EXPERIENCIAS PARA MEJORAR EL APROVECHAMIENTO EN EL APRENDIZAJE

Miguel Eduardo González Cárdenas
José Horacio Sandoval Rodríguez

Facultad de Ingeniería, UNAM

Introducción.

La búsqueda de formas alternativas para la enseñanza de las matemáticas ha llevado a algunos profesores a plantearla de diferentes maneras, tratando de conservar la formalidad y sobre todo que despierte el interés en los alumnos por aprenderlas.

En dicho proceso se presentan una serie de situaciones que lo obstaculizan, entre ellas podemos mencionar: la falta de conocimientos e inexperiencia por parte de la persona que intenta enseñar, la falta de interés por parte del alumno y la carencia de alternativas didácticas que le permitan al profesor despertar el interés del alumno para aprender matemáticas. Esta situación alcanza dimensiones importantes cuando está inmersa en un programa de nivel licenciatura, donde la matemática es una área de conocimiento indispensable para el alumno.

Es precisamente en esa dimensión y en ese contexto donde los autores ubicamos las matemáticas y por tanto dirigimos nuestra participamos en este foro.

Nuestra participación se enfoca a la aplicación de alternativas didácticas que los autores hemos utilizado; aclarando que hay algunos aspectos que en ocasiones han funcionado y en otras no, que presentan tanto ventajas como desventajas, dependiendo de ciertos factores que mencionaremos en su momento.

Las Propuestas son:

1.- Trabajar con programas tutoriales y programas virtuales que se deben usar como un instrumento auxiliar en la enseñanza.

2.- Como parte de las tareas y trabajos a realizar por parte del alumno, solicitarle realice un modelo físico relacionado con algún tópico de la materia en estudio. El objetivo es que el alumno mediante un trabajo manual desarrolle su creatividad.

3.- Proporcionar los elementos para obligar al alumno, dentro de lo posible, a razonar más que memorizar.

Respecto a las tres últimas propuestas, el estudio realizado por la ANUIES y presentada en el libro: La Educación Superior hacia el siglo XXI, señala: “La educación superior sigue siendo excesivamente teórica, en tanto en los trabajos prácticos predomina el carácter ilustrativo, más que la experimentación o el contacto directo con problemas concretos” y “Durante los últimos años, se han realizado transformaciones diversas en los métodos educativos, pero aún en muchas instituciones se continua privilegiando la enseñanza sobre el aprendizaje con métodos tradicionales centrados en la cátedra, que privilegian lo memorístico y la reproducción de saberes sobre el descubrimiento”

PROPUESTAS

1.- Programas tutoriales y programas virtuales.

Nuestra primer experiencia con programas tutoriales se remonta al año 1988 cuando elaboramos el guión para un programa llamado: Tutor BASIC. Este programa se creó tratando de proporcionar, a los profesores que impartían la asignatura de Computadoras y Programación, un material de apoyo didáctico que permitiera agilizar la exposición, canalizando a los alumnos, al usar este programa que puede iterar indefinidamente sobre un concepto o instrucción particular y ahorrar estas repeticiones dentro de la cátedra.

El programa tutor, a diferencia de otros programas comerciales, enfocaba más la elaboración de algoritmos elementales donde se hacía uso del menor número posible de conceptos e instrucciones, tratando que cada pantalla fuera fácil de leer y por supuesto, sin descuidar la parte correspondiente a la codificación.

El programa se utilizó mientras el lenguaje BASIC formaba parte de la materia referida y solamente algunos profesores lo trabajaron con sus alumnos. Tal vez no lo conocían, no lo consideraban una herramienta útil o bien no se disponía de suficientes computadoras.

Tuvimos buenas experiencias. De un cuestionario que elaboramos y que se aplicó a alumnos de diferentes grupos, la gran mayoría de éstos opinaron que el tutor les pareció claro, adecuado y útil para principiantes. Después de trabajar más de 2 años con el tutor en diferentes grupos concluimos que el programa tutor era una herramienta didáctica útil, tal y como fue planeado, es decir, no sustituía al profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

