UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

NOTAS PRELIMINARES DE ANÁLISIS GRÁFICO

ING. JAIME MARTÍNEZ MARTÍNEZ

Semestre 2004-1

1. BOSQUEJO HISTÓRICO. ASIRIO, BABILONIO. EGIPCIOS. GRIEGOS. ESCUELA DE ALEJANDRÍA.

Introducción.

Geometría (del griego geo, "tierra" y metrein , "medir"), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio.

A la pregunta ¿para qué sirve la Geometría? se pueden dar diferentes respuestas, que dependen, principalmente, de las actividades del que la formula.

Al hombre dedicado a la ciencia aplicada, se le podría decir que la Geometría es indispensable en el arte, la industria, la topografía, etc. Esto no significa que un mecánico o un topógrafo aplique los teoremas estudiados en Geometría de una manera directa, sino que las reglas y métodos que usa en su trabajo se deducen de las proposiciones geométricas.

Si se trata de un estudiante que desea alcanzar un título profesional, podremos decirle que la disciplina mental y los conocimientos que la Geometría proporciona son indispensables para estudios superiores.

En realidad, creemos que después que uno ha aprendido las operaciones aritméticas, el *Álgebra* y la *Geometría* forma la base de toda la matemática pura y aplicada. El *Álgebra*, es como el alfabeto y la gramática, mientras que la *Geometría* desarrolla los métodos para obtener nuevas proposiciones desde un punto de vista científico.

Esta característica hace de la *Geometría* una ciencia y un arte, es decir, es al mismo tiempo, matemática y filosofía. Forma el sistema más perfecto de lógica que se conoce, y para todo espíritu amante de la perfección y la belleza, la Geometría es objeto de constante fascinación.

Se desarrolla esta ciencia, sacrificando parte de su belleza en áreas de su utilidad. De esta manera, aunque pierde algo de su significado, gana en interés.

Se suponen conocidos los símbolos usados en *Aritmética* y *Álgebra* porque, en nuestro concepto, el estudio de la *Geometría* debe seguir al de la *Aritmética* y, en parte, al del *Álgebra*. De esta manera toda persona que inicia su estudio voluntariamente y con método, el dominio de esta ciencia le será no solamente de gran utilidad, sino que le dará la más alta satisfacción intelectual.

En la exposición de la propiedades geométricas y en la demostración de los teoremas, es necesario referirse, constantemente, a resultados anteriores.

Por esto cada proposición lleva un número, pero, para comprobar la referencia de manera más fácil, mencionaremos brevemente el contenido de la proposición a que se le alude. Creemos que así le será más ameno al lector el estudio de la materia, sin que la exposición pierda ninguna de las cualidades del método axiomático geométrico.

Asirio. Babilonio.

EL hombre prehistórico probablemente no tenía sino nociones muy vagas de los conceptos de número y de la medida, y es muy posible que en un principio contara con los dedos y midiera las longitudes comparándolas con longitudes de ciertas partes de su cuerpo, tales como el pie, el brazo o los brazos abiertos. En cavernas de determinados lugares de Europa, protegidas de las inclemencias del tiempo, se han descubierto algunas pinturas hechas en los tiempos prehistóricos que revelan un sentido bastante preciso de las proporciones y de la dimensión, pero sus autores no dejaron nada que nos indique cuáles eran sus métodos de medida.

Las primeras indicaciones de un sistema de medidas parecen encontrarse en los antiguos babilonios, o en el pueblo que vivió antes de ellos en la región conocida como Babilonia. Los babilonios perfeccionaron la Agrimesura y lo que escribieron en sus tabletas de arcilla demuestra que contaban con métodos para determinar el área de varias figuras sencillas, incluyendo el círculo, aunque sus ideas sobre la medida del círculo no eran del todo correctas.

La mayor parte de los documentos antiguos demuestran que los métodos y conocimientos acerca de las medidas surgieron a propósito de la medida de la tierra, la construcción de edificios y la Astrología, seudo ciencia de la predicción por el estudio de los cuerpos celestes, considerada como la antecesora de la Astronomía. A este respecto, los babilonios suponían que la esfera celeste giraba alrededor de la Tierra y que el año constaba de 360 días. Esto los condujo a dividir la circunferencia en 360 partes de esta manera se originó, probablemente, el actual sistema de medida de ángulos basados en *grados*.

