EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA BAJO UN ENFOQUE QUE INTEGRE LO GRÁFICO CON LO SIMBÓLICO

Alfredo Arenas González
Yukihiro Minami Koyama
Hugo Germán Serrano Miranda

Facultad de Ingeniería, UNAM

RESUMEN

En los planes de estudio de las carreras que se imparten en la **Facultad de Ingeniería** de la **UNAM**, se encuentran únicamente dos asignaturas con contenidos de geometría: **Geometría Analítica** y **Análisis Gráfico**. Varias materias requieren como antecedente los conocimientos de esta parte de la matemática, como en cálculo, mecánica, física, y las relacionadas con las ciencias de la ingeniería.

Con base en la experiencia de los autores, estas dos asignaturas que en la práctica están desvinculadas, son insuficientes para propiciar el aprendizaje significativo en los alumnos debido a la carencia de adecuadas estructuras simbólicas, aunado a la deficiente preparación con la que llegan los estudiantes de primer ingreso.

Dado que el cerebro humano está dividido en dos hemisferios en los que se llevan a cabo procesos diferentes, es importante la interacción de ambos para lograr aprendizajes significativos. Aplicando esta premisa al aprendizaje de la matemática, para que éste sea eficaz se requiere trabajar tanto con los procesos abstractos o formales como con los concretos. Dado que la **geometría** es la rama más tangible de la matemática, su estudio refuerza notablemente la comprensión y el aprendizaje de esta última.

En el **Programa de Alto Rendimiento Académico**, instrumentado en la **Facultad de Ingeniería,** se impartió durante nueve años en el primer semestre como asignatura adicional la **Geometría Descriptiva**, con un enfoque formativo y haciendo énfasis en el proceso de razonamiento aplicado a la geometría tridimensional. Los resultados se reflejaron inmediatamente en **Geometría Analítica** que cursaban paralelamente.

El aprendizaje de la geometría con un enfoque que integre los aspectos simbólico y gráfico fundamentado, propiciará su aprendizaje sólido, tanto en los conocimientos inherentes como en la habilidad de resolución de problemas con contenido geométrico que abundan en el ejercicio profesional de la ingeniería, y de la que adolecen nuestros estudiantes.

INTRODUCCIÓN

Según la teoría epistemológica de Piaget, es posible adquirir nuevas estructuras (integración equilibrada de esquemas) en la adquisición del conocimiento, para acceder a niveles superiores del mismo, y que a su vez sirven de base para un posterior desarrollo, es decir, pasan a ser subsistemas para lograr una superación cognitiva, con lo que el sujeto responde mejor a estímulos externos en la medida en que estos son asimilables por estructuras ya construidas.

En el caso del aprendizaje y por qué no, también en el de la enseñanza, pueden no darse los resultados deseados debido a la carencia de estructuras para enfrentar nuevos retos, pero en la medida que uno vaya adquiriéndolas, por medio de asesoría o de la experiencia, va cada vez obteniendo mejores resultados. En términos generales es así como nos vamos formando los profesores.

En el caso de los alumnos, en apariencia, una de las mayores dificultades para la asimilación de conceptos en el primer semestre de una licenciatura, es la carencia de una estructura adecuada que permita el manejo de la cantidad de información que se proporciona. En la medida en que un alumno aprende a través de fuertes tropiezos académicos (en la mayoría de los casos, al menos en la Facultad de Ingeniería), logra un equilibrio de esquemas que le permite una mejor organización en su tiempo de estudio, así como una adaptación paulatinamente creciente, que le permite sortear mejor lo que antes parecían obstáculos insalvables.

Si esa transición que logra el alumno se ve favorecida con diferentes recursos didácticos por parte de los profesores, la adaptación será más rápida. En el caso de la geometría, ésta puede ser comprendida de diferentes formas. Por ejemplo, pruebe a decir a una persona que dejó de tener contacto con las matemáticas que las expresiones $y = 2x$ y $y = -0.5x$ representan dos rectas perpendiculares, y posteriormente dibuje otro par con estas características y dígale que son perpendiculares, existe mayor posibilidad de convencerla en el segundo caso; en el mismo orden de ideas, si un profesor tiene la facilidad de elaborar un gráfico para la comprensión de una representación matemática, esto ayudará en el mejoramiento de la elaboración de estructuras que permitan la asimilación de conceptos en el pensamiento formal.

