

EL ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN COMO UN SIGNIFICADO DE LA DERIVADA

Teodoro M. Ceballos
Facultad de Ingeniería, División de Ciencias Básicas,
Departamento de Matemáticas Avanzadas-UNAM.

Esta investigación está relacionada con la enseñanza del Cálculo Diferencial en el Nivel Medio Superior (NMS). Por consiguiente, aquí se abordan uno de los problemas mayores que se tiene en la enseñanza de la matemática para Bachillerato. Así, como resultado de la experiencia en el Discurso Matemático Escolar (DME), donde todos posiblemente hemos observado que los estudiantes comprenden muy poco las ideas básicas del Cálculo Diferencial y de manera especial, las relacionadas con la derivada.

En esta dirección, muchos investigadores que han avanzado en este campo, han reportado que el que aprende tienen alguna facilidad con los procesos algorítmicos, mientras que, con respecto a la parte conceptual manifiestan ciertos desequilibrios académicos. Por esta razón, la investigación parte de la hipótesis básica de que el desarrollo de ideas variacionales, podrían propiciar una mejor comprensión y apropiación de el *Concepto de derivada*, la hipótesis está fundamentada, a la vez, en varios estudios históricos y epistemológicos en la cual se sostiene que el origen del *cálculo* fue propiciado por el estudio con problemas de variación.

El objetivo de presentar esta ponencia en este foro, es con el propósito de presentar el problema y los objetivos de la investigación, además, de las consideraciones teóricas relevantes en las que se basa el diseño metodológico, así como también, la interpretación de las observaciones y, especialmente, mostrar algunas de sus observaciones realizadas, las conjeturas que con base en ellos se hacen y las conclusiones a los que finalmente se ha estado llegando con el desarrollo de la investigación.

Análisis del Problema

Actualmente, todo ingeniero tropieza frecuentemente con problemas que para que se aborden requieren buenos conocimientos matemáticos y pericia en la aplicación de distintos métodos matemáticos, casi nos aterrorizamos al probar que los nuevos ingenieros a través de las conductas académicas observables, éstos ignoran conocimientos que deberían saber y más que esto, utilizarlos en el ejercicio de su profesión. Esta reflexión nos lleva a conjeturar a la luz de lo que se observa, que el estudiante cuando egresa carece un pensamiento matemático avanzado, alrededor de todo esto, podríamos preguntarnos el por qué; en esta investigación estamos asegurando que el egresado de una carrera de ingeniería, sale y sale bien, con respecto a los conocimientos teóricos matemáticos que debe dominar al término de la carrera. Entonces, nosotros nos hicimos la pregunta de investigación: ¿ por qué un estudiante de ingeniería cuando egresa se desarrolla como un técnico especializado, y no como un profesional de ingeniería?

Concretada así nuestra pregunta de investigación, nos hemos dedicado a desarrollar el proyecto de investigación con un agobiante trabajo de campo dirigido a observar muy de cerca, el trabajo académico de alumnos y profesores. Después de largos meses de trabajo, los esfuerzos realizados parece que empezamos a recibir algunas recompensas hacia la búsqueda de alcanzar la excelencia académica en el área de matemáticas para nuestras carreras de ingeniería. Los primeros resultados nos están reportando que en el desarrollo del Discurso Matemático Escolar, se está apostando por la matematización pura de los conceptos, no a la apropiación conceptual y demostración, sí a lo algorítmico, no a la divulgación de la matemática aplicada y finalmente, sí a una matemática abstracta, no a una matemática de significados.

Con fundamento a los últimos comentarios, algunos investigadores se han dedicado a proponer con referencia al orden de las matemáticas para su enseñanza, tomando decisiones tal y como la pregunta aquella: ¿quién fue primero, el huevo o la gallina?. A la luz de estas discusiones, existen otros comentarios como el siguiente: unos sostienen que el camino verdadero para entender el cálculo principia con un estudio completo del sistema de los números reales desarrollándolo paso a paso de manera lógica y rigurosa. Otros insisten en que el cálculo es ante todo un instrumento para los ingenieros y físicos; y por consiguiente, que un curso de llevar a las aplicaciones del cálculo apelando a la intuición, para después, por el ejercicio en la resolución de problemas, i.e., alcanzar destreza operativa.