La medida de figuras sencillas, formados con líneas rectas y circunferencias, exigía un conocimiento de sus propiedades y fue el estudio de esas propiedades lo que condujo al perfeccionamiento de la Geometría.

Egipcios.

Los antiguos egipcios nos legaron una considerable cantidad de conocimientos de *Aritmética*, *Álgebra elemental* y sobre medidas, adquiridas a propósito de la construcción de las pirámides, la agrimesura del Valle del Nilo subsiguiente a las inundaciones anuales, y el estudio de la Astrología. Estos conocimientos se han conservado y han llegado hasta nosotros gracias a los antiguos manuscritos descubiertos recientemente tanto en las pirámides, como en tumbas y palacios de los antiguos egipcios.

El más antiguo de esos viejos manuscritos egipcios de los que se han descubierto hasta ahora, lo escribió hacia el año 1700 a. de J.C. un sacerdote llamado Ahmes. El manuscrito original está ahora en el Museo Británico. Dicho manuscrito consta una especie de resumen o colección de reglas y problemas con sus respuestas, que tratan de cuestiones aritméticas y de la medida de varias figuras geométricas.

El título del documento es "*Instrucciones para el conocimiento de todas las cosas obscuras*", que indica que los conocimientos matemáticos eran un secreto que pertenecía a los sacerdotes y a los encargados de la erección de los monumentos públicos. Esa obra parece ser una copia mejorada de otra anterior que se remonta 1000 años atrás. De esta manera el documento escrito más antiguo que revela conocimientos geométricos concretos data probablemente del año 2700 a. de J.C.

La fama de la sabiduría de los egipcios se extendió por todo el mundo civilizado de aquel tiempo, y estudiantes y eruditos procedentes de otros países fueron a estudiar a Egipto. Entre ellos estaban los antiguos griegos, que empezaron a ir a Egipto hacia el año 600 a. J.C. y quedaron muy impresionados por los métodos que los egipcios empleaban en la Agrimensura y el Cálculo. Estudiaron estos métodos muy cuidadosamente y al conjunto de ellos le dieron el nombre de *Geometría* (*medida de la tierra*).

Griegos.

Para los egipcios el sistema utilizado para medir la tierra era puramente práctico y no tenía otro interés que el de su utilidad; le prestaban poca atención a su perfeccionamiento siempre y cuando no resultara algo útil en la aplicación. Por el contrario, los primeros filósofos griegos se interesaban por conocer la Geometría por ella misma, sin tener en cuenta su utilidad, y la estudiaron, perfeccionaron y aplicaron como una rama del saber, tan sólo por curiosidad intelectual y por amor al descubrimiento de la verdad.

Los eruditos griegos regresaron de Egipto a su propio país y enseñaron la Geometría en sus escuelas privadas, desarrollándose entre los filósofos griegos un gran interés por los nuevos conocimientos. Estudiaron las propiedades de las figuras geométricas, las relaciones que ligaban esas propiedades, y la demostración, mediante la lógica pura, de nuevas verdades partiendo de las ya conocidas. De este modo pronto supieron bastante más acerca de esta ciencia que los egipcios, y escribieron documentos y libros que trataban de diferentes partes de ella.

Los agrímensores, los constructores, los marinos y los astrónomos griegos pronto empezaron a hacer uso de la parte práctica de la Geometría pura de los filósofos, y la aplicaron a sus respectivas ciencias. Lo que los egipcios habían hecho por medio de la Geometría lo hicieron ahora los griegos mucho mejor, y también extendieron el uso de esta ciencia a otros campos en que los egipcios no la habían empleado. De esas aplicaciones que de la Geometría hicieron los griegos, destacan las relaciones con las bellas artes y las que dieron lugar a las nuevas ciencias, llamadas Trigonometría y Geodesia.