Supongamos que un profesor por alguna razón no posee la habilidad (y no se ha dado el tiempo para adquirirla) de la elaboración de gráficos en el pizarrón, ya sea a mano o con instrumentos; su potencial para convencer a los alumnos puede estar disminuida. Afortunadamente existen en la actualidad programas de cómputo que hacen con precisión y rapidez gráficos que antes nos llevaba una buena inversión en tiempo realizar con otros procedimientos. ¿No valdría la pena conjuntar esfuerzos y conocimientos de álgebra y teoría de las proyecciones para mejorar la facilitación del aprendizaje en los alumnos? En esta Facultad tenemos la ventaja de contar con laboratorios de cómputo con el suficiente número de computadoras personales, que nos permiten elaborar y mostrar gráficos para la mejor comprensión de los contenidos abordados.

Si analizamos los resultados que arroja el examen diagnóstico que se aplica a los alumnos de nuevo ingreso en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, las mejores calificaciones suelen aparecer en el rubro de geometría euclidiana; pero esto ni con mucho quiere decir que sea la que mejor dominan los alumnos o que no es necesario un esfuerzo para mejorar esta área del conocimiento y centrarse en las demás. Pues si bien es cierto que salen mejor en geometría euclidiana, no es alentador que la calificación promedio de cuatro obtenida (así sea mejor que la calificación promedio de dos obtenido en cálculo) garantice los antecedentes requeridos en asignaturas posteriores.

El aprendizaje de las matemáticas

El cerebro humano es el órgano más voluminoso del encéfalo, que se encuentra en la parte anterior y superior del cráneo, tiene una forma ovoidea y está dividida por la fisura longitudinal o cisura interhemisférica en dos *hemisferios cerebrales*: derecho e izquierdo, que están unidos por un conjunto de fibras transversales llamado cuerpo calloso.

En el cerebro se encuentran dos sustancias: la sustancia gris, que forma una capa superficial llamada *corteza cerebral,* y la sustancia blanca. La característica principal de la *corteza cerebral* es la habilidad de detectar y hacer patrones del sentido de las cosas, descifrando datos, reconociendo relaciones y organizando la información. La corteza cerebral tiene cuatro áreas dominantes, y en cada una de ellas realiza una función diferente.

Con respecto al aprendizaje, se cuenta con suficientes evidencias que indican que el *hemisferio derecho* procesa conjuntos, combina partes para integrar el todo, además de los aprendizajes aleatorios como: ritmos, imágenes, color, reconocimiento de caras, patrones, mapas y dimensiones. Es el de la intuición, la capacidad creadora, los sueños y la imaginación. El *hemisferio izquierdo* (analítico) procesa listas y secuencias, es lógico, se encarga de las palabras, el razonamiento, los números, el pensamiento lineal y el análisis.

En el proceso de enseñanza–aprendizaje tradicional de las matemáticas, se privilegia significativamente el desarrollo del hemisferio izquierdo, y se descuida la aportación que proporciona el hemisferio derecho. En la medida en que el individuo utilice los dos *hemisferios cerebrales* y que aproveche las capacidades que cada uno proporciona al mismo tiempo, logrará el despliegue de toda su potencialidad de desarrollo.

Tal como se mencionó anteriormente, uno de los recursos que se puede utilizar para estimular en forma deliberada la participación intensa de ambos *hemisferios cerebrales* en el aprendizaje de las matemáticas, consiste en asociar los conceptos matemáticos abstractos con situaciones o hechos concretos.

El psicólogo Robert B. Dilts recientemente estudió toda la información que logró encontrar sobre el proceso de pensamiento científico de Einstein, y concluyó que

> *Einstein afirmó que piensa previamente en términos de imágenes visuales y sentimientos . . . La representación verbal y matemática de sus pensamientos lo logró sólo después de consolidar el pensamiento creativo importante.*[1]

Por último, es conveniente señalar que la "inteligencia lógico-matemática" no tiene sus orígenes en la esfera auditiva-oral. En su lugar, esta forma de pensamiento puede ser vinculada con una confrontación con el mundo de los objetos.[2] Es por ello que para lograr el aprendizaje significativo de las matemáticas es necesario el empleo de recursos didácticos como los modelos físicos o los gráficos explicativos, que faciliten la comprensión y "aterricen" los conceptos abstractos de este campo del conocimiento humano.

EL VALOR DE LAS MATEMÁTICAS PARA EL CAMPO DE LA INGENIERÍA

Desde una perspectiva muy simple, las matemáticas se ocupan de los números, las figuras y cuerpos geométricos, y de las generalizaciones o extensiones de ideas relativas a éstas y demás elementos, no tratan de fuerzas, ni de velocidades, ni de campos eléctricos; sin embargo, el valor fundamental de las matemáticas, no reside tanto en lo que por sí mismas ofrecen sino en la ayuda que prestan al ingeniero para realizar el estudio de la solución de problemas técnicos y satisfactores sociales.

