EF	CF	MV	MG	CM	CE	PM	RM
232	12	0	0	0	0	0	0	0	0	9.2	8.65	0
431	1	0	0	0	0	0	0	0	0	8.2	8.37	0
441	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.23	8.12	4
442	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.11	7.77	2
452	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8.08	7.69	2
551	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7.57	7.6	2
<b>Total</b>	<b>13</b>	<b>0</b>			<b>10</b>							
<b>%</b>	<b>13.5</b>	<b>0</b>			<b>10.4</b>							

Tabla No. 2

Los resultados de la Ecuación No. 3 se observan en la tabla No. 2, dicha ecuación presento gran dificultad para la mayoría de los estudiantes, ya que solo el 13.5% de ellos identificaron correctamente el tipo de ecuación, pero ninguno pudo resolverla y mucho menos caracterizarla.

En relación a los profesores, la encuesta se entregó a 8 de ellos, pero solo 5 la devolvieron resuelta, los resultados se presentan en la tabla No. 3. Dicha tabla muestra los aciertos en las actividades realizadas para la solución de las 4 ecuaciones, la tabla esta organizada de forma similar a las tablas 1 y 2, por actividades, y las dos últimas columnas nos dan información sobre la etapa formativa en que se desempeña el docente.

**“ENCUESTAS A PROFESORES”**

Ecuación No.	MS	DM	PI	RI	EF	CF	MV	MG	CM	NE		TC	E
1	5	5	5	5	5	5	4	1	0	1		4	1
2	5	5	5	5	5	4	3	1	2	1		4	1
3	5	5	5	5	5	5	4	1	1	2		4	1
4	4	4	4	4	4	2	2	0	0	1		4	1
T	19	19	19	19	19	16	13	3	3	5		4	1
%	<b>95</b>	<b>95</b>	<b>95</b>	<b>95</b>	<b>95</b>	<b>80</b>	<b>65</b>	<b>15</b>	<b>15</b>	<b>25</b>		<b>80</b>	<b>20</b>

Tabla No. 3

**SIGNIFICADO DE LAS CLAVES:**

- |   |  |
|---|--|
| MS = Método de Solución adecuado                  | TC = Profesor de tronco común                    |
| DM = Desarrollo correcto del método               | E = Profesor de especialidad                     |
| PI = Presenta la Integral                         | MV = Caracteriza verbalmente la función solución |
| MG = Caracteriza la función solución graficándola | CM = Caracteriza mal la función                  |
| RI = Resuelve la integral                         | EF = Encuentra la Función Solución               |
| CF = Caracteriza la función solución              |  |

Los resultados muestran que no ocasionó mayor problema el encontrar la solución de las cuatro ecuaciones contenidas en el cuestionario. Los profesores realizaron todas las actividades correctamente, con excepción de la pregunta a responder, sobre las características de la función solución. El 80% las caracterizó y de ese 80%, el 65% lo hizo en forma verbal, y solo el 15% utilizó graficas, el 15% caracterizó incorrectamente. Esto nos da una idea del porque los estudiantes no utilizaron la representación grafica para señalar las características de la función solución.

**Observaciones**

Debido al carácter descriptivo de la presente investigación, solo podemos presentar conjeturas y reflexiones de los resultados obtenidos, mismas que pretenden aportar información que sirva como base o referencia para una propuesta de reformulación a la metodología utilizada actualmente en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

**En cuanto a Sentido y Significado**

- Para un gran numero de alumnos de la Facultad de Ingeniería las ecuaciones diferenciales carecen de significado, algunos muestran que éstas tienen sentido en algún contexto, ya sea el físico o el geométrico.
- Se observa que aunque muchos de ellos son alumnos exitosos, no tienen la habilidad para relacionar las ecuaciones diferenciales entre sus diferentes representaciones.
- La mayoría de los estudiantes encuestados no analizaron las soluciones encontradas, sólo ven en las ecuaciones diferenciales, problemas matemáticos, totalmente algebraicos, no las relacionan con modelos que representan variaciones, y que pueden ser representados mediante valores numéricos o graficas.

- Se pudo corroborar que los alumnos seleccionados, en su mayoría dominan los métodos de solución algebraicos para la resolución de ecuaciones diferenciales. No así el gráfico o el numérico.

### **En cuanto a la enseñanza, profesores y textos**

- Se encontró que los profesores no promueven el aprendizaje significativo, pues en su mayoría consideran que con dar conferencias y proponerles una lista de ejercicios, los alumnos se apropiarán del conocimiento.
- Los profesores y alumnos ven a las ecuaciones diferenciales como herramientas para resolver problemas algebraicos los significados en los contextos físicos, gráfico y numérico, representan un porcentaje mínimo de sus concepciones.
- Los profesores, apoyados en los textos, privilegian el marco algebraico y desaprovechan los marcos numérico y gráfico, cuya utilización enriquece el aprendizaje significativo.
- Son muy pocos los profesores que se valen de la tecnología actual, como calculadoras graficadoras o microcomputadoras, para visualizar conceptos, generar habilidad de análisis, si las utilizan sólo son como herramienta para hacer cálculos y comprobar resultados.
- Los textos utilizados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, dan preferencia al desarrollo en el marco algebraico, minimizando la utilización de los marcos gráfico y numérico así como el uso de enseñanza en contextos diferentes del matemático abstracto.
- Los textos y los profesores juegan un papel primordial en la generación de significados en los estudiantes y si la enseñanza de las ecuaciones diferenciales se da en un solo contexto, y de manera que el alumno participe solo como espectador, esto origina que sea pobre en sentidos y significados.

### **Bibliografía**

- ARTIGUE, MICHÈLE.** (1995) Ingeniería Didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica.
- BROUSSEAU, G.** , 1986. Fundamentos y Métodos de la Educación Matemática.
- DÍAZ GODINO, JUAN.** , 1990. Hacia una Teoría de la Didáctica de la Matemática, Dpto. de Didáctica de las Matemáticas, Universidad. de Granada.
- EDWARDS JR., CH. Y PENNEY, DAVID E.** 1885. Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones. Prentice-Hall Hispanoamericana..
- HERNÁNDEZ RAMÍREZ, ARTURO.** , 1994. Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Algebraico y Gráfico en Relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, cuaderno de investigación núm. 30.
- HERNÁNDEZ SAMPIERI, ROBERTO; COLLADO FERNÁNDEZ, CARLOS Y BAPTISTA LUCIO, PILAR.** Metodología de la Investigación.
- MORENO ARMELLA LUIS y WALDEGG GUILLERMINA;** 1992. Constructivismo y Educación Matemática, Vol. 4 Revista Educación Matemática No. 2, México, , pp. 7-15
- SIMMONS, GEORGE F.** Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Historicas. Ed. Mc Graw Hill. 1998.
- ZILL, DENNIS G.** Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones al Modelado, Ed. Thomson, 1999.