Los hombres de ciencia griegos sabían que la Tierra tiene una forma muy parecida a una esfera, y determinaron muy aproximadamente su tamaño y forma. Uno de los que irigieron estos trabajos fue Eratóstenes, que posteriormente, cuando Egipto fue conquistado por Alejandro el Grande, dio sus enseñanzas en ese país. Determinó la circunferencia y el diámetro de la Tierra con error de algunos centenares de kilómetros; calculó con mucha aproximación la duración del año (período de revolución de la Tierra), y sugirió el calendario que hoy se llama *Calendario juliano* usado en muchos países hasta época reciente.

Los romanos, que acabaron por conquistar militarmente a los griegos, tomaron de ellos la Geometría práctica que se utiliza en la construcción, navegación e ingeniería, pero restaron muy poca atención a la Geometría como ciencia pura y no contribuyeron en nada a su desarrollo.

De los antiguos griegos que aprendieron de Egipto los conocimientos de Geometría, el primero del que se tiene noticia es Tales, que nació en la ciudad de Mileno el año 640 a. J.C., y murió en la misma población a la edad de 90 años. Fue un acomodado hombre de negocios de mentalidad muy práctica, el cual según parece, la primera vez que visitó Egipto, ya en edad madura, lo hizo en viaje de negocios. Durante su estancia allí se interesó por la Geometría como arte práctica. Permaneció en Egipto durante un tiempo, y poco después de su regreso a su ciudad natal, se retiró de los negocios dedicando el resto de su vida al estudio y enseñanza tanto de la Geometría como de la Atronomía. Ahora es famoso como geómetra y no como hombre de negocios. Se dice que uno de los discípulos de Tales, Anaximandro, fue el primero que intentó clasificar las diferentes partes de la Geometría y escribió un libro sobre ella.

El primero que investigó sistemáticamente los principios sobre los que se basa la Geometría, y que aplicó los métodos de la lógica a su desarrollo sistemático, fue Pitágoras (569-500 a. de J.C.), que estudió primeramente con Anaximandro y después fue a Egipto. Después de una estancia de varios años en este país se estableció en una colonia griega en el sur de Italia dedicándose a la enseñanza de la *Geometría*, *Filosofía*, y *Religión*, intentando basar estas dos últimas sobre principios matemáticos. Su escuela llegó a ser una especie de hermandad y, finalmente, tuvo carácter de sociedad secreta. El emblema de la sociedad era la estrella de cinco puntas dibujadas sin levantar la pluma del papel. En los vértices de esta figura se colocaban las letras de la palabra griega υγιθα, que significa "salud". En el estudio de las propiedades de esta figura, los pitagóricas descubrieron también muchas propiedades de los triángulos y de los pentágonos.

Pitágoras enseñó otras ramas de las matemáticas además de la Geometría, y en esta última descubrió varias proposiciones importantes. Al desarrollar sistemáticamente la materia, él y sus discípulos dieron las primeras, o por lo menos mejores demostraciones de algunas proposiciones que ya se conocían. De entre éstas, se dice que fue él quien primero demostró que el cuadrado construido con un lado igual al mayor de los lados de un triángulo rectángulo, tiene un área igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los otros dos lados (lo más cortos) del triángulo. Esta proposición lleva en su honor el nombre de *Teorema de Pitágoras*. Se conocen otras muchas demostraciones de este teorema además de la de Pitágoras.

Otro de los más famosos geómetras griegos fue Arquitas (nacido hacia el año 400 a. J.C.), continuador de los pitagóricos. Fue el primero que resolvió el famoso problema de determinar geométricamente las dimensiones de un cubo que tenga volumen doble de otro cubo dado, llamado de la "duplicación del cubo". Se dice que Arquitas fue también el primero que aplicó los principios de la Geometría a la Mecánica.

Hipias de Elis, que vivió aproximadamente en la misma época que Arquitas, fue el primero en resolver los problemas teóricos de dividir un ángulo en tres iguales ("trisección del ángulo") y de la "cuadratura del círculo", es decir, encontrar un cuadrado que tenga la misma superficie que un círculo dado. La solución de esos célebres problemas no se consiguió con los métodos de la Geometría pura elemental, (en realidad son imposibles de resolver con la regla y el compás), y entre los que se destacaron en la investigación de esos métodos de resolución se encuentra Hipócrates de Chíos que nació hacia el año 470 a. de J.C., a quien no debe confundirse con el célebre médico Hipócrates de Cos, que vivió en la misma época. En sus investigaciones Hipócrates descubrió muchas propiedades del círculo y de los ángulos, así como otras verdades geométricas, extendiendo considerablemente la esfera de estos conocimientos. Escribió un libro, que puede considerarse como el primer texto de Geometría pura.