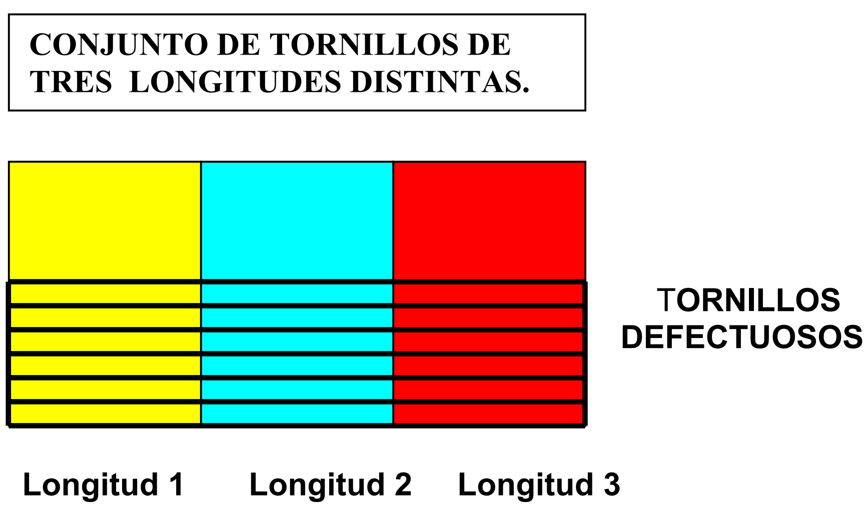
Posteriormente se elaboraron dos programas, ambos desarrollados como tesis de licenciatura; uno de ellos es un programa tutor que cubre aproximadamente el 50% de los contenidos del programa y el otro un 85%, este último posee, adicionalmente, acceso vía internet.

Otras experiencias con programas tutoriales y programas matemáticos, las tuvimos en las asignaturas: Métodos Numéricos, Ecuaciones Diferenciales y Propedéutico de Cálculo. En ellas hemos utilizado como material de apoyo didáctico programas como Calculus, Derive, Maple y Numericón.

La mayoría de los alumnos que trabajaron con ellos coincidieron en que los programas les ayudaron a entender algunos conceptos y que les había sido de gran utilidad para la asignatura. Sin embargo, detectamos también alumnos que al no entender los conceptos básicos explicados en clase no fueron capaces de detectar errores inherentes a los programas y ocasionalmente algún alumno quería trabajar exclusivamente con ellos, omitiendo las clases teóricas. Situación que debe tenerse en cuenta al usar estas herramientas.

<u>2.- Modelos físicos que muestran algún concepto específico realizado por los alumnos.</u> En asignaturas como Ecuaciones Diferenciales, Probabilidad, Laboratorio de Física y Propedéutico de Cálculo, les solicitamos algún modelo físico, que puede ser una maqueta de algún concepto de estas asignaturas.
Este tipo de “herramienta didáctica” tiene como objetivo que mediante un trabajo manual el alumno comprenda conceptos y los aplique desarrollando su creatividad. Para tal efecto, conforme se imparte el curso se proporcionan ideas para la realización de modelos y maquetas.

2.1 Como primer ejemplo se tiene la materia de Probabilidad.
En esta asignatura, al inicio del semestre se les pide que consigan un conjunto de objetos con características afines: canicas, tornillos, clips, bujías, plumas, etc. Cada conjunto de objetos debe prestarse a hacer al menos tres particiones(subconjuntos); por ejemplo, tornillos de diferentes tamaño. Y una vez que se tengan las particiones, definir un conjunto con una característica común a las tres particiones; por ejemplo; tornillos defectuosos.



A partir de los objetos seleccionados y clasificados como se muestra en la figura anterior, se les recuerdan conceptos; tales como: conjunto, subconjunto, conjunto vacío, conjunto universo, conjuntos mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos, y cardinalidad. Posteriormente se procede a relacionar los conceptos estudiados en teoría de conjuntos a conceptos de probabilidad: evento, evento seguro, evento imposible, probabilidad clásica, probabilidad condicional, teorema de Bayes, variables aleatorias, funciones de probabilidad conjunta y marginal, población, muestra, combinaciones, ordenaciones, etc.

