Métodos Numéricos

Material de apoyo al curso

Dr. Horacio Martínez Alfaro

Centro de Sistemas Inteligentes

Tecnológico de Monterrey

Campus Monterrey

Agosto de 2004

Métodos Numéricos y Álgebra Lineal

Material de apoyo al curso

Este material fue realizado por:

Dr. Horacio Martínez Alfaro
hma@itesm.mx
http://hma.mty.itesm.mx/

Centro de Sistemas Inteligentes
Tecnológico de Monterrey
Campus Monterrey

en LaTeX 2$_\varepsilon$ y con ayuda del Fondo de Investigación en Didáctica.

Agosto de 1997

Últimas correcciones: Agosto de 2006

Índice

Capítulo 1

Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

1.1. Arreglos y Matrices

1.1.1. Definiciones

Una **matriz A** de $n \times m$ es un arreglo rectangular de nm elementos distribuidos en un orden de n renglones y m columnas como se muestra a continuación:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

A un conjunto de elementos horizontal se le conoce como *renglón* y a uno vertical, *columna*. El primer subíndice designa el número de renglón y el segundo, el número de columna. El elemento a_{11} se localiza en la esquina superior izquierda de **A**. La matriz **A** tiene n filas y m columnas, por lo tanto, se dice que es de *dimensión* $(n \times m)$.

Las matrices con dimensión de uno en filas, $n = 1$, son *vectores renglón* y el primer subíndice se puede eliminar:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_m \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

y cuando la dimensión de columnas es uno, $m = 1$, se les llama *vectores columna* y el segundo subíndice se puede eliminar:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Al conjunto de elementos a_{ii} (subíndice igual) de una matriz se le conoce como *diagonal principal*.

Las matrices cuadradas $(n = m)$ son particularmente importantes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Para tales sistemas, el número de ecuaciones (que corresponde al número de filas) y el número de incógnitas (que corresponde al número de columnas) tienen que ser iguales para que exista una posible solución única.

Definición 1.1 (Transpuesta) *Sea* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *una matriz de* $(n \times m)$*, entonces la* transpuesta de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$*, es la matriz de* $(m \times n)$ *obtenida intercambiando los renglones por las columnas de* $\mathbf{A}$*, es decir,* $\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$*. En otras palabras, si*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

entonces

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Por ejemplo, obtener la transpuesta de la siguiente matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Algunas propiedades

Propiedad 1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

Propiedad 2. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Propiedad 3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Propiedad 4. Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

1.1.2. Matrices Cuadradas: Tipos especiales

- Una matriz **simétrica** es aquella en que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y j, es decir, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

  es una matriz simétrica de orden (3×3).

- Una matriz **diagonal** es una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

- Una matriz **identidad** es una matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

- Una matriz **triangular superior** es una donde todos los elementos *abajo* de la diagonal principal son iguales a cero

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

- Una matriz **triangular inferior** es una donde todos los elementos *arriba* de la diagonal principal son iguales a cero.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

1.1.3. Operaciones con matrices

La *adición algebraica* de matrices se lleva acabo elemento a elemento y es conmutativa:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} = b_{ij} \pm a_{ij} \tag{1.11}$$

y asociativas:

$$a_{ij} + (c_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij} + c_{ij}) + b_{ij} \tag{1.12}$$

La multiplicación de una matriz **A** por un escalar α se obtiene multiplicando cada elemento de **A** por α.

La multiplicación de dos matrices, **A** y **B**, solo se puede realizar cuando se cumple la restricción que el número de columnas de **A** debe ser igual al número de filas de **B**. La dimensión de la matriz resultante es como se muestra (los superíndices indican dimensión):

$$\mathbf{A}^{(n\times m)}\mathbf{B}^{(m\times p)} = \mathbf{C}^{(n\times p)} \tag{1.13}$$

Si las dimensiones de las matrices involucradas son compatibles, la multiplicación de matrices es asociativa

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{1.14}$$

y distributiva

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \tag{1.15}$$

pero, en general, la multiplicación no es conmutativa

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \tag{1.16}$$

El orden de la multiplicación es importante.

La multiplicación de dos matrices $\mathbf{A}^{(n\times m)}\mathbf{B}^{(m\times p)} = \mathbf{C}^{(n\times p)}$ queda defina como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}, \quad \forall \quad i = 1,\ldots,n \text{ y } j = 1,\ldots,p \tag{1.17}$$

Es decir, cada fila de **A** por cada columna de **B** se multiplicarán para obtener **C**.