Dos de los más grandes filósofos griegos de la antigüedad fueron Platón (429-328 a. de J.C.) y su discípulo Aristóteles (384-322 a. de J.C.), que vivieron y enseñaron ambos en Atenas, capital y centro de la cultura griega. Platón estaba especializado en Filosofía pura y en Geometría, y prestó particular atención a los fundamentos lógicos de esta ciencia. Dirigió una escuela situada en un parque próximo a la ciudad de Atenas, y según se dice colocó en la puerta un aviso prohibiendo la entrada a los que no supieran Geometría. Aristóteles abarcó todas las ramas del saber y, entre otras cosas, escribió sobre Geometría y Física, habiendo sido reconocido como una autoridad no solamente en su tiempo, sino durante muchos siglos más tarde.

Después de la época de Aristóteles, el centro del saber volvió a Egipto, que por entonces había sido conquistado y colonizado por los griegos bajo el mando de Alejandro el Grande. Este construyó en el delta del Nilo una gran ciudad, a la que llamó Universidad y una Biblioteca. Los eruditos y estudiantes de todo el mundo acudían a la Universidad de Alejandría, y durante centenares de años fue el centro y la capital del saber humano.

Escuela de Alejandría.

Dos de los mayores matemáticos de la edad de oro Alejandría y de toda la antigüedad, fueron Euclides, alejandrino de ascendencia griega, y Arquímides, griego siciliano que estudió y trabajó durante algunos años en Alejandría.

De Euclides se sabe muy poco aparte de los hechos de que nació hacia el año 330 a. de J.C. y murió hacia 275 a. de J.C., que pasó la mayor parte de su vida en Alejandría y que durante muchos años enseño matemáticas en aquella Universidad y a discípulos particulares. Se le atribuye la frase de que "no hay ningún camino real que conduzca al saber". Se dice que uno de sus discípulos particulares fue el joven príncipe Ptolomeo, hijo del rey Ptolomeo de Egipto, y que, en una ocasión, el príncipe que no se interesaba mucho por la *Geometría*, le preguntó a su maestro si no había una manera corta y fácil de aprender *Geometría*, a cuya pregunta Euclides contesto: "Oh, príncipe, no hay camino real que conduzca a la *Geometría*". Aunque se sepa tan poco de la vida de Euclides su obra llena una gran parte en la Historia de las Matemáticas. Muchos de sus discípulos se hicieron famosos y han dejado descripciones de sus enseñanzas, de sus descubrimientos y de sus escritos, habiendo llegado hasta nosotros la mayoría de estos últimos.

Escribió libros sobre muchos temas científicos, pero sus obras más famosas son las de Aritmética, Álgebra y Geometría, siendo esta última la que sirve principalmente de fundamento a su celebridad.

La gran obra de Euclides se llamaba en griego *στοιχια*, en latín *elementa*, y por eso se la conoce como los *elementos*, *"Elementos de Matemáticas"*. Abarca partes de la *Aritmética*, teoría de los números, Álgebra, proporciones, y todo lo que se conocía entonces de *Geometría*, estando escrita cada parte en un rollo o libro diferente, numerados consecutivamente. La obra completa constaba de tercer libros o secciones, y siete de ellos, los Libros I, II, III, IV, VI, XI, y XII, estaban dedicados a la *Geometría*. El libro XIII es una especie de suplemento que contiene algo de Geometría. Por lo general se suelen separar los libros de Geometría de los demás dándole al conjunto el nombre de "*Elementos de Geometría*" de Euclides, y a menudo se alude a ellos llamándoles los *Elementos de Euclides*.