Uno de los problemas principales al que se enfrentan la mayoría de los alumnos cuando estudian matemáticas es el hecho de no entender que la matemática es un lenguaje y que como tal tiene todo un marco conceptual y que dependiendo de su conocimiento y del manejo del mismo se podrá o no tener elementos para aplicarlos. Sus expectativas cuando estudian matemáticas se centran generalmente en encontrarle un significado o una aplicación, de otra manera será un conocimiento que potencialmente va a ser archivado en memoria y a olvidarse

Trabajar con modelos como el ejemplificado anteriormente permite aterrizar conceptos que a los alumnos originalmente les cuesta trabajo comprender; por ejemplo: conjunto universo, conjunto vacío y cardinalidad del conjunto vacío.
Conceptos que son antecedentes para la materia de Probabilidad, pero que pocos alumnos los entendieron en su momento, por considerarlos inútiles y sin aplicación. También les permite entender conceptos más elaborados como probabilidad condicional, dependencia e independencia de eventos, etc.

2.2 Como segundo ejemplo citaremos el caso del **laboratorio de Física Experimental** en el cual al finalizar el curso, el alumno tiene que entregar un proyecto que consiste en mejorar alguna de las prácticas realizadas en el laboratorio o proponer una nueva. En ambos casos el diseño y construcción debe realizarlos el alumno con el material e instrumentos de medición que estén al alcance de sus posibilidades.

En el primer caso los alumnos tienen que entregar un modelo físico junto con el reporte correspondiente a la práctica, pero mejorada, en el que se demuestre que los errores entre los valores teóricos y los valores experimentales se reducen. Como ejemplos de proyectos típicos que se entregan semestre a semestre se pueden mencionar los siguientes:

a) Plano Inclinado y Caída libre. Estos modelos se utilizan en dos de las prácticas, sin embargo el manejo inadecuado de los sensores que detectan el cuerpo en movimiento o el del interruptor para soltarlo, causan errores en los tiempos de las lecturas.

En varias ocasiones los alumnos han sido capaces de presentar un modelo en el que realmente han demostrado su creatividad e ingenio, al mejorar los tiempos obtenidos al realizar la misma práctica pero con el equipo del laboratorio.

b) Construcción de un manómetro diferencial.
c) Caracterización de un instrumento de medición. Los instrumentos caracterizados son generalmente balanzas y relojes.

En el caso de que se proponga una nueva práctica, el modelo físico y el reporte se harán sobre alguno de los conceptos incluidos en el programa de la asignatura. Aquí la parte importante es consultar bibliografía y seleccionar un experimento sencillo, ilustrativo y cuyo modelo físico sea fácil de construir. Una característica de este proyecto es que todo el material y los instrumentos son proporcionados por el alumno.
En ambas situaciones se proporciona asesoría a los alumnos con ideas, bibliografía y uso de materiales para el diseño de su modelo.

Ventajas y Desventajas.

- En un principio a la mayoría de los alumnos les resulta difícil desarrollar un trabajo manual por varias razones; entre las principales son: desconocimiento de materiales y manejo de herramientas.
- No conocen o no entienden la relación y la diferencia entre un modelo físico y uno matemático.
- La mejora de una práctica implica el haberlas realizado con anterioridad, y la entrega del proyecto se hace a más tardar en la fecha que se efectúa la última práctica programada.
- Los alumnos que han desarrollado una habilidad manual al haber trabajado en algún taller mecánico, de carpintería , etc, o bien estudiaron una carrera técnica tienen ventaja en el conocimiento de materiales y herramientas sobre sus compañeros.
- Al involucrarse en la planeación y diseño de un modelo físico entienden el concepto y detectan algunas de las causas por las que las mediciones experimentales no coinciden con los valores teóricos.
- Aprenden a plantear hipótesis y comprenden la razón de ser de las mismas. Por ejemplo, en el experimento de caída libre: La hipótesis de considerar nula la resistencia del aire les permite obtener un modelo matemático simple.
- Algunos alumnos no delimitan sus tiempos y conocimientos y pretenden diseñar un modelo físico que está fuera de su alcance. Por otro lado, se han presentado casos en los cuales los alumnos han diseñado modelos físicos que requieren poco material y resultan ser igual de eficientes que los utilizados en el laboratorio.