Ejemplo 1.1

Obtenga los productos **AB** y **BA** con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 12 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 12 \\ 4 & 6 & 12 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{AB} \\
&= \begin{bmatrix} 15(9)+7(4)+4(4) & 15(3)+7(6)+4(9) & 15(12)+7(12)+4(6) \\ 7(9)+5(4)+4(4) & 7(3)+5(6)+4(9) & 7(12)+5(12)+4(6) \\ 2(9)+10(4)+12(4) & 2(3)+10(6)+12(9) & 2(12)+10(12)+12(6) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 179 & 123 & 288 \\ 99 & 87 & 168 \\ 106 & 174 & 216 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbf{BA} \\
&= \begin{bmatrix} 9(15)+3(7)+12(2) & 9(7)+3(5)+12(10) & 9(4)+3(4)+12(12) \\ 4(15)+6(7)+12(2) & 4(7)+6(5)+12(10) & 4(4)+6(4)+12(12) \\ 4(15)+9(7)+6(2) & 4(7)+9(5)+6(10) & 4(4)+9(4)+6(12) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 180 & 198 & 192 \\ 126 & 178 & 184 \\ 135 & 133 & 124 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Las operaciones anteriores realizadas con Maple quedarían como sigue:

```
> A:=Matrix([[15,7,4],[7,5,4],[2,10,12]]):
> B:=Matrix([[9,3,12],[4,6,12],[4,9,6]]):
> A . B, B . A;
```

Aún cuando la multiplicación es posible, la división de matrices no es una operación definida. Sin embargo, si una matriz $\mathbf{A}$ es cuadrada y no singular, existe una matriz $\mathbf{A}^{-1}$, llamada la **inversa de A**:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{1.18}$$

De aquí que la multiplicacíon de una matriz por la inversa es análoga a la división.

Unos de los requisitos para que exista la inversa de una matriz es que sea **no singular**. Esta característica se basa en la obtención del **determinante** de una matriz, $|\mathbf{A}|$; si $|\mathbf{A}| = 0$, la matriz es singular; si $|\mathbf{A}| \neq 0$, la matriz es no singular.

1.1.4. Determinantes

1. Si $\mathbf{A} = [a]$ es una matriz de 1×1, entonces $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = a$.
2. Si
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = ad - bc \tag{1.19}$$
   Para matrices de orden mayor, se utiliza la definición mediante cofactores.
3. El **menor** M_{ij} es el determinante de la submatriz de $(n-1) \times (n-1)$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $(n \times n)$ suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna.

   Por ejemplo, el menor $M_{2,3}$ de la siguiente matriz se obtiene al calcular el determinante de la matriz resultante de eliminar el renglón 2 y la columna 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 5 & \boxed{2} \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1(0) - 4(2) = -8$$

4. El **cofactor** A_{ij} asociado con M_{ij} se define como $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Del ejemplo anterior, el cofactor $A_{2,3}$ sería:
$$A_{2,3} = (-1)^{2+3}(-8) = 8$$

5. El **determinante** de una matriz $\mathbf{A}$ de $(n \times n)$, donde $n > 1$, está dado ya sea por
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad \text{para cualquier } i = 1, \ldots, n \tag{1.20}$$
o
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \quad \text{para cualquier } j = 1, \ldots, n \tag{1.21}$$

Ejemplo 1.2
Calcule por cofactores el determinante de la siguiente matriz
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución
Expandiendo por cofactores en la tercera columna, tenemos:
$$|\mathbf{A}| = 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(8+2) - 3(6+5) + 4(6-20) = -69$$
La forma general estaría dada por:
$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{3} a_{k3} A_{k3} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$
Expandiendo por cofactores en el segundo renglón, tenemos:
$$|\mathbf{A}| = -4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4(20-4) + 2(12+2) - 3(6+5) = -69$$

Propiedades

Propiedad 1. Si cualquier renglón o columna de $\mathbf{A}$ es el vector cero, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Propiedad 2. Si el i-ésimo renglón o la j-ésima columna de $\mathbf{A}$ se multiplican por una constante c, entonces $\det(\mathbf{A})$ se multiplica por c, es decir:
$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c|\mathbf{A}| \tag{1.22}$$

Propiedad 3. Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son idénticas excepto por la j-ésima columna y la j-ésima columna de $\mathbf{C}$ es la suma de las j-ésimas columnas de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. Entonces, $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$.

Propiedad 4. Si se hace un intercambio de renglones o columnas de $\mathbf{A}$, entonces el determinante de esa nueva matriz es $-|\mathbf{A}|$.

Propiedad 5. Si $\mathbf{A}$ tiene dos renglones o columnas iguales, $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Propiedad 6. Si un renglón (columna) de $\mathbf{A}$ es un múltiplo constante de otro renglón (columna), entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Propiedad 7. Si un múltiplo de un renglón (columna) de $\mathbf{A}$ se suma a otro renglón (columna) de $\mathbf{A}$, el determinante no cambiará.