Euclides escribió los *Elementos* en los últimos años de su vida y fueron el primer libro completo de esa materia. Sistematizaba toda la materia meticulosamente, enunciaba con gran precisión sus fundamentos, simplificaba muchos de los enunciados y demostraciones de las proposiciones, y clasificaba, ordenaba y numeraba todos los principios fundamentales, las definiciones y las proporciones. También contienen muchas proposiciones originales del mismo Euclides. Se adoptó inmediatamente como libro de texto, y más tarde se extendió por todo el mundo. Ha sido traducido a muchos idiomas y ha llegado a nosotros tal y como Euclides lo dejó, siendo utilizado durante mucho tiempo como libro de texto, y también como modelo y base de todos los otros libros de la llamada Geometría Elemental.

En los *Elementos* supone Euclides que el lector sabe utilizar la regla y el compás, no permitiéndose otros instrumentos. De esta manera que todos los dibujos, demostraciones y soluciones están basados y se llevan a cabo por medio únicamente de la circunferencia y de la línea recta. La Geometría así desarrollada se llama *Geometría Elemental* (de los *Elementos*) y también *Geometría Euclidiana*. En tiempos de Euclides y posteriormente se han desarrollado otros métodos que pertenecen a lo que se llama *Geometría Superior*. Más adelante se mencionan algunos de ellos. Los *Elementos* de Euclides se ocupan de la llamada *Geometría Plana*, que se trata de las figuras que se pueden dibujar en un plano o superficie "plana" y de los *cuerpos sólidos* compuestos de superficies planas o caras. Los cuerpos sólidos, esfera, cilindro y cono (llamados los "tres cuerpos redondos") no los trató Euclides, pero si Arquímedes.

Arquímedes nació en la ciudad colonial griega de Siracusa (Sicilia) el año 287 a. de J.C. Al parecer estaba emparentado con la familia del rey o gobernador de Siracusa, y contó con todas las ventajas para su educación que ofrecían aquellos tiempos. Estudió en Alejandría las artes y las ciencias y, en particular, las Matemáticas. Fue hombre de ciencia e inventor y su contribución original a la Geometría es mayor que la de ninguna otra persona. Sus estudios más notables son los relacionados con el área del círculo y el volumen del cilindro, del cono y al esfera. También descubrió muchas de las propiedades de estas figuras y de las relaciones que hay entre ellas.

Sistematizó todos estos conocimientos a la manera de Euclides y escribió varios textos sobre esos temas, que han llegado hasta nosotros y han sido agregados a la *Geometría elemental*. Entre sus escritos están: Libros I y II, Sobre la Esfera y el Cilindro, Medida del Círculo, Sobre Conoides y Esferoides, Sobre Espirales, Sobre el Equilibrio de los Planos, el "Método", entre otros.

Arquímedes fue un gran inventor, y escribió y enseñó sobre otras muchas materias, además de la Geometría, incluyendo otras ramas de las Matemáticas, la Mecánica y la Física. Su inventiva mecánica era asombrosa y a él se deben muchísimos inventos y demostraciones útiles que todavía se usan. Se dice que cuando Siracusa fue atacada por los romanos, las autoridades solicitaron su ayuda y que él construyó una máquina para lanzar proyectiles pesados, casi tan eficaz como un cañón. Gracias a sus máquinas pudieron mantener a raya a los romanos durante casi tres años. Finalmente, asediada por el hambre, la ciudad tuvo que someterse, y cuando entraron los romanos, Arquímedes fue asesinado por un soldado que ni siquiera lo conocía.

Los últimos matemáticos griegos de la Escuela Egipcia.

Después de los tiempos de Euclides y de Arquímedes, la Universidad de Alejandría floreció todavía durante unos novecientos años. La gran biblioteca era un depósito de todas las obras de la sabiduría y de la literatura de la antigüedad, y la fama de los matemáticos de todas las naciones que se reunían allí, se extendió por todo el mundo. Entre los matemáticos, los griegos sobresalían sobre todos los demás, y de ellos merece destacarse uno de la misma categoría que Euclides y Arquímedes, siendo además contemporáneo suyo: Apolonio de Perga (260-200 a. de J.C.). Apolonio estudió y desarrollo una rama de la *Geometría superior* que se ocupa de las curvas y de las figuras llamadas *secciones cónicas*, y su obra y sus métodos fueron después la base de la moderna *Geometría Analítica*.