Ciertamente el estudio de los números y de los elementos geométricos es hasta cierto punto conocimiento de física; la cantidad es un importante hecho físico, igual que las propiedades de las figuras geométricas, pues éstas no son más que las características de las figuras materiales, la geometría es, además, el estudio del espacio, si bien estrictamente hablando, la creencia de que la geometría euclidiana expresa las leyes del espacio resultó ser imprecisa, las diversas geometrías elaboradas por el hombre son cuando menos posibles, y en algunos casos descripciones útiles del espacio físico.

Desde este punto de vista, es legítimo y natural que:

> *… las matemáticas sirven entre otras cosas, para expresar leyes físicas, y los procesos de las matemáticas se aplican para extraer nueva información física de las leyes físicas básicas.*[3]

---

[1] Dilts Robert B., *Strategies of Genius*, Meta Publications, Capitola, CA, 1994.
[2] Gardner Howard, *Frames of mind*, BasicBooks, New York, NY, 1993.
[3] Kline Morris, *Matemáticas, la pérdida de la incertidumbre*.

Ciertamente las asignaturas de Geometría Analítica, Análisis Gráfico, Geometría Descriptiva, y algunas otras disciplinas físicas como puede ser la Estática, se pueden estudiar por separado de manera independiente y sin relación alguna, tal como se realiza actualmente; sin embargo, el objetivo principal de darle sentido a la relación conceptual que guardan estas asignaturas y las aplicaciones tempranas que pueden tener en los inicios de la carrera, adquieren una mayor profundidad y significado, si se les relaciona.

En este sentido, los aspectos que guardan más interés en la Geometría Analítica como son la recta y el plano en el espacio, y su relación entre ellos, así como el álgebra vectorial elemental, resultan particularmente valiosas, ya que permiten simplificar mucho la teoría.

En el estudio de la geometría euclidiana, la asignatura de Análisis Gráfico tiene particular importancia. En la actualidad, la inclusión de nuevas tecnologías en la enseñanza puede potenciar el aprendizaje de esta disciplina.

Sin embargo, resulta muy útil el estudio de ciertos fenómenos físicos sencillos de Estática, donde el álgebra vectorial se aplica para construir y simplificar la base teórica fundamental desde esta perspectiva es posible que el alumno construya modelos matemáticos, que tengan que ver con los conceptos, relaciones y proposiciones que emplea la geometría formal, y se le adjudiquen a estos conceptos connotaciones físicas, entre otras cosas, el alumno también puede ir practicando algunos conceptos relativos a la medida de variables espaciales.

La geometría formal o abstracta

En toda teoría axiomatizada existe un estrecho paralelismo entre el tratamiento de las proposiciones y el de los conceptos del sistema. Las proposiciones se dividen en dos clases: los postulados de los cuales no se da demostración, y los teoremas que tienen que ser derivados de los postulados. Análogamente, los conceptos se clasifican en dos grupos: los conceptos primitivos o básicos, de los que no se da definición, y los demás. Cada uno de los cuales tiene que ser definido con precisión en términos de los conceptos primitivos o básicos, la admisión de algunos conceptos definidos es claramente necesaria para evitar una regresión continuada en la definición.

La axiomatización de la geometría en el plano propuesta por Hilbert, contiene seis términos primitivos:

1 punto
2 recta
3 yacer (un punto en una línea)
4 estar entre (como relación entre tres puntos que yacen en una línea recta)
5 congruencia de segmentos de línea
6 congruencia de ángulos

La geometría en el espacio, requiere, en esta misma axiomatización de Hilbert, dos términos más:

7 plano
8 yacer (un punto en el plano)

Todos los demás conceptos de la geometría, como ángulo, triángulo y círculo se definen en términos de esos conceptos básicos.

Desde luego que las palabras punto, línea recta, entre los mencionados a pesar que no están definidas, conllevan determinadas connotaciones, referentes a las conocidas figuras geométricas; pero la validez de las proposiciones es completamente independiente de esas connotaciones, es decir, resulta del todo innecesario atribuirles significación particular alguna.