Teorema 1.1 *Sea* $\mathbf{A}^{(n\times n)}$*, entonces*

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T) \tag{1.23}$$

Teorema 1.2 *Sean* $\mathbf{A}, \mathbf{B}^{(n\times n)}$*, entonces*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \tag{1.24}$$

Existe una serie de métodos numéricos para la obtención del determinante de una matriz, dentro de los cuales podemos mencionar:

- Gauss-Jordan
- Montante

1.1.5. Inversa

La inversa de una matriz $\mathbf{A}$, denominada $\mathbf{A}^{-1}$, calculada mediante cofactores:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|} \tag{1.25}$$

donde $\mathrm{Adj}(\mathbf{A}) = [\mathrm{Cofac}(\mathbf{A})]^T$.

Ejemplo 1.3

Para la matriz del ejemplo anterior, encuentre su inversa.

Solución

Encontramos primero la matriz de cofactores:

$$\begin{array}{lll}
A_{1,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 & A_{1,2} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -19 & A_{1,3} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \\
A_{2,1} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -16 & A_{2,2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 14 & A_{2,3} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -11 \\
A_{3,1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11 & A_{3,2} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 & A_{3,3} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14
\end{array}$$

es decir,

$$\mathrm{Cofac}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & -19 & 10 \\ -16 & 14 & -11 \\ 11 & -1 & -14 \end{bmatrix}$$

para ahora obtener la adjunta, transponemos la matriz de cofactores:

$$\mathrm{Adj}(\mathbf{A}) = [\mathrm{Cofac}(\mathbf{A})]^T = \begin{bmatrix} 2 & -16 & 11 \\ -19 & 14 & -1 \\ 10 & -11 & -14 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la inversa de $\mathbf{A}$ es:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{69}\begin{bmatrix} 2 & -16 & 11 \\ -19 & 14 & -1 \\ 10 & -11 & -14 \end{bmatrix}$$

Para comprobar los resultados, podemos realizar la pre o posmultiplicación de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

1.2. Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan se auxilia de operaciones fundamentales en renglones de matrices. Estas operaciones son las siguientes:

1. Multiplicación de una fila (columna) por un escalar ($\neq 0$).
2. Intercambio de dos renglones (o columnas).
3. Reemplazo del renglón i por la suma del renglón i más c veces el renglón k, donde c es cualquier escalar y $k \neq i$.

El objetivo general lo podemos representar mediante una *matriz aumentada* de la siguiente manera:

$$\left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{I}\ \right] \overset{\text{Transf. Elem.}}{\Longrightarrow} \left[\ \mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\ \right] = \left[\ \mathbf{I} \mid \mathbf{C}\ \right] \tag{1.26}$$

y en el proceso se obtiene tanto la inversa de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^{-1}$), como el determinante de $\mathbf{A}$ ($|\mathbf{A}|$). El algoritmo es el siguiente:

Realizar lo siguiente para $i = 1..n$ donde n es el orden de la matriz.

- Normalizar el renglón i diviendo el renglón i por el elemento $a_{i,i}$.
- Hacer ceros sobre la columna i mediante la tercera operación fundamental en matrices.

Para mayor entendimiento del método, se explicará con el siguiente ejemplo.

1.2.1. Muestra del Método con un Ejemplo

Se tiene la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 10 & -6 & -8 \\ -5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

y se desea obtener su inversa. Para lograrlo, se genera la matriz aumentada con $\mathbf{A}$ y con $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{rrr|rrr} -4 & 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1.28}$$

y deseamos obtener $\mathbf{I}$ en el lado izquierdo y $\mathbf{A}^{-1}$ en el lado derecho de la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{50} & -\frac{2}{25} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{7}{100} & -\frac{23}{50} \end{array}\right] \tag{1.29}$$

Definimos las matriz $\mathbf{A}$ y la aumentada:

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[-4,7,8],[10,-6,-8],[-5,7,6]]):
> Au:=<A | IdentityMatrix(3)>:
```

Definimos el *pivote* como el elemento de la diagonal principal de $\mathbf{A}$ ($a_{ii},\ i = 1, \ldots$) con el cual estamos trabajando. Una vez que se haya guardado el pivote, normalizar el renglón donde se encuentra

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{-4} & 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

```
> d:=1; piv:=Au[1,1]; d:=d*piv; Au:=RowOperation(Au,1,1/piv);
```

$$d = 1, \quad piv = -4, \quad d = -4$$

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{7}{4} & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 10 & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1.30}$$

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{7}{4} & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \mathbf{10} & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1.31}$$

Seleccionar el primer elemento, comenzando en el primer renglón, que se encuentre sobre la columna del pivote y que sea distinto de éste; multiplicar el renglón del pivote por ese elemento con signo cambiado y sumárselo al renglón donde se encuentra dicho elemento.

Para nuestro ejemplo, el primer elemento en la columna del pivote y distinto de éste es el elemento `Au[2,1]` y la operación sería $\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \times (10)$:

```
>  Au:=RowOperation(Au,[2,1],-Au[2,1]);
```

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{7}{4} & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{2} & 12 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \mathbf{-5} & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1.32}$$

El siguiente elemento en la misma columna del pivote es el elemento `Au[3,1]` cuya operación sería $\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \times (-5)$:

```
> Au:=RowOperation(Au,[3,1],-Au[3,1]);
```

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{7}{4} & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{2} & 12 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} & -4 & -\frac{5}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1.33}$$

Continuamos con el siguiente elemento sobre la diagonal principal, el elemento `Au[2,2]`, y se normaliza ese renglón con la operación $\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2/(\frac{23}{2})$:

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{7}{4} & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\frac{23}{2}} & 12 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} & -4 & -\frac{5}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1.34}$$

```
> piv:=Au[2,2];  d:=d*piv;  Au:=RowOperation(Au,2,1/piv);
```

$$piv = \frac{23}{2}, \quad d = -46$$

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \boldsymbol{-\frac{7}{4}} & -2 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{24}{23} & \frac{5}{23} & \frac{2}{23} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} & -4 & -\frac{5}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1.35}$$

Repetir el proceso de selección de elementos en la nueva columna del pivote (columna 2). El primer elemento en esa columna es el elemento `Au[1,2]`; el renglón del pivote se multiplica por este elemento con signo cambiado y se le suma al renglón de ese elemento $\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \times (-\frac{7}{4})$:

```
> Au:=RowOperation(Au,[1,2],-Au[1,2]);
```

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{4}{23} & \frac{3}{23} & \frac{7}{46} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{24}{23} & \frac{5}{23} & \frac{2}{23} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{-\frac{7}{4}} & -4 & -\frac{5}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1.36}$$

El siguiente elemento en la columna del pivote y distinto de éste es el elemento `Au[3,2]` cuya operación sería $\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \times (-\frac{7}{4})$:

```
> Au:=RowOperation(Au,[3,2],-Au[3,2]);
```

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{4}{23} & \frac{3}{23} & \frac{7}{46} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{24}{23} & \frac{5}{23} & \frac{2}{23} & 0 \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{\frac{50}{23}} & -\frac{20}{23} & \frac{7}{46} & 1 \end{array}\right] \tag{1.37}$$

El nuevo pivote es el siguiente elemento de la diagonal principal, el elemento `Au[3,3]` y se normaliza ese renglón $\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3/(-\frac{50}{23})$:

```
> piv:=Au[3,3];  d:=d*piv;  Au:=RowOperation(Au,3,1/piv);
```

$$piv = -\frac{50}{23}, \quad d = 100$$

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{4}{23} & \frac{3}{23} & \frac{7}{46} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{24}{23} & \frac{5}{23} & \frac{2}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{7}{100} & -\frac{23}{50} \end{array}\right] \tag{1.38}$$

Se seleccionan los elementos sobre la columna del pivote (uno a la vez) y se realiza el proceso antes mencionado; la primera operación sería $\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 \times (-\frac{4}{23})$:

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boldsymbol{-\frac{4}{23}} & \frac{3}{23} & \frac{7}{46} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{24}{23} & \frac{5}{23} & \frac{2}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{7}{100} & -\frac{23}{50} \end{array}\right] \tag{1.39}$$

```
> Au:=RowOperation(Au,[1,3],-Au[1,3]);
```

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{50} & -\frac{2}{25} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{\frac{24}{23}} & \frac{5}{23} & \frac{2}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{7}{100} & -\frac{23}{50} \end{array}\right] \tag{1.40}$$

y la segunda operación sería $\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 \times (\frac{24}{23})$:

```
> Au:=RowOperation(Au,[2,3],-Au[2,3]);
```

$$\mathbf{A}_u = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{50} & -\frac{2}{25} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{7}{100} & -\frac{23}{50} \end{array}\right] \tag{1.41}$$

La inversa de la matriz $\mathbf{A}$ se encuentra en la parte derecha de la matriz aumentada. Como se puede observar, en la parte izquierda de esta misma matriz se encuentra la matriz identidad.

```
> Ainv:=Au[1..3,4..6];
```

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{50} & -\frac{2}{25} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{2}{5} & -\frac{7}{100} & -\frac{23}{50} \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

Ejemplo 1.4

```
> A:=Matrix([[-3,7,6],[2,3,-2],[-9,-2,-9]]):
> Au:=<A | IdentityMatrix(3)>;
```

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