Qué podemos abundar nosotros alrededor de estos dos puntos de vista, que ciertamente son bastantes razonables, sin embargo, se puede observar que en los dos casos se trata de una matemática abstracta y pura además...nosotros pensamos que el cálculo es una ciencia deductiva y una rama de la matemática pura. Al mismo tiempo recordemos que el cálculo tiene profundas raíces en problemas físicos y que gran parte de su potencia y belleza deriva de la variedad de sus aplicaciones. Sin embargo, siempre será posible combinar un desarrollo teórico riguroso con una sana formación técnica. Con este comentario estamos resaltando la flexibilidad que autoriza la matemática misma para el accionar en el Discurso Matemático Escolar.

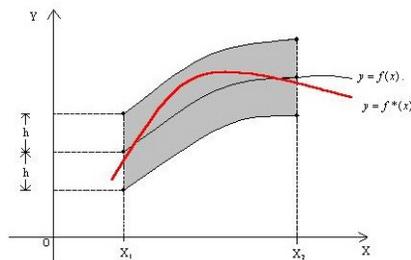
Por consiguiente, nuestro trabajo de investigación de campo nos invita no a cancelar temas de la currícula de una asignatura, sino que a sabiendas de que la matemática nos aporta un buen tipo de pensamiento dialéctico, entonces lo que podríamos hacer en la praxis educativa, sería como una descompartamentalización de los saberes matemáticos, i.e., que un saber sea el que sea tiene un nivel académico de dificultad, un objetivo y un significado. Por lo cual, éste tendrá que divulgarse, aprenderse y usar, sin distorsionarlo; esto significa que no se tiene una matemática especial para una determinada área de la ciencia sino que, existe un conocimiento matemático básico que todo aquel que estudia una carrera de cualquier área de la ciencia tiene que saber.

Con esto, cuando estamos hablando de una descompartimentalización de saberes, nos estamos refiriendo a lo equivalente de decir que, un saber matemático que se enseñe a un estudiante de licenciatura, será el mismo que reciba el de bachillerato, secundaria o primaria y , como consecuencia el mismo saber pero con diferentes formas de divulgación.

Este es un reporte de los primeros resultados obtenidos de un proyecto mayor de investigación sobre el estudio de la variación y significados de la derivada en cálculo, a través del cual se está buscando entender y explicar la forma en el que la representación de la variación interviene en la construcción del concepto de derivada en cálculo. Hemos considerado conveniente que antes de extender lo que se ha hecho en nuestro trabajo de investigación, discutir algunas concepciones que tenemos sobre el concepto de variación, veamos.

En el contexto matemático asumimos que la derivada es un concepto variacional, i.e., es la medida de cambios relativos, es además, para nuestra concepción, una razón de cambios infinitamente pequeños. Específicamente, entendemos por una situación variacional al conjunto de problemas que requieren de un tratamiento variacional tanto del punto de vista de las funciones cognitivas de quienes las aborden como desde la perspectiva matemática y epistemológica. Podríamos además, agregar el término resignificación porque el concepto de derivada adquiere significaciones que evolucionan conforme se va dando el progreso del que aprende en su ambiente de estudio matemático. Todos sabemos que de inicio puede reducirse a una regla de cuatro escenarios que de alguna manera convergen a la definición, posteriormente se extiende como una razón de cambio o como un elemento en la Serie de Taylor. Además, no en pocas ocasiones se le ha buscado entender relacionándolas con sus derivadas de orden superior; sobre todo cuando se le redefine en la práctica del quehacer matemático, con problemas que tienen relación con la cinemática (estudio analítico de la posición, velocidad, aceleración y sobre aceleración (sacudidas).

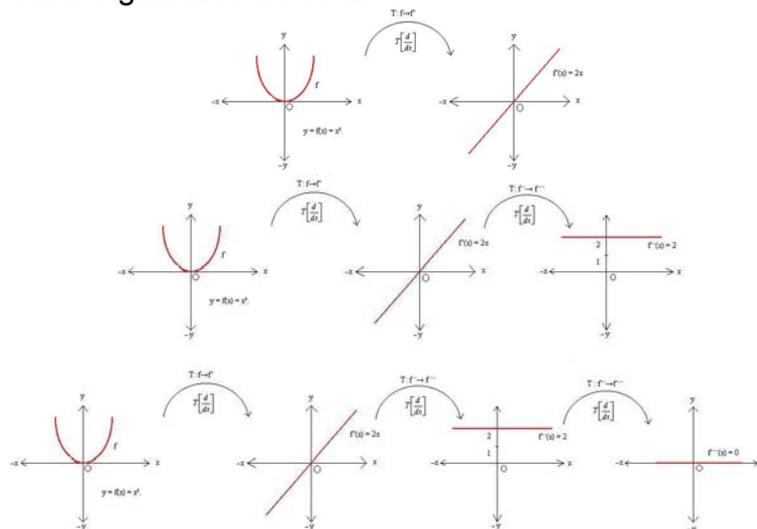
Por consiguiente, *el problema fundamental del Cálculo de Variaciones puede expresar manera más concreta y correctamente así*; en el dominio de las funciones argumento admisibles para una funcional determinada, encontrar esa función argumento, i.e., función extremal para la cual dicha función extremal alcanza un valor extremo, con respecto de los valores que ella adquiere para todas las demás funciones argumento del dominio, que se hallan en una vecindad infinitamente pequeña de la extremal; una visualización gráfica de todo esto se representa a continuación