Supongamos por ejemplo que en la geometría euclidiana sustituimos los términos de punto, línea recta, yacer, estar entre por los términos neutrales objeto de la clase 1, objeto de la clase 2, relación 1, relación 2 y supongamos también que presentamos esta “versión modificada” de la geometría a un matemático competente, desconocedor en absoluto de las connotaciones habituales de los términos primitivos. Para este matemático, todas las demostraciones seguirán siendo válidas, pues una demostración geométricamente rigurosa se basa en la deducción a partir exclusivamente de los axiomas, sin ninguna referencia a las interpretaciones habituales de los distintos conceptos geométricos usados: por tanto, no hay necesidad de atribuirle ninguna significación determinada a los términos primitivos de una teoría axiomatizada; y en una presentación lógica precisa de la geometría axiomatizada los términos primitivos se tratan consecuentemente como variables denominadas lógicas.

Como consecuencia de todo lo que precede, no puede decirse que la geometría afirme la verdad de sus postulados, puesto que estos últimos se formulan en términos de conceptos sin significación específica; por esta razón precisamente, los postulados no hacen ninguna afirmación específica.

La geometría así construida es una disciplina puramente formal, y se denomina por tanto, geometría formal; así pues una geometría formal, independientemente de que sea euclidiana o no euclidiana, no trata de ningún tema específico; en particular, no afirma nada acerca del espacio físico, todos sus teoremas contienen ideas abstractas por tanto verdaderos con certeza, porque precisamente carecen de todo contenido físico.

La geometría física o aplicada

Históricamente hablando, la geometría euclidiana tiene su origen en la generalización y sistematización de ciertos descubrimientos empíricos hechos en relación con la medición de áreas y volúmenes en la práctica de los agricultores y astrónomos de la época de la Grecia Clásica. Este origen de la geometría tiene un relevancia fáctica: es una ciencia empírica, que puede llamarse, en términos muy generales, teoría de la estructura del espacio físico o más brevemente, geometría física.

Cuando el ingeniero o el físico usan los conceptos de punto, línea, recta o plano, les asigna una concreta significación física en las afirmaciones de la geometría física, esto es, puede decirse que la geometría física se obtiene mediante, lo que en la lógica contemporánea se llama una interpretación semántica de la geometría pura. En general, una interpretación semántica de una teoría matemática pura, consiste en dar a cada término primitivo una significación específica.

En virtud de la interpretación física de los términos inicialmente sin interpretar, de una teoría geométrica, se asigna indirectamente una significación física también a cada concepto definido de la teoría; y si todo término geométrico se toma ahora con su significación física, todo postulado y todo teorema de la teoría considerada se convierte en una afirmación de la física, respecto a la cual, pueden ya plantearse con sentido, todas las cuestiones de su verdad o falsedad.

Así, la interpretación física transforma una teoría geométrica pura en un sistema de hipótesis físicas que, si es verdadera, puede considerarse que constituye una teoría de la estructura del espacio físico; en este sentido, todo problema que se plantee y resuelva en este contexto, no es de matemática pura, sino de ciencia empírica, el cual tiene que ser resuelto sobre la base de experimentos adecuados o bien de observaciones sistemáticas.

El siguiente ejemplo, correspondiente a un problema de estática, proporciona una idea mediante el cual puede resolverse mediante los recursos de Análisis Gráfico (geometría abstracta gráfica), del álgebra lineal o geometría vectorial (geometría abstracta analítica) y experimentalmente a partir de observaciones sistemáticas y mediciones directas.

Planteamiento del problema

Sobre un bastidor horizontal se colocan cuatro soportes verticales de diferentes alturas, luego se sujetan dos varillas de acero de longitudes P_1P_2 y P_3P_4, de tal forma que se crucen, y por lo tanto exista una distancia mínima entre ellas; a continuación, se colocan los extremos de un resorte, cuya longitud natural sea menor que la distancia mínima entre las varillas, y se coloca de tal forma que la extensión del resorte sea perpendicular a ambas varillas. Ver *Figura 1*.

La tesis que se desea verificar es la siguiente: la distancia mínima entre dos varillas que se cruzan, está determinada por el segmento P_5P_6, es decir por la longitud del resorte deformado, siempre y cuando, sea perpendicular simultáneamente a las varillas P_1P_2 y P_3P_4.