<u>3.- Proporcionar los elementos para que el alumno razone más que memorizar.</u>

3.1 En el ejemplo de los conjuntos mencionado en este trabajo en el punto 2, para la materia de Probabilidad, permite deducir y no memorizar conceptos. La forma de hacerlo es la siguiente:
Una vez que se tiene físicamente la colección de objetos y definidas las particiones, se define el concepto de Probabilidad mediante el enfoque clásico(número de casos favorables de un Evento / número de casos posibles).
A los alumnos les resulta sencillo entenderlo y comprenderlo al contabilizar el número de elementos del espacio muestral y el de los elementos que conforman el evento.
De la misma manera se les guía para que establezcan los axiomas de la probabilidad; por ejemplo: La probabilidad de que se presente un evento es un valor comprendido en el intervalo cerrado de cero a 1. También se puede aprovechar para hablar y definir la probabilidad de la intersección de eventos y entender que ésta es equivalente a la probabilidad conjunta de dichos eventos.

3.2 En la materia de Métodos Numéricos, en el tema de errores, se ha dejado como tarea durante varios semestres el lanzamiento de dados y monedas.
La meta fundamental de este trabajo es la aplicación y análisis de los conceptos de error absoluto y error relativo mediante la comparación de la distribución de probabilidad matemática o ideal, contra la distribución experimental o real, que ha sido elaborada, medida y analizada por el propio alumno. Se incluyen histogramas y aspectos elementales de análisis combinatorio.
El ejercicio consiste en lanzar dados o monedas cierto número de veces; contar el número de eventos ocurridos para cada posible valor y trazar su distribución. Por otra parte definir matemáticamente el espacio muestral, calcular sus frecuencias y obtener la distribución teórica. Por último comparar ambas distribuciones, experimental y teórica; analizar sus analogías y diferencias e interpretar las diferencias como errores, absolutos y relativos.
El proceso se repite con uno y dos dados, tres y cuatro monedas, provocando cambios en las distribuciones de probabilidad.
Al momento de dejar este trabajo, que es la primer tarea del curso, se les orienta respecto a la forma de realizarla, encaminándolos por el lanzamiento de un sólo dado y explicando: el concepto de espacio muestral desde el punto de vista teórico; la formación del histograma y de la distribución ideal o teórica, que es uniforme; el espacio muestral asociado con la cantidad de formas en que puede caer un dado; las formas o marcas usuales de registrar y contar manualmente los eventos para calcular la frecuencia real o experimental; la formación del histograma y la distribución real o experimental correspondiente; la comparación de ambas distribuciones; la diferencia entre la cantidad de eventos reales o experimentales respecto al valor o cantidad ideal o teórica, interpretado como el error absoluto; la misma diferencia dada en porcentaje e interpretada como el error relativo; y por último se les indica los alumnos que deben intentar de explicar estas diferencias.
No se hace ninguna aclaración sobre las distribuciones correspondientes a los otros tres tipos de lanzamiento, sólo se señala que se hacen de manera semejante, intentando que los alumnos las generen y cotejen los datos experimentales que ellos mismos realizaron. En todos los casos se pide que analicen y traten de justificar las diferencias entre ambas distribuciones.
Tratando de normalizar y separar las etapas necesarias para resolver este problema se tiene:

1ª Etapa. Lanzamiento de un dado.
Se pide al alumno lanzar un dado determinado número de veces, algo así como 120 o 150, el cual debe ser múltiplo de 6 que es el número de elementos del espacio muestral, para que cada cara tenga la posibilidad teórica de salir 20 o 25 ocasiones. Es obvio, y el alumno así lo percibe, que tanto la distribución de su experimento como la ideal, serán o deben iguales, en este caso, uniforme. Los alumnos protestan por el número de lanzamientos, les parece muy alto.
A través de este ejercicio tan simple, se les enfrenta desde el inicio del curso a la realidad, una realidad simplificada y limitada a números enteros, pero realidad al fin. Se les hace patente que el valor teórico de eventos para cualquier número del dado, será la sexta parte de los lanzamientos, y que experimental y generalmente hay otro valor, el real, que ellos han generado y medido.

La única conclusión es que la realidad y la teoría, suelen ser distintas y esta diferencia se puede considerar como error, dispersión, tolerancia, etc.
Por último, aprovechando esta oportunidad poco frecuente, se pide al alumno que califique cualitativamente, emitiendo un juicio de valor, los errores que obtuvo en su experimento, considerándolos desde insignificantes hasta inadmisibles, y que justifique su calificativo. Inmediatamente después se le hace ver que ese calificativo se está aplicando al experimento, y en particular al dado, el objeto de experimentación o análisis. También se comenta la viabilidad de la justificación.
Para aquellos alumnos que pueden y quieren simular estos experimentos en computadora, se les pide que multipliquen el número de lanzamientos por 100, con lo que deberán simular 12,000 o 15,000 lanzamientos de este único dado.