Todos sabemos que el problema mayor que se tiene al estudiar escenarios de variación tiene que ver con los movimientos que se presentan en los extremos de una función $f(x)$ definida en un intervalo I cualesquiera, por tanto, con el concepto de funcional, por lo tanto es conveniente que recordemos brevemente el concepto de la variación de una funcional, veamos; en el Cálculo Diferencial que es el tema central de nuestro estudio, conociéndose el valor de la derivada df/dx en el punto $x = x_0$, entonces es posible definir el cambio de variación $\Delta f(x)$ que, en la vecindad inmediata para dicho punto, le corresponde un nuevo cambio de variación igual a una cantidad suficientemente pequeña llamada ε (epsilon), i.e., $\Delta x = \varepsilon$ de la variable independiente, por medio de la fórmula

$$\Delta f = \varepsilon \left[df/dx \right] , \text{ sobre } x_0.$$

Un análisis completo del extremo de una función implica determinar precisamente si se trata de un máximo o si trata de un mínimo. Así, en el **cálculo diferencial** esto se consigue anulando la **primera derivada (primera variación)**, y estudiando las variaciones de orden superior; lo mismo ocurre con el **Cálculo de Variaciones**. Que hemos interpretado nosotros, pues que se redefinen **segundas variaciones a través de segundas derivadas**, con respecto a ε , **terceras variaciones por medio de terceras derivadas, cuartas variaciones a través de cuartas derivadas, y así sucesivamente**, se prueba la existencia de condiciones suficientes para el mínimo que consideran el signo o el anularse éstas. La siguiente visualización gráfica muestra la interrelación que existe entre la derivada y la variación como significado de ésta:



En esta dirección, la investigación de diferentes condiciones necesarias y suficientes y el deseo de perfeccionar la teoría variacional en muchos otros aspectos, llevó a desarrollos que hacen de este cálculo uno de los principales capítulos del análisis matemático; los nombres de Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi, Weierstrass y Hilbert, por citar únicamente a los más grandes, están ligados a él.

Finalmente, y como ya lo hemos mencionado en la ubicación de esta ponencia, en éste trabajo de investigación nos estamos preguntando cuál es la concepción que los estudiantes de ingeniería tienen acerca de la noción de variación y la relación que éste concepto puede o tiene con la diferencial y derivada, significados del Pensamiento Físico Avanzado (PFA) que suceden en la naturaleza.

Sobre el desarrollo de la investigación

Las ideas preliminares de este proyecto de investigación data de unos catorce años anteriores a éste que está feneciendo, con aquellas ideaciones se tuvo la idea de poder formular un proyecto mayor para poderse inscribir en el doctorado en ciencias en el área de matemáticas y con estas ideas se navegó durante algún tiempo hasta que finalmente se formularon con mayor severidad el objetivo, marco teórico, metodología y otros en el que el proyecto mayor está puesta en escena y de él se desprendió esta pequeña línea que hasta hoy en día parece que está avanzando con expectativas muy alentadoras.

Iniciamos con entrevistas clínicas que tácitamente fue dirigido ha estudiantes con edades entre 17 y 20 años, para estas entrevistas se diseñó un cuestionario que se les fue aplicando a un total de 30 estudiantes con tiempo de duración por entrevista de 60 minutos aproximadamente; además, se ha trabajado con estas ideas de la derivada y su relación con la variación, con cuatro grupos de estudiantes durante 16 meses en la asignatura de cálculo diferencial, también se han impartido cuatro cursos dirigido a profesores del área de matemáticas con duración por curso de 30 horas. Estos cursos dirigidos a estudiantes y profesores por separado, nos han aportado una gran información. Los estudiantes por ejemplo, comentan que si les hubieran ensañado en esa dirección desde los albores de su proceso educativo, ellos creen que a lo mejor estarían en mejor situación académica, mientras que los profesores externan que los estudiantes no están preparados para recibir dicha capacitación, además, aseguran que los alumnos no podrían alcanzar el éxito, pues, dicen ellos, que los estudiantes vienen mal del bachillerato, los de bachillerato se quejan de los profesores de secundaria y los de secundaria ya no tienen a quien culpar.