Otro de los matemáticos alejandrinos fue Erastóstenes, a quien ya hemos mencionado como el matemático y el astrónomo que determinó la forma de la Tierra. Otro muy famoso, al que se suele atribuir la invención de la rama de las matemáticas llamada *Trigonometría*, fue Hiparco de Nicea. La Agrimensura, ciencia que representaba un gran avance sobre las sencillas medidas de los antiguos egipcios y que estaba basada en la *Geometría pura* y en la *Trigonometría*, fue perfeccionada por Herón, que fue también ingeniero notable, inventor de la primera máquina de vapor (hacia el año 120 a. de J.C.).

Muchos continuaron en Alejandría la obra de estos grandes matemáticos destacando el gran geómetra Ptolomeo que vivió en el siglo segundo después de Jesucristo. Descendiente de uno de los reyes de Egipto, no se conoce la fecha de su nacimiento, pero se sabe que murió, ya viejo, el año 168 d. de J.C. Ptolomeo escribió libros sobre proyección ortográfica y esterográfica, que son los fundamentos de la moderna *Geometría Descriptiva*.

Sin embargo, lo más importante de su obra fue la aplicación de la *Geometría* y de la *Trigonometría* a la *Astronomía*. Escribió una gran obra de trece libros (secciones} equivalente en Astronomía a lo que los *Elementos de Euclides* son en *Geometría*. Esta obra fue libro de texto de Astronomía y de Geometría aplicada durante unos mil años, hasta los tiempos de Copérnico era el siglo XVI. La historia del título de esta obra es interesante y curiosa. En griego se título originalmente $\mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau\alpha\ \ \mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\mu\ \ \sigma\upsilon\nu\tau\alpha\xi\iota\zeta$ "gran sintaxis matemática" ; fue traducida al latín como "Megale Syntaxis Megistos" (*La mayor colección*); al árabe como "Al Midschisti" (*El más grande*) y ha llegado a nosotros en la forma Almagesto. En este libro, entre otras muchas cosas notables, figura el primer indicio escrito del uso de los *grados, minutos y segundos* para la medida de ángulos y la determinación del valor aproximado de la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro.

Ciento cincuenta años después de Ptolomeo, vivió Pappus, que perfeccionó la *Geometría Superior*, la teoría sobre secciones cónicas y enunció proposiciones que pueden considerarse, precursoras a los fundamentos del *Cálculo Infinitesimal* y la *Geometría Proyectiva*. Con sus enseñanzas hizo también revivir temporalmente el interés por la *Geometría*, que ya declinaba. Después de Pappus no surgió ningún otro gran geómetra original entre los otros matemáticos famosos de Alejandría, pero uno de ellos nacido en Grecia, Proclus (412-485 d. de J.C.) escribió una especie de historia de la *Geometría* que contiene un comentario a los *Elementos* de Euclides junto con otros comentarios personales interesantes sobre los grandes geómetras alejandrinos.

Después de Proclus, la historia de la Universidad y de los matemáticos alejandrinos ya no tiene interés desde el punto de vista de la *Geometría*. Terminó con la destrucción de la Universidad y la Biblioteca por los árabes que conquistaron y capturaron Alejandría el año 641 d. de J.C. Se dice que utilizaron los libros (rollos) de la Biblioteca como combustible para los hogares de los baños públicos de la ciudad, y que tardaron en gastarlos casi un año.

2. GEOMETRÍA ACTUAL. EL USO DEL RAZONAMIENTO EN LA GEOMETRÍA. EL USO DE LOS SENTIDOS EN LA GEOMETRÍA. CLASIFICACIÓN DE LA GEOMETRÍA. EL USO DE LOS INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN.

El uso del razonamiento en la Geometría.

Geometría (del griego geo, “tierra” y metrein , “medir”), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio.

La Geometría es la ciencia de las propiedades del espacio y de sus relaciones. Pero no hemos definido el "espacio", es una de las ideas o conceptos que nos son naturales, y que es indefinible como otros. Desde el punto de vista de sus usos y aplicaciones, también decimos que *la Geometría es el arte y la ciencia de la descripción y la medida en el espacio*.