```
> d:=1;  piv:=Au[1,1];  d:=d*piv;  Au:=RowOperation(Au,1,1/piv);
```

$$d=1,\quad piv=-3,\quad d=-3,\quad \mathbf{A}_u=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -9 & -2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Au:=addrow(Au,[2,1],-Au[2,1]);
```

$$\mathbf{A}_u=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{23}{3} & 2 & \frac{2}{3} & 1 & 0\\ -9 & -2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Au:=RowOperation(Au,[3,1],-Au[3,1]);
```

$$\mathbf{A}_u=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{23}{3} & 2 & \frac{2}{3} & 1 & 0\\ 0 & -23 & -27 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> piv:=Au[2,2]; d:=d*piv; Au:=RowOperation(Au,2,1/piv);
```

$$piv=\frac{23}{3},\quad d=-23,\quad \mathbf{A}_u=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{6}{23} & \frac{2}{23} & \frac{3}{23} & 0\\ 0 & -23 & -27 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Au:=RowOperation(Au,[1,2],-Au[1,2]);
```

$$\mathbf{A}_u=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{32}{23} & -\frac{3}{23} & \frac{7}{23} & 0\\ 0 & 1 & \frac{6}{23} & \frac{2}{23} & \frac{3}{23} & 0\\ 0 & -23 & -27 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Au:=RowOperation(Au,[3,2],-Au[3,2]);
```

$$\mathbf{A}_u=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{32}{23} & -\frac{3}{23} & \frac{7}{23} & 0\\ 0 & 1 & \frac{6}{23} & \frac{2}{23} & \frac{3}{23} & 0\\ 0 & 0 & -21 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> piv:=Au[3,3]; d:=d*piv; Au:=RowOperation(Au,3,1/piv);
```

$$piv = -21, \quad d = 483, \quad \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{32}{23} & -\frac{3}{23} & \frac{7}{23} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{23} & \frac{2}{23} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

```
> Au:=RowOperation(Au,[1,3],-Au[1,3]);
```

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{31}{483} & \frac{17}{161} & -\frac{32}{483} \\ 0 & 1 & \frac{6}{23} & \frac{2}{23} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

```
> Au:=RowOperation(Au,[2,3],-Au[2,3]);  Au[1..3,4..6];
```

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{31}{483} & \frac{17}{161} & -\frac{32}{483} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{161} & \frac{27}{161} & \frac{2}{161} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{31}{483} & \frac{17}{161} & -\frac{32}{483} \\ \frac{12}{161} & \frac{27}{161} & \frac{2}{161} \\ \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

1.3. Método de Montante

Ejemplo 1.5

Dada la matriz **A**, generar la matriz aumentada:

```
> A:=Matrix([[-4,7,8],[10,-6,-8],[-5,7,6]]);
> Au:=<A | IdentityMatrix(3)>;
```

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 10 & -6 & -8 \\ -5 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad Au = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

- Iniciar haciendo el pivote anterior igual a 1, $piv_a = 1$.
- Los siguientes pivotes se irán obteniendo sobre la diagonal principal de la matriz aumentada.

- El primer pivote es el elemento $piv = Au_{1,1} = -4$.
- Una vez seleccionado el pivote, se desea hacer ceros en la columna del pivote (ceros arriba y abajo de él).
- El primer elemento donde se desea hacer un cero es $\mathbf{A}_{u_{2,1}}$ que se encuentra en el renglón $k = 2$.
- Este elemento lo almacenamos como $cero_k$, $cero_2 = Au_{2,1} = 10$.
- El procedimiento para sustituir el renglón k donde se encuentra $cero_k$ (el pivote en el renglón i) es el siguiente:

$$\mathbf{r}_k \leftarrow [(piv \times \mathbf{r}_k) - (cero_k \times \mathbf{r}_i)] / piv_a \tag{1.43}$$

Para nuestro caso, tenemos:

$$\mathbf{r}_2 \leftarrow [((-4) \times \mathbf{r}_2) - (10 \times \mathbf{r}_1)] / 1 \tag{1.44}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{-4} & 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{10} & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 40 & -70 & -80 & -10 & 0 & 0 \\ -40 & 24 & 32 & 0 & -4 & 0 \\ \hline 0 & -46 & -48 & -10 & -4 & 0 \\ \hline 0 & -46 & -48 & -10 & -4 & 0 \end{array}$$

```
> pA:=1:  Au:=Montante(Au,1,2,pA);
```

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} \boxed{-4} & 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & -48 & -10 & -4 & 0 \\ \boxed{-5} & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} -20 & 35 & 40 & 5 & 0 & 0 \\ 20 & -28 & -24 & 0 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 7 & 16 & 5 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 7 & 16 & 5 & 0 & -4 \end{array}$$

El procedimiento termina con $cero_3 = Au_{3,1} = -5$.

```
> Au:=Montante(Au,1,3,pA);
```

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} -4 & \boxed{7} & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-46} & -48 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 0 & 322 & 336 & 70 & 28 & 0 \\ 184 & -322 & -368 & -46 & 0 & 0 \\ \hline 184 & 0 & -32 & 24 & 28 & 0 \\ \hline -46 & 0 & 8 & -6 & -7 & 0 \end{array}$$

Con lo anterior se terminan los elementos sobre la columna de piv (la columna 1) donde se desea tener ceros.

Ahora el pivote anterior toma el valor del pivote actual, $pA = piv$, y el pivote actual se mueve al siguiente elemento sobre la diagonal principal: $piv = Au_{2,2} = -46$. Ahora se desea hacer ceros arriba ($Au_{1,2}$) y abajo ($Au_{3,2}$) del piv, es decir en la columna 2. Comenzamos con el renglón 1: $cero_1 = Au_{1,2}$.