2ª Etapa. Lanzamiento de dos dados y cálculo de la suma de sus caras superiores.
Es el mismo problema que en la etapa anterior, incrementando la dificultad y agregando la propiedad conmutativa de la suma. Permite aclarar y aplicar los conceptos de análisis combinatorio, de ordenación y combinación de dos eventos independientes.
El espacio muestral se calcula fácilmente al considerar que las seis opciones que pueden obtenerse de un dado son independientes de las seis opciones del otro dado. Por tanto, aplicando la regla del producto para la conjunción de eventos independientes, se obtienen 36 elementos para formar el espacio muestral.
Como los valores de ambos dados se relacionan a través de la suma, se tiene que el número dos sólo se puede obtener de una manera: $1 + 1 = 2$, o sea sólo un elemento del espacio muestral; el tres se obtiene sólo de dos maneras diferentes: $1 + 2 = 2 + 1 = 3$, usando dos elementos del espacio muestral y por tanto la probabilidad del tres se calcula sumando la probabilidad de cada uno de ellos; el cuatro tiene tres maneras: $1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 = 4$ y la probabilidad será la suma de la probabilidad de cada uno de los tres elementos muestrales; y así sucesivamente hasta el número siete que se obtiene de seis maneras diferentes.
El número ocho disminuirá los posibles elementos muestrales a cinco, y así hasta llegar al doce que sólo puede obtenerse de una manera al igual que el número dos.
Por tanto, la distribución teórica es simétrica y triangular, partiendo del mínimo en el número dos, llegando al máximo en el siete y retornando al mínimo en el doce.
El número de lanzamientos debe ser múltiplo de 36, por tanto deben ser al menos 360 lanzamientos para lograr 10 opciones en cada elemento muestral, y cuando se hace en computadora serán 36,000 lanzamientos. La protesta de los alumnos en esta etapa es superior a la protesta de la etapa anterior, y se permite una reducción hasta 180 como mínimo.
La justificación de los errores absoluto y relativo, empieza a perder importancia en esta etapa, dado que las razones que pueden argumentar son las mismas de la etapa anterior, por tanto, el profesor debe recordarlas para que asimilen estos conceptos. En cambio, eventualmente y aprovechando que la distribución es simétrica y triangular, el profesor ha usado el error para detectar valores arbitrariamente inventados por los alumno, que en ocasiones llegan a presentar los números dos o doce, con frecuencias cercanas a las del seis, siete u ocho, o viceversa. Es grande la sorpresa que se llevan estos alumnos cuando se les penaliza por su falta de seriedad y honestidad.

Conviene cerrar esta etapa con la referencia y explicación del juego de azar de las ferias denominado "Chicos y Grandes", donde el número 7 pertenece a la banca y es con el que todos pierden. Esta referencia real la pueden comprobar en cualquier feria y permite alcanzar en los alumnos, niveles de atención y aprendizaje bastante profundos.