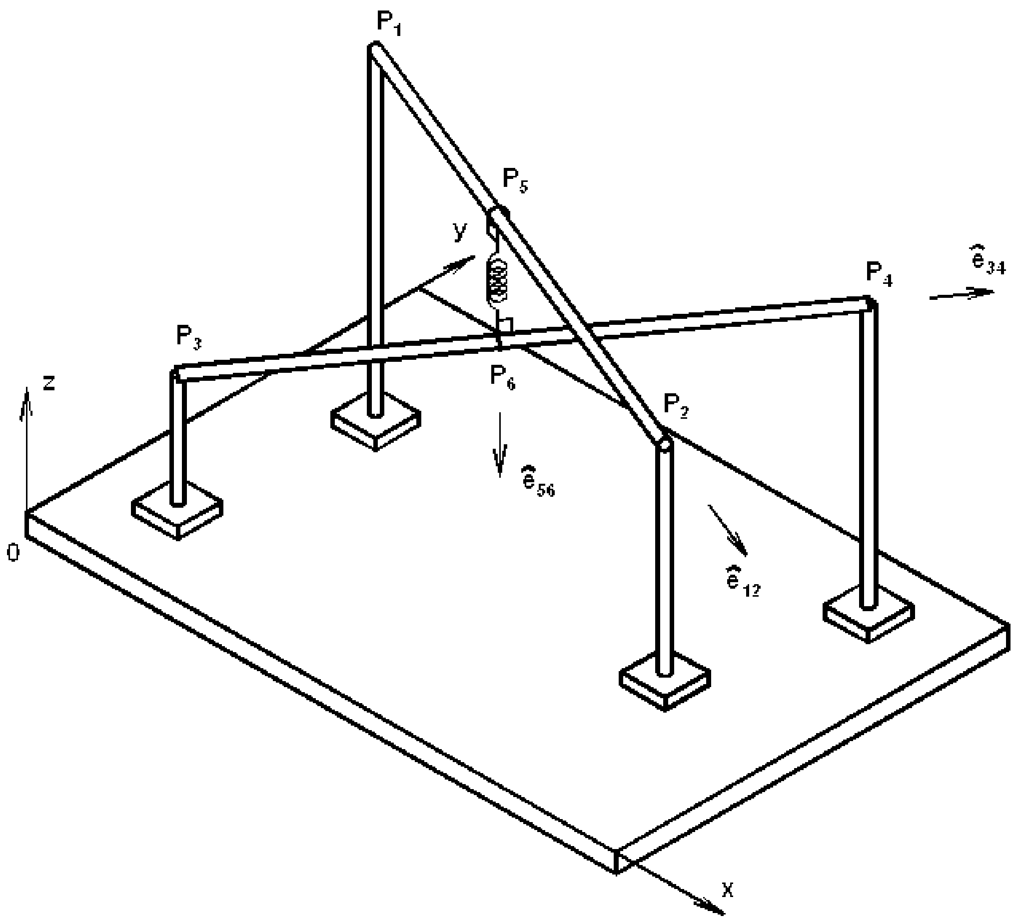

Figura 1. Montaje del experimento.

Obtención y contrastación empírica de la distancia mínima

a) Mediante el auxilio de una cinta métrica se mide la longitud P_5P_6.
b) Con la ayuda de una plomada se miden las cotas de los puntos P_5 y P_6, y con el empleo de escuadras las correspondientes abscisas y ordenadas.
c) Conocidos los valores numéricos de estas coordenadas, se obtiene a partir de una formulación vectorial sencilla, el módulo del vector P_5P_6, el cual debe corresponder aproximadamente a la longitud deformada del resorte.
d) Se contrasta el porcentaje de desviación con respecto a la medición directa explicada en el inciso a).

Verificación a partir de los recursos del álgebra lineal (álgebra vectorial)

Se plantea la ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{P_1P_5} + \overrightarrow{P_5P_6} + \overrightarrow{P_6P_3} + \overrightarrow{P_3P_1} = \vec{0} \qquad (1)$$

Sean los vectores unitarios:

$$\hat{e}_{12} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\left|P_1P_2\right|}$$

$$\hat{e}_{34} = \frac{\overrightarrow{P_3P_4}}{\left|P_3P_4\right|}$$

$$\hat{e}_{56} = \hat{e}_{34} \times \hat{e}_{12}$$

$$\hat{e}_{31} = \frac{\overrightarrow{P_3P_1}}{\left|P_3P_1\right|}$$

Con estos vectores unitarios se pueden definir las siguientes expresiones:

$$\overrightarrow{P_1P_5} = d_{15}\hat{e}_{12} = \lambda_{15}d_{12}\hat{e}_{12} \quad \text{(dependencia lineal)}$$

$$\overrightarrow{P_5P_6} = d_{min}\hat{e}_{56}$$

$$\overrightarrow{P_6P_3} = d_{63}\left(-\hat{e}_{34}\right) = \lambda_{63}d_{34}\left(-\hat{e}_{34}\right) \quad \text{(dependencia lineal)}$$

$$\overrightarrow{P_3P_1} = d_{31}\hat{e}_{31}$$

Por lo que la ecuación (1) queda determinada por la combinación lineal de vectores:

$$\lambda_{15}d_{12}\hat{e}_{12} + d_{min}\hat{e}_{56} + \lambda_{63}d_{34}\left(-\hat{e}_{34}\right) + d_{31}\hat{e}_{31} = \vec{0} \tag{2}$$