```
> pA:=Au[1,1]:  Au:=Montante(Au,2,1,pA);
```

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} -46 & 0 & 8 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & \boxed{-46} & -48 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 16 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 0 & 322 & 336 & 70 & 28 & 0 \\ 0 & -322 & -736 & -230 & 0 & 184 \\ \hline 0 & 0 & -400 & -160 & 28 & 184 \\ \hline 0 & 0 & 100 & 40 & -7 & -46 \end{array}$$

Ahora $cero_3 = Au_{3,2} = 7$ y realizamos la sustitución de su renglón:

```
> Au:=Montante(Au,2,3,pA);
```

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} -46 & 0 & \boxed{8} & -6 & -7 & 0 \\ 0 & -46 & -48 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{100} & 40 & -7 & -46 \end{bmatrix}$$

0	0	−800	−320	56	368
−4600	0	800	−600	−700	0
−4600	0	0	−920	−644	368
100	0	0	20	14	−8

Con lo anterior se terminan los elementos sobre la columna de piv (la columna 2) donde se desea tener ceros.

Ahora el pivote anterior toma el valor del pivote actual, $pA = piv$, y el pivote actual se mueve al siguiente elemento sobre la diagonal principal: $piv = Au_{3,3} = 100$. Ahora se desea hacer ceros arriba ($Au_{1,3}$) y abajo ($Au_{2,3}$) de piv, es decir en la columna 3. Comenzamos con el renglón 1: $cero_1 = Au_{1,3}$:

```
> pA:=Au[2,2]:  Au:=Montante(Au,3,1,pA);
```

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 20 & 14 & -8 \\ 0 & -46 & \boxed{-48} & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{100} & 40 & -7 & -46 \end{bmatrix}$$

0	0	4800	1920	−336	−2208
0	−4600	−4800	−1000	−400	0
0	−4600	0	920	−736	−2208
0	100	0	−20	16	48

Ahora $cero_2 = Au_{2,3} = -48$ y realizamos la sustitución de su renglón:

```
> Au:=Montante(Au,3,2,piv);
```

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 20 & 14 & -8 \\ 0 & 100 & 0 & -20 & 16 & 48 \\ 0 & 0 & 100 & 40 & -7 & -46 \end{bmatrix}$$

Para terminar, actualizamos el pivote anterior: $pA = piv = 100$ multiplicamos la matriz por su inverso, para así obtener la matriz identidad en donde estaba $\mathbf{A}$, y la inversa, $\mathbf{A}^{-1}$ en donde estaba la identidad. El pivote anterior guarda el valor del determinante de $\mathbf{A}$, en este caso $\det(\mathbf{A}) = 1$.

```
> piv:=Au[3,3];  Au:=evalm(1/piv*Au);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{7}{50} & \frac{-2}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{4}{25} & \frac{12}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{-7}{100} & \frac{-23}{50} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.6

```
> Au := augment(A,Id);
```

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

```
> piv:=1;  Au:=montrows(Au,1,2,piv);  Au:=montrows(Au,1,3,piv);
```

$$piv = 1, \quad \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & -6 & -2 & -3 & 0 \\ -9 & -2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -23 & -6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 69 & 81 & 9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> piv:=Au[1,1];  Au:=montrows(Au,2,1,piv);  Au:=montrows(Au,2,3,piv);
```

$$piv = -3, \quad \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} -23 & 0 & 32 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & -23 & -6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 69 & 81 & 9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} -23 & 0 & 32 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & -23 & -6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 483 & 23 & -69 & -23 \end{bmatrix}$$

```
> piv:=Au[2,2];  Au:=montrows(Au,3,1,piv);  Au:=montrows(Au,3,2,piv);
```

$$piv = -23, \quad \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 483 & 0 & 0 & -31 & 51 & -32 \\ 0 & -23 & -6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 483 & 23 & -69 & -23 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 483 & 0 & 0 & -31 & 51 & -32 \\ 0 & 483 & 0 & 36 & 81 & 6 \\ 0 & 0 & 483 & 23 & -69 & -23 \end{bmatrix}$$