Esta información es valiosa para nosotros, aunque muy a pesar de que actualmente en el que estamos viviendo la era de mayor avance tecnológica, por los resultados que tenemos, parece ser que estamos en una buena parte provocando un proceso de retroceso académico entre los que aprenden. Sin embargo, la consideramos valiosa porque también puede ser que los encargados de impartir la enseñanza, puedan reorientar dicho proceso. En resumen, el retraso sustancial académico observan los alumnos tiene relación con la actitud de una buena parte de los profesores. ¿Por qué los estudiantes ven con buenos ojos esta implementación de recursos pedagógicos y didácticos? En realidad no lo sabemos, pero en la dirección de poder vertir una opinión, tal vez pudiera ser por el alto porcentaje a lo que apostamos en el proceso de enseñanza la mayoría de los profesores con el recurso algorítmico en contra de la divulgación para la

construcción de un pensamiento dialéctico, o también será bien dicho, un Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

Hemos trabajado con profesores de los Institutos Tecnológicos que existen por todo el país, Centros de Bachillerato Tecnológicos y de Servicios y Escuela Conalep-Ticomán; los estudiantes al que nos referidos, son del Sistema Nacional de los Institutos Tecnológicos. La investigación aún no termina , pero es posible que dentro de unos seis meses más lo estemos aterrizando.

Consideraciones Finales

El cálculo fue inventado como una herramienta matemática para estudiar los fenómenos del cambio y la variación en el mundo real, en cambio en la escuela se asegura que su enseñanza confiere un papel secundario a la variación y privilegia principalmente la utilización de la praxis algorítmica. Así, en la enseñanza del cálculo existe un problema que parece ser generalizado, es más existe muy pocos trabajos que describen con objetividad qué es lo que realmente sucede en la práctica educativa.

Se sabe que existen cambios, transformaciones, adaptaciones y otros, por parte de los profesores del conocimiento matemático presentado en los textos y el que fue usado en el salón de clases..

El proyecto fue visualizado para desarrollarlo en tres fases, considerando que en la primera se realizó un análisis de problemas de cálculo en libros más usados atendiendo al papel que en ellos juega la variación; la segunda se dedica a las exploraciones y observaciones acerca de cómo los profesores transponen los problemas de variación en el salón de clases y en la tercera fase, pretendemos seguir explorando cómo la transposición didáctica y el Discurso Matemático Escolar (DME) influyen a los alumnos en la resolución de problemas de variación.

Estamos seguros que si divulgamos una matemática de significados entre los alumnos que estudian ingeniería, la situación académica de los conocimientos teóricos usos de esta matemática, reflejará un cambio substancial entre profesores y comunidad estudiantil.

El uso de la tecnología en el salón de clases puede ayudar, pero sinceramente no garantiza en nada que esta puesta en escena del DME a través de este medio resuelva el problema mayor del por qué el estudiante de ingeniería cuando egresa se desarrolla como técnico especializado y no como un profesional de ingeniería.

La tendencia de colegas que están convencidos de que la praxis de la enseñanza de las matemáticas para estudiantes de ingeniería debe ser de forma análoga al de los estudiantes de matemáticas pura, las investigaciones recientes los contradice, por lo que recomendamos que dichos compañeros se coordinen con mayor frecuencia con las autoridades educativas del lugar de trabajo.

Finalmente, todo lo que en el escrito de esta ponencia pudiera haber quedado sin tomar en cuenta, de visualizarlo, lo analizaremos en el desarrollo del foro.

Bibliografía

Campbell, N. *Forma del pensamiento matemático*. 1968.

Cantoral, R. *Proyecto: Pensamiento y lenguaje variacional*. Documento interno de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, 1996.

Cevallos, T.M. *La aplicación de la transformación lineal un recurso para la enseñanza del Cálculo Integral*. Relme 13. Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana, 1999.

Chevellard, Y. *La transposition Didactique*. La Pensée suavage éditions, 1985.

Dolores, C. *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato*. Tesis Doctoral, Instituto Superior Pedagógico "Enrique J. Varona" La Habana, Cuba.