En esta ecuación vectorial de tres dimensiones se tienen tres incógnitas, d_{min}, λ_{15} y λ_{63}, pero al agrupar componentes e igualarlas con las correspondientes componentes nulas de la derecha, se llega a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, por lo cual se pueden obtener los valores numéricos de dichas incógnitas, y por lo tanto poder conocer las coordenadas de los puntos P_5 y P_6; por último, es posible verificar que:

$$d_{min} = \left|\overrightarrow{P_5P_6}\right| \tag{3}$$

y este resultado compararlo con el resultado de la medición directa, realizada en el experimento anterior.

De manera similar, se puede plantear la ecuación:

$$\overrightarrow{P_2P_4} + \overrightarrow{P_4P_6} + \overrightarrow{P_6P_5} + \overrightarrow{P_5P_4} = \vec{0} \tag{4}$$

y mediante un procedimiento similar llegar al mismo resultado mostrado en (3).

Verificación a partir de los recursos de la geometría descriptiva

A partir de las mediciones efectuadas, se transforman a coordenadas propias de la geometría descriptiva, con base en las cuales es posible trazar las proyecciones horizontal y frontal de los segmentos P_1P_2 y P_3P_4.

El procedimiento más usual para determinar la distancia mínima entre dos rectas dadas con el empleo del método conocido como de cambio de planos, es obtener primeramente una proyección en la que una de las rectas aparezca en magnitud real (en la cual el plano de proyección correspondiente es paralelo a dicha recta), y posteriormente trazar la proyección en que la recta anterior aparezca como punto, y en el cual el plano de proyección resulta ser perpendicular a la recta considerada.

