Interpolación con incrementos variables.

En ocasiones deseamos realizar una interpolación a partir de un conjunto de datos experimentales, donde valores consecutivos de la variable independiente no son equidistantes, en estos casos debemos utilizar la interpolación de Lagrange.

Interpolación de Lagrange.

Consideremos la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), del curso de geometría analítica sabemos que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos es:

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0 \tag{1}$$

que puede escribirse como sigue:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) - y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0 - (1) y_0 \tag{2}$$

es decir:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) - y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} y_0$$

o bien:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} \right) y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} y_0$$

Entonces:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 \tag{3}$$

es otra forma de escribir la recta que pasa por (x_0, y_0) y (x_1, y_1).

Si ahora definimos los coeficientes de Lagrange como:

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad y \qquad L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{4}$$

la ecuación de la recta se puede escribir como:

$$y = \sum_{i=0}^{1} L_i y_i$$

Observemos que:

$$L_i = \begin{cases} 0 & x \neq x_i \\ 1 & x = x_i \end{cases} \tag{5}$$

Conservando la forma de (4) y la propiedad (5) podemos construir el coeficiente *i*-esimo de Lagrange (L_i) para un polinomio de grado *n*, como un cociente donde el numerador sea un producto de diferencias entre *x* y las diferentes x_j, con *j* distinto de *i*, de lo contrario siempre se anularía. Por otro lado, el denominador debe ser igual al numerador en $x = x_i$, para que tome el valor de 1. Por lo tanto:

$$L_{n,i} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \tag{6}$$

Así el polinomio que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1),..., (x_n, y_n) se puede escribir como:

$$y = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i} y_i \tag{7}$$

donde los coeficientes L_i pueden escribirse como:

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \tag{8}$$

entonces el polinomio toma la forma:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} y_i \tag{9}$$

y se le denomina **Polinomio interpolante de Lagrange**

Ejemplo 1.

Usando interpolación de Lagrange, obtén el valor de *y* correspondiente a *x* = 3.6. Compara el resultado con la respuesta exacta si ésta es 3.278.

x	2.00	3.20	4.00
y	1.43	2.79	3.56

Solución 1:

Como se cuenta con tres puntos, el grado máximo del polinomio interpolante es 2. Primeramente realizamos una interpolación lineal, es decir, con un polinomio de grado 1. La expresión (9) se reduce a la (3), donde $y_0(x_0) = 2.79$ y $y_1(x_1) = 3.56$, y $x = 3.6$, entonces:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 = \frac{3.6 - 3.2}{4 - 3.2} 3.56 + \frac{3.6 - 4}{3.2 - 4} 2.79$$

O bien:

$$y = (0.5)(3.56) + (0.5)(2.79) = 3.175$$

este resultado tiene un error igual a:

$$\varepsilon = \left| \frac{3.175 - 3.278}{3.278} \right| \times 100\% = 3.14\%$$

Solución 2:

Ahora usemos un polinomio interpolante de grado 2, esto es:

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \qquad (10)$$

sustituyendo:

$$y = \frac{(3.6 - 3.2)(3.6 - 4)}{(2 - 3.2)(2 - 4)} 1.43 + \frac{(3.6 - 2)(3.6 - 4)}{(3.2 - 2)(3.2 - 4)} 2.79 + \frac{(3.6 - 2)(3.6 - 3.2)}{(4 - 2)(4 - 3.2)} 3.56$$

Evaluando:

$$y = 3.1887$$

este segundo resultado tiene un error igual a:

$$\varepsilon = \left| \frac{3.189 - 3.278}{3.278} \right| \times 100\% = 2.7\%$$

El error con un polinomio de segundo grado es menor al error con un polinomio de primer grado, esto hace suponer que con un número mayor de puntos puede minimizarse el error. Cosa que en general no es cierto.

Ejemplo 2:

Construye el polinomio que aproxima a la función en la tabla del ejemplo anterior.

Solución:

Para hallar el polinomio buscado, es suficiente con interpolar para un valor *x*, por lo tanto sustituimos los valores correspondientes en la expresión (10):

$$y = \frac{(x-3.2)(x-4)}{(2-3.2)(2-4)}1.43 + \frac{(x-2)(x-4)}{(3.2-2)(3.2-4)}2.79 + \frac{(x-2)(x-3.2)}{(4-2)(4-3.2)}3.56$$

simplificando:

$$y = 0.60(x^2 - 7.2x + 12.8) - 2.91(x^2 - 6x + 8) + 2.23(x^2 - 5.2x + 6.4)$$

$$y = -0.08x^2 + 1.54x - 1.33 \qquad (11)$$

Este es el polinomio interpolante que aproxima a la función tabulada en el ejemplo 1.

Error del polinomio interpolante de Lagrange

En los ejemplos 1 y 2 se calculó el error del valor estimado respecto del valor real, pero este valor en general no lo conoceremos. Para estimar el error de un valor interpolado, utilizaremos la expresión del error para el polinomio interpolante de Lagrange, dicho error esta dado por:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \tag{12}$$

O bien:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \tag{13}$$

donde ξ es un valor en (x_0, x_n). Para la aplicación de esta expresión en el cálculo de errores, se requiere la forma analítica de *f(x)*, lo cual no es posible en conjuntos de datos.