3ª Etapa. Lanzamiento de tres y cuatro monedas.
Al variar los elementos en estudio de dados a monedas, se fortalecen y amplían los conceptos de espacio muestral, histogramas y distribución de frecuencias, errores absoluto y relativo.
Explicando al alumno las características del espacio muestral obtenido ahora con monedas y usando un acercamiento inductivo, se tiene que para una moneda hay dos posibles resultados de la moneda o elementos del espacio muestral; con dos monedas se tiene 2 * 2 = 4 elementos; con tres monedas serán 2 * 2 * 2 = 8; con cuatro se obtienen 16 elementos, etc. Por tanto lo ideal es usar 160 lanzamientos paras ambos experimentos; con tres monedas teóricamente se obtendrán veinte eventos para cada elemento y con cuatro monedas serán diez por elemento, sin embargo debido a las crecientes protestas de los alumnos, se logra negociar al orden de 96, 112 o 128 lanzamientos.
Inesperadamente, la forma de contar los eventos y asociarlos con los elementos del espacio muestral, representa para los alumnos una gran dificultad conceptual, provocando que en los histogramas mezclen las dos caras, sol y águila, en forma incoherente. Esta dificultad la superan fácilmente, cuando se les aclara que no son dos variables independientes, sino una sola y su negación. Sea por ejemplo el sol, entonces para una moneda el espacio muestral tendrá dos elementos, el sol y el no sol, y el histograma correspondiente tendrá sólo dos valores, cero soles y un sol. Como supuestamente ambos tienen la misma probabilidad de salir, la distribución será uniforme, al igual que en la 1ª etapa de un sólo dado.
Con dos monedas el espacio muestral tendrá cuatro elementos: dos soles, un sol y un no sol, un no sol y un sol, u por último dos no soles, correspondiendo en el histograma a tres valores que son cero, uno y dos soles, donde la probabilidad de cero y dos soles es sólo la de un elemento del espacio muestral, y la probabilidad de un sol es la suma de la correspondiente a dos elemento, por tanto la distribución será simétrica y triangular, igual que cuando se usaron dos dados.
Por último se lleva al alumno al ejercicio de tres monedas, con cuatro valores en la abscisa del histograma que son: cero soles o tres no soles; un sol y dos no soles que pueden formarse con sol + no sol + no sol, no sol + sol + no sol, y no sol + no sol + sol; dos soles y un no sol, que es análogo al anterior; y tres soles. Por tanto la distribución vuelve a ser simétrica, pero ahora tiene la forma de una pirámide truncada, donde los extremos de cero y tres soles, tienen la octava parte de los lanzamientos, y los valores medios de uno y dos soles, adquieren tres octavas partes de los lanzamientos cada uno.

Finalmente, usar cuatro monedas dará un espacio muestral de 16 elementos, cinco valores en las abscisas del histograma, de cero a cuatro soles, y la distribución teórica será simétrica, de forma poligonal, donde cada uno de los extremos con cero y cuatro soles poseen un dieciseisavo de los lanzamientos; las abscisas para uno y tres soles tendrán cuatro dieciseisavos; y el valor central de dos soles y dos no soles, tendrá la mayor frecuencia con seis dieciseisavos.

En ningún caso los alumnos han indicado que los elementos del espacio muestral, que definen la distribución teórica de probabilidad obedecen a los coeficientes del binomio de Newton, o a su equivalente, los elementos del triángulo de Pascal, es decir: para una moneda se tiene, 1 - 1; para dos, 1 - 2 - 1; para tres, 1 - 3 - 3 - 1; para cuatro 1 - 4 - 6 - 4 - 1; etc. Asociar estos conceptos a una tarea real y experimental efectuada por el alumno, resulta útil para disminuir el vacío existente entre la teoría y la realidad.

Para los alumnos que simulan los lanzamientos en computadora, se mantiene la condición de que multipliquen el número de lanzamientos manuales por 100 y cuando la entregan de esta manera, se debe aprovechar la oportunidad para comentar acerca de la forma y calidad de los generadores de números seudo aleatorios, y sobre la factibilidad de repetir el experimento, situación que en los lanzamientos manuales o físicos no se tiene.

Después de estas etapas, los alumnos están en posibilidad cambiar el elemento de azar que se está utilizando, a una baraja, lotería y demás, teniendo presente que salvo la etapa de análisis combinatorio para definir el espacio muestral, el procedimiento es el mismo. También se consigue preparar al alumno para manejar variables aleatorias continuas, tales como temperatura, longitud, peso, etc.

Este ejercicio, permite ubicar con mucha claridad el concepto de variable aleatoria, así como la naturaleza aleatoria de los errores que se cometen al leer cualquier magnitud física real, aún siendo digital y finita por su propia naturaleza como las analizadas; induce que el alumno empiece a formarse un criterio propio para calificar un resultado matemáticamente inexacto como despreciable, tolerable, aceptable, excelente, etc; los obliga al manejo y aplicación de histogramas, así como a la organización para efectuar su experimento y registrar los datos.

Es agradable la cantidad de ideas que ofrecen los alumnos para explicar la discrepancia entre los valores experimentales y los teóricos, así como la variedad de temas que se puede tratar al aclarar las dudas que presentan. Por otro lado, no faltan aquellos que llegan a quejarse de que es aburrido o "talachero", casi siempre son quienes que no usan la computadora y desertan del curso.