```
> piv:=Au[3,3];  Au:=evalm(1/piv*Au);
```

$$piv = 483, \quad \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{31}{483} & \frac{17}{161} & -\frac{32}{483} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{161} & \frac{27}{161} & \frac{2}{161} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

1.4. Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones de la forma:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
E_1: & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
E_2: & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
E_n: & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

para $x_1, \ldots, x_n$ dados los a_{ij} para cada $i, j = 1, \ldots, n$ y b_i para cada $i = 1, \ldots, n$, utilizaremos los métodos de Gauss-Jordan y Montante vistos anteriormente.

Para aplicar estos métodos, necesitamos expresar el sistema de ecuaciones lineales como un sistema matricial de dimensión $n \times (n+1)$. Primero construimos:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

y así podemos expresar el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial:

$$
\mathbf{Ax} = \mathbf{b}
$$

para después combinar las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$, y formar la matriz aumentada

$$
[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]
$$

Una vez generada esta matriz, se aplica el método, Gauss-Jordan o Montante, de igual forma que cuando se desea obtener la inversa. Cuando se termina de aplicar el método, la solución al sistema de ecuaciones estará en la última columna (la $n+1$) de la matriz aumentada.

Ejemplo 1.7

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9, \\
2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & -5, \\
x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -9.
\end{array}
$$

Solución

Obtenemos las matrices:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ -9 \end{bmatrix}
$$

para formar la matriz aumentada

$$
[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right]
$$

Aplicando el método de Montante, obtenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 14 & -81 & -38 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 14 & -81 & -38 \\ 0 & 3 & -14 & -45 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 14 & 0 & 9 & 41 \\ 0 & 14 & -81 & -38 \\ 0 & 3 & -14 & -45 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 14 & 0 & 9 & 41 \\ 0 & 14 & -81 & -38 \\ 0 & 0 & -43 & -129 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -43 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 14 & -81 & -38 \\ 0 & 0 & -43 & -129 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -43 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & -43 & 0 & 43 \\ 0 & 0 & -43 & -129 \end{array}\right]$$

y multiplicando la matriz por $1/|\mathbf{A}| = 1/(-43)$, tenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

de donde la última columna indica la solución al sistema de ecuaciones

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 3 \end{array}\right]$$

1.5. Métodos iterativos

1.5.1. Método de Jacobi

Las fórmulas de recursión para el método iterativo de Jacobi se desarrollarán al resolver tres ecuaciones en tres incógnitas. La fórmulas de recursión para resolver n ecuaciones en n incógnitas se obtienen mediante extensión directa.

Si el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array} \tag{1.45}$$

tiene elementos de la diagonal $a_{ii}(i = 1, 2, 3)$ distintos de cero, entonces se puede reescribir de la forma:

$$\begin{array}{rcllllll} x_1 & = & (1/a_{11}) & [\ b_1 & & -a_{12}x_2 & -a_{13}x_3 &] \\ x_2 & = & (1/a_{22}) & [\ b_2 & -a_{21}x_1 & & -a_{23}x_3 &] \\ x_1 & = & (1/a_{33}) & [\ b_3 & -a_{31}x_1 & -a_{32}x_2 & &] \end{array} \tag{1.46}$$

esto es, hacer que en la i-ésima ecuación la variable x_i quede expresada en términos de las restantes variables y b_i.

Se puede establecer un procedimiento iterativo para resolver estas ecuaciones de la siguiente forma:

1. Escoger valores arbitrarios ${x_1}^0$, ${x_2}^0$, ${x_2}^0$, ($\mathbf{x}^0$), y sustituir estos valores para x_1, x_2, x_3 en el lado derecho de la ecuación 1.46. Los valores que se obtienen después de realizar los cálculos son los nuevos valores de ${x_1}^1$, ${x_2}^1$, ${x_2}^1$, ($\mathbf{x}^1$).

2. Estos valores de $\mathbf{x}^1$ se pueden sustituir en lado derecho de la ecuación 1.46 para producir los valores $\mathbf{x}^2$ del lado izquierdo.

$$\begin{array}{rcllll}
{x_1}^{k+1} & = & (1/a_{11})\ [\ b_1 & & -a_{12}{x_2}^k & -a_{13}{x_3}^k\ ] \\
{x_2}^{k+1} & = & (1/a_{22})\ [\ b_2 & -a_{21}{x_1}^k & & -a_{23}{x_3}^k\ ] \\
{x_1}^{k+1} & = & (1/a_{33})\ [\ b_3 & -a_{31}{x_1}^k & -a_{32}{x_2}^k & \ ]
\end{array} \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{1.47}$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} {x_1}^{k+1} \\ {x_2}^{k+1} \\ {x_3}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^k \\ {x_2}^k \\ {x_3}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

Ejemplo 1.8

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl}
4x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 16 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 10 \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 12
\end{array}$$

Solución

El sistema se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl}
{x_1}^{k+1} & = & -1/4\,{x_2}^k - 1/2\,{x_3}^k + 4 \\
{x_2}^{k+1} & = & -1/3\,{x_1}^k - 1/3\,{x_3}^k + 10/3 \\
{x_3}^{k+1} & = & -1/5\,x_1 - 2/5\,x_2 + \frac{12}{5}
\end{array}$$

y en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} {x_1}^{k+1} \\ {x_2}^{k+1} \\ {x_3}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^k \\ {x_2}^k \\ {x_3}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{bmatrix}$$

Las primeras iteraciones se muestran a continuación comenzadon con $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ como solución inicial:

$$k = 0 \qquad \begin{bmatrix} {x_1}^1 \\ {x_2}^1 \\ {x_3}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{bmatrix}$$

$$k = 1 \qquad \begin{bmatrix} {x_1}^2 \\ {x_2}^2 \\ {x_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59/30 \\ 18/15 \\ 4/15 \end{bmatrix}$$

$$k=3 \qquad \begin{bmatrix} {x_1}^3 \\ {x_2}^3 \\ {x_3}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 59/30 \\ 18/15 \\ 4/15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107/30 \\ 233/90 \\ 229/150 \end{bmatrix}$$

$$k=4 \qquad \begin{bmatrix} {x_1}^4 \\ {x_2}^4 \\ {x_3}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 107/30 \\ 233/90 \\ 229/150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4661/1800 \\ 736/450 \\ 313/450 \end{bmatrix}$$

Con Maple se podría hacer de la siguiente forma, si definimos `Ap` como la matriz modificada de coeficientes y `bp` el vector modificado de valores independientes:

```
> Ap:=evalf(Matrix([[0, -1/4, 1/2],[-1/3,0,-1/3],[-1/5,-2/5,0]]));
> bp:=evalf(<<4>,<10/3>,<12/5>>);
> x0:=<<1.0>,<1.0>,<1.0>>;
> x1:=x0 - x0;
> X:=Transpose(x1):
> nX:=[Norm(x1-x0,2)]:
> for i to 100 while Norm(x1-x0,2) > 0.0001 do
>    x0 := x1;
>    x1 := Ap . x0 + bp;
>    nX := [op(nX), Norm(x1-x0,2)];
>    X := <X, Transpose(x1)>;
> end do:
> i,<nX[4..13]>, X[4..13,1..3];
```

$$29, \begin{bmatrix} 1.732051 \\ 5.733333 \\ 3.638223 \\ 2.465079 \\ 1.621852 \\ \vdots \\ 0.000463 \\ 0.000308 \\ 0.000205 \\ 0.000136 \\ 0.000090 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 4.000000 & 3.333333 & 2.400000 \\ 1.966667 & 1.200000 & 0.266667 \\ 3.566667 & 2.588889 & 1.526667 \\ 2.589444 & 1.635556 & 0.651111 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2.999886 & 1.999893 & 0.999901 \\ 3.000076 & 2.000071 & 1.000066 \\ 2.999949 & 1.999953 & 0.999956 \\ 3.000034 & 2.000031 & 1.000029 \\ 2.999978 & 1.999979 & 0.999981 \end{bmatrix}$$

Si la solución iterativa continúa, la aproximación converge a la solución exacta (3,2,1) y su convergencia se puede observar en la figura 1.1.

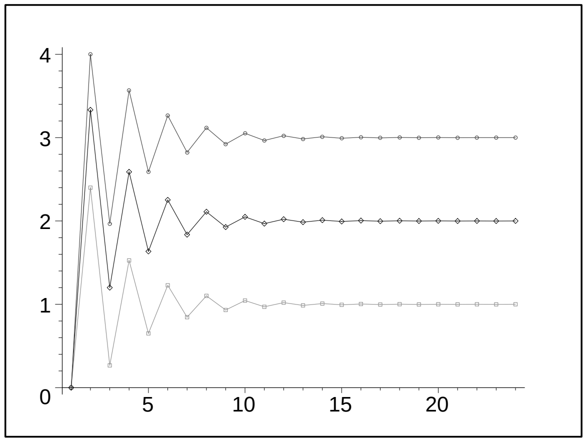

Figura 1.1: Convergencia de la solución por Jacobi

Una condición *suficiente* para la convergencia del método de Jacobi para n ecuaciones en n incógnitas es la siguiente:

$$\max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) < 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.49}$$

Dado que es una condición suficiente, no necesaria, el método de Jacobi puede converger cuando 1.49 no se satisface.

1.5.2. Método de Gauss-Seidel

Este método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales es una modificación simple al método de Jacobi. El método hace uso inmediato de los valores de ${x_i}^{k+1}$ que se hayan calculado incluyéndolos en los cálculos de las siguientes ${x_{i+1}}^{k+1}$:

$$\begin{aligned}
{x_1}^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12}{x_2}^k - a_{13}{x_3}^k - \cdots - a_{1n}{x_n}^k \right] \\
{x_2}^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21}{x_1}^{k+1} - a_{23}{x_3}^k - \cdots - a_{2n}{x_n}^k \right] \\
{x_3}^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - a_{31}{x_1}^{k+1} - a_{32}{x_2}^{k+1} - \cdots - a_{3n}{x_n}^k \right] \\
&\vdots \\
{x_n}^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - a_{n1}{x_1}^{k+1} - a_{n2}{x_2}^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}{x_{n-1}}^{k+1} \right]
\end{aligned} \tag{1.50}$$

La condición 1.49 aplica también para este médoto. La taza de convergencia de este método es dos veces la del método de Jacobi.