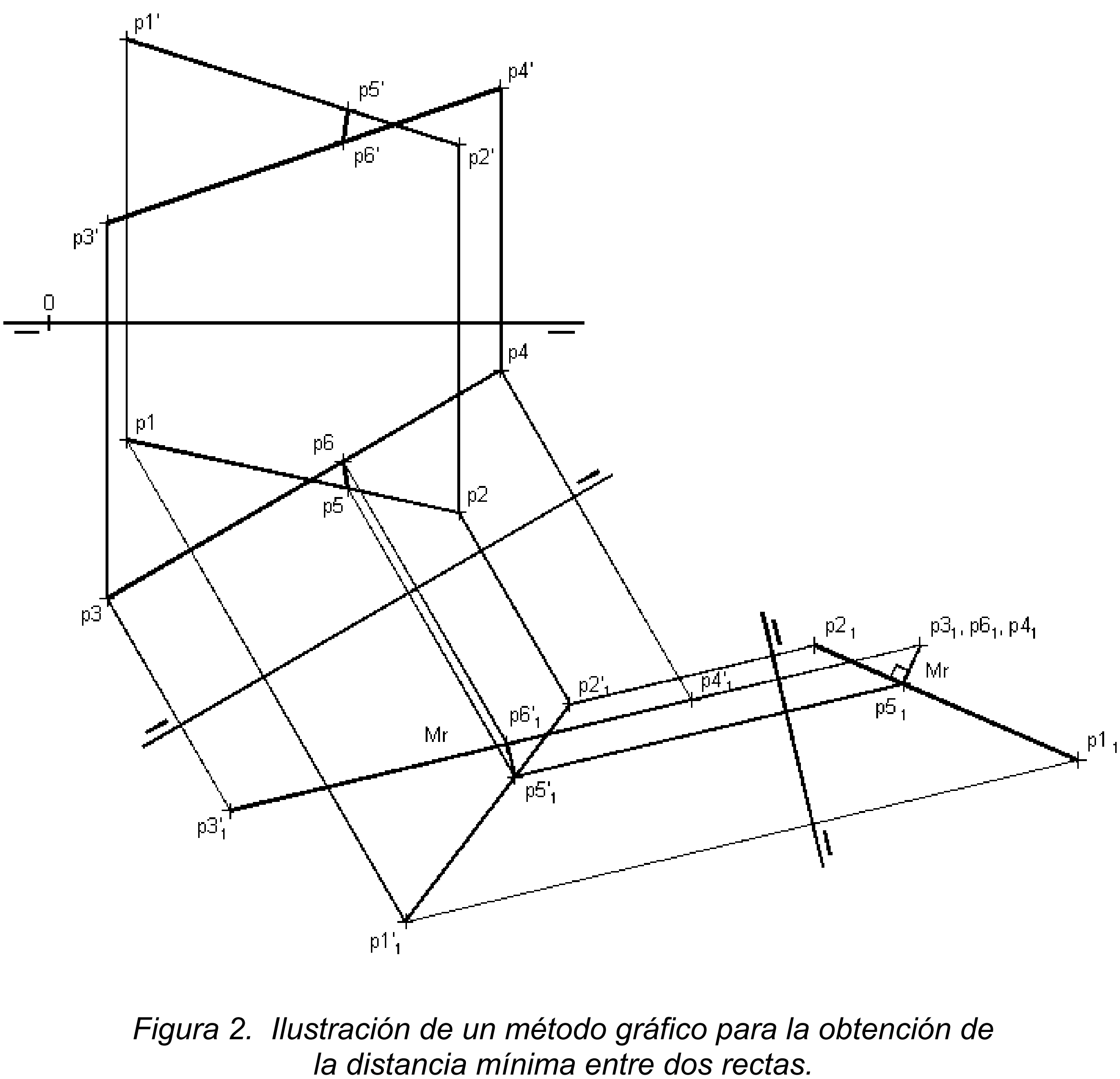

Figura 2. Ilustración de un método gráfico para la obtención de la distancia mínima entre dos rectas.

En esta última proyección es posible trazar el segmento de distancia mínima como aquél que va desde la proyección de la recta como punto, perpendicularmente a la proyección de la segunda recta; este segmento de distancia mínima aparece en magnitud real, pues debe ser paralela al último plano de proyección.

Finalmente, se pueden verificar las coordenadas de los puntos P_5 y P_6, con base en el "regreso" de las proyecciones del segmento de distancia mínima a las proyecciones originales.

El procedimiento gráfico de obtención de la distancia mínima entre dos rectas se ilustra en la *Figura 2*.

REFLEXIONES SOBRE LA RELACIÓN DE LA GEOMETRÍA CON OTRAS ASIGNATURAS DEL PLAN DE ESTUDIOS DE LAS CARRERAS DE INGENIERÍA

De la experiencia de los autores en la impartición de las asignaturas curriculares Geometría Analítica y Estática, se percibe que ciertamente sigue existiendo una deficiencia en los antecedentes de geometría euclidiana para la interpretación y asimilación de nuevos conceptos, más palpable a la hora de resolver ejercicios. Recordemos que antiguamente el análisis y resolución de ejercicios de mecánica se hacía con procedimientos gráficos, y que con la inclusión de la herramienta que proporciona el álgebra vectorial, el planteamiento y la resolución de problemas se hizo de forma analítica, dando mayor importancia a las estructuras formales y dejando un tanto de lado la formación gráfica, en lugar de conjuntarlos. Si bien es cierto que se ganó en precisión en ese momento, también es cierto que actualmente se obtiene la misma precisión por medio del ordenador y con el programa adecuado, amén de darle una mejor presentación a los trabajos que así lo requirieran, fomentando así un mejoramiento de carácter integral.

Por otro lado creemos que como parte integrante de la profesionalización de la enseñanza, está la diversificación en la impartición de diferentes asignaturas, y no la especialización de dar sólo un par de asignaturas (en algunos casos una sola asignatura) durante mucho tiempo, pues al conocer diferentes necesidades, forzosamente se recurre a diferentes medios para poder satisfacerlas, y estos medios son los que enriquecen el quehacer académico con la vinculación de nuevas áreas y otros enfoques.

La geometría euclidiana puede aprenderse inclusive sin la generación de un solo gráfico, pero ayuda mucho la inclusión de figuras. En el caso de la geometría analítica o la mecánica, se ponderan los procedimientos matemáticos, pero se pueden rescatar también procedimientos gráficos que permitan fortalecer el aprendizaje o facilitarlo, con una combinación de lo formal con lo concreto en beneficio de los resultados buscados.

Cuando un alumno expresa alguna duda, o hay necesidad de aclarar algún concepto o procedimiento, no se trata de repetir lo que anteriormente se dijo, lo cual sólo ayuda cuando el alumno no escuchó, sino decirlo de forma diferente o empleando ejemplos o contraejemplos. No cabe duda que un mejor conocimiento del lenguaje ayuda de forma sobresaliente, y este conocimiento del lenguaje lo podemos mejorar básicamente por medio de la lectura. Asimismo, también ayuda mucho poder expresarnos gráficamente como recurso didáctico o como fortalecedor conceptual, de ahí que estemos convencidos que sea conveniente desarrollar mejor la expresión gráfica, así como es conveniente fomentar la lectura.