La expresión completa del polinomio interpolante de Lagrange es:

$$y = \sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}y_i \pm \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Ejemplo 3.

Utilizando un polinomio interpolante de Lagrange de grado 2 y los valores tabulados en la siguiente tabla,

x	***f(x) =sen(x)***
0.3	0.2955
0.4	0.3894
0.5	0.4794

obtén *f(0.35)*, y calcula una cota para el error.

Solución:

Según la expresión (10) tenemos:

$$y = \frac{(0.35-0.4)(0.35-0.5)}{(0.3-0.4)(0.3-0.5)}0.2955 + \frac{(0.35-0.3)(0.35-0.5)}{(0.4-0.3)(0.4-0.5)}0.3894$$
$$+\frac{(0.35-0.3)(0.35-0.4)}{(0.5-0.3)(0.5-0.4)}0.4794$$

entonces:

$$y = 0.3429$$

Para establecer una cota para el error, utilizamos la expresión (4.61):

$$\varepsilon(x) = \frac{-\cos(\xi)}{3!}(x-0.3)(x-0.4)(x-0.5)$$

Como $|\cos(x)| \le 1$, tenemos:

$$\varepsilon(x) \le \left|\frac{-\cos(\xi)}{3!}(x-0.3)(x-0.4)(x-0.5)\right| \le \left|\frac{-1}{3!}(0.35-0.3)(0.35-0.4)(0.35-0.5)\right|$$

por lo tanto:

$$\varepsilon(x) \le \left|\frac{1}{3!}(0.05)(-0.05)(-0.15)\right| = 0.0000625$$

Entonces:

$$f(0.35) = 0.3429 \pm 0.0000625$$

O bien, redondeando a cuatro decimales:

$$f(0.35) = 0.3429 \pm 0.0001$$

Intervalo que contiene al valor real.

Interpolación Inversa.

Los métodos de interpolación permiten resolver ecuaciones trascendentes o algebraicas. Para ello basta considerar la variable independiente de la función a resolver como la dependiente en el proceso de interpolación y viceversa. A este procedimiento se le conoce como **interpolación inversa** Para ejemplificar esta aplicación resolveremos el siguiente Ejemplo:

Ejemplo 4:

Hallar el instante en que un avión alcanza una velocidad de 11.2 m/s, la velocidad es función de su masa, la cual es variable debido al consumo de combustible, la ecuación que describe su velocidad es:

$$v = \beta \ln\left(\frac{M}{M - \alpha t}\right) - gt\,. \tag{2.6}$$

donde β es una constante igual a 680 m/s, α es la razón de consumo de combustible e igual a *M/60* kg/s, *M* la masa inicial del sistema avión - combustible y *g* es la aceleración de la gravedad considerada constante e igual a 9.81 m/s^2

Solución:

Podemos escribir la función que describe la velocidad del avión como sigue:

$$f(t) = 680 \ln\left(\frac{60}{60 - t}\right) - 9.8t - 11.2$$

Primero tabulamos la función:

t(seg.)	***f(t)***
0	-11.2
1	-9.5812
2	-7.7670
3	-5.7506
4	-3.5248
5	-1.0823
6	1.5852
7	4.4858
8	7.6286
9	11.0229
10	14.6786
11	18.6065
12	22.8176

Observamos un cambio de signo entre t = 5 y t = 6, consideramos los siguientes cuatro puntos para construir un polinomio interpolante de tercer grado.

n	***X***	***y***
0	-3.5248	4
1	-1.0823	5
2	1.5852	6
3	4.4858	7

Como los valores de x no son igualmente espaciados utilizaremos el polinomio interpolante de Lagrange:

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_i-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3$$

Sustituyendo y tomando $x = 0$, tenemos:

$$y(0) = \frac{(0+1.0823)(0-1.5852)(0-4.4858)}{(-3.5248+1.0823)(-3.5248-1.5852)(-3.5248-4.4858)}\,4 + \frac{(0+3.5248)(0-1.5852)(0-4.4858)}{(-1.0823+3.5248)(-1.0823-1.5852)(-1.0823-4.4858)}\,5 + \frac{(0+3.5248)(0+1.0823)(0-4.4858)}{(1.5852+3.5248)(1.5852+1.0823)(1.5852-4.4858)}\,6 + \frac{(0+3.5248)(0+1.0823)(0-1.5852)}{(4.4858+3.5248)(4.4858+1.0823)(4.4858-1.5852)}\,7$$

y evaluando tenemos:

$$y(0) = 5.4163$$

Ventajas y desventajas.

El polinomio interpolante de Lagrange toca exactamente todos los puntos que lo general.

No se puede estimar el error, a menos que se conozca la forma analítica de la función.

Un polinomio de mayor grado no garantiza un menor error.

Conclusión:

El polinomio interpolante de Lagrange es una herramienta muy poderosa, ya que además de la interpolación permite resolver ecuaciones trascendentes y hacer extrapolación en vecindades pequeñas a los extremos del intervalo que lo genera.

Se puede aplicar en varias dimensiones.

Es la base para los métodos de derivación e integración numéricas.