Ahora bien, si la geometría euclidiana es una parte de las matemáticas, ¿por qué no enriquecer sus contenidos o conjuntarlos con los de áreas de conocimiento afines? Muchos de los procedimientos que se siguen en la enseñanza de la matemática son resultado directo de la aplicación del método axiomático desarrollado por Euclides, entonces ¿por qué no fortalecer la enseñanza de dicho método e intercalar procedimientos gráficos y analíticos para obtener mejores resultados?

Los alumnos de las generaciones 1992 a 1999 del Programa de Alto Rendimiento Académico de nuestra Facultad, durante su primer semestre cursaron además de las asignaturas curriculares, Geometría Descriptiva como materia adicional. Varios de ellos nos externaron que esta asignatura les fue muy útil para el aprendizaje cabal de la Geometría Analítica, y lo cual les permitió desempeñarse mejor en asignaturas de mecánica, de cálculo vectorial y de ciencias de la ingeniería.

Esta apreciación se pudo verificar objetivamente con base en las estadísticas de calificaciones obtenidas por los citados alumnos, en las que se puede verificar que de los alumnos que aprobaron el curso de Geometría Descriptiva, más del 50% obtuvo una calificación de 10 (o MB) y sólo reprobó menos del 5% en Geometría Analítica, contrastando claramente con la estadística de aprobación de alrededor del 40% que tienen los alumnos que no cursaron Geometría Descriptiva.

CONCLUSIONES

La teoría del aprendizaje acelerado propone que mientras más sentidos entren en contacto con el objeto de estudio, el aprendizaje será más completo y eficiente. Con base en esta aseveración, podemos establecer que cuando los contenidos de aprendizaje son estudiados a través de todos los sentidos, los estudiantes hacen sus propias conexiones entre lo que se tiene que aprender y lo que ya se tiene entendido, logrando un proceso de aprendizaje más sólido.

Algunas técnicas que estimulan la participación del *hemisferio derecho* en el proceso de aprendizaje, incluyen el pensamiento visual, la fantasía, el evocativo, las metáforas, la experimentación, la manipulación de materiales, la simulación, el aprendizaje multisensorial y el uso de la música.

El enfoque que debe tener la enseñanza de la geometría, formal, analítica y descriptiva, se puede ver notablemente mejorado, si lejos de tratarlas como entes separados, como actualmente se hace, se logra una vinculación e intercalación de contenidos, con resolución de ejercicios específicos con los diferentes procedimientos que tales disciplinas ofrecen. Esto ayudaría a fortalecer el aprendizaje, generando estructuras de conocimiento más sólidas, y propiciando también el empleo de ambos hemisferios cerebrales.

Para ello es imperativo que los profesores que impartimos las asignaturas relacionadas con la geometría, podamos en un principio intercambiar la enseñanza de dichas asignaturas, es decir, profesores que imparten Análisis Gráfico o Geometría Descriptiva, que enseñen Geometría Analítica o Estática, así como aquéllos que imparten estas dos últimas se involucren en la impartición de Análisis Gráfico, por ejemplo, en tanto no se hace una revisión a fondo de los programas respectivos, pues lo ideal sería que tuvieran tanto conceptos formales (Geometría Analítica), como manejo de conocimientos concretos (Análisis Gráfico con manejo de aspectos gráficos, o Estática con modelado por medio de la experimentación en el laboratorio).

La experiencia acumulada tanto con alumnos del Programa de Alto Rendimiento Académico, como con alumnos que han tomado Cursos Propedéuticos, nos deben permitir avanzar en la estructuración de los programas de las asignaturas, que en un contexto global de lo que se pretende de la enseñanza de la ingeniería, sea una actividad interdisciplinaria que responda aún mejor a las necesidades cada vez más apremiantes que demanda nuestra, también cada vez, más poblada sociedad.

BIBLIOGRAFÍA

Castelnuovo Emma, *Didáctica de las matemáticas*, Serie de matemáticas, Ed. Trillas, México, 1970.

Gardner Howard, *Frames of mind*, BasicBooks, New York, NY, 1993.

González García Enrique, *Piaget*, Grandes educadores, Ed. Trillas, México, 1986.

Kline Morris, *Matemáticas, la pérdida de la incertidumbre*, Siglo XXI Editores, España, 1980.

Newman James R., *El mundo de las matemáticas N° 5, Estructuras* lógicas, Sigma, España, 1983.

Wenger Win, Poe Richard, *The Einstein Factor*, Prima Publishing, Rocklin, CA, 1996.