En una cadena lógica de razonamiento es necesario empezar con algunos principios básicos. No puede demostrarse que estos principios se verifican, ya que no hay otros principios anteriores que puedan ser utilizados para basar dicha demostración. Estos principios iniciales o básicos se llaman ahora "postulados" , aunque muchos de ellos se han llamado anteriormente "axiomas".

Hoy en día no hay diferencia entre el axioma y el postulado y la mayoría de los axiomas se consideraban postulados y suelen ser los principios básicos para el desarrollo de una ciencia.

Por un proceso de razonamiento, estos principios o postulados, pueden ser usados para deducir y establecer nuevos principios. Estos nuevos principios deducidos se denominan "teoremas".

El uso de los sentidos en la Geometría.

Pronto, en nuestras experiencias de la vida, aprendemos a distinguir entre un objeto que tiene "cuerpo" y ocupa espacio, como un bloque o una caja, y la superficie plana y lisa de esos objetos, que no ocupan espacio, pero que si tienen extensión. El objeto completo se dice que es un *cuerpo sólido*, mientras que la superficie plana, sin espesor, recibe el nombre de *plano*. El cuerpo u objeto puede ser "sólido" en el sentido ordinario de un bloque de piedra, o puede ser "hueco", como una caja vacía. Con todo si ocupa una porción del espacio recibe, en ambos casos, el nombre de *cuerpo sólido*. Si consideramos una superficie plana, tal como la parte lisa superior de una mesa, y la podemos imaginar como existente aparte de la mesa de modo que no tenga espesor, ni ningún doblez ni irregularidad, tendremos la idea de *plano*.

Clasificación de la Geometría.

Todas las líneas y figuras que se pueden trazar sobre un plano se dice son *figuras planas*, y la parte de la *Geometría* que trata de la construcción, relaciones, descripción y medida de las figuras planas recibe el nombre de ***Geometría Plana***.

Todas las líneas, figuras y objetos que se pueden trazar o construir en el espacio, sin limitarse a un plano, se dice que son *cuerpos sólidos*, y la parte de la *Geometría* que trata de la construcción, relaciones, descripción y medida de los cuerpos sólidos, recibe el nombre de ***Geometría del Espacio***.

La ***Geometría Plana y del Espacio***, tales como las hemos definido en el artículo anterior, incluyen la consideración de toda forma concebible de figuras y objetos. Esta *Geometría* es, como ya dijimos la llamada *Geometría Euclidiana Elemental*.

En la parte de conceptos generales se darán algunas definiciones de *Geometría*.

El uso de los instrumentos de medición.

La medida se define como un número que se hace corresponder unívocamente (relación de uno a uno) a una estructura matemática, mediante una función de medida: por ejemplo la magnitud del área de un triángulo. Así, al medir expresamos las magnitudes de dimensiones, entendiéndose por dimensión a todo aquello susceptible de ser medido.

Al utilizar los instrumentos de medición (regla o compás) se debe asegurar que dichos instrumentos están en óptimas condiciones, con el fin de evitar errores de lectura o de trazo. En general los instrumentos que se manejan en la geometría plana son: escalímetro, compás, regla y escuadras.

3. PROPOSICIONES MATEMÁTICAS. AXIOMA Y POSTULADO. TEOREMA. COROLARIO.

Reunimos aquí algunos de los términos que más se emplean en *Geometría* junto con una definición concisa de los mismos. Creemos que se comprenderán sin grandes explicaciones.

En *Geometría*, una ***demostración*** es un razonamiento mediante el cual se establece de una manera lógica la verdad o la falsedad de una proposición.

Un ***teorema*** es una proposición que hay que demostrar.

Un ***axioma*** es una proposición que se admite como evidente.

Una ***construcción*** es la representación de una figura por medio de puntos y líneas.

Un ***postulado*** es el enunciado de una cierta relación muy sencilla que se admite como verdadera.

Un ***corolario*** es un enunciado que se deduce de un teorema y que al igual, se puede demostrar.

4. LA DEMOSTRACIÓN. PARTES DE UNA DEMOSTRACIÓN. PROPOSICIÓN. HIPÓTESIS. TESIS. RECONOCIMEINTO. CONCLUSIÓN.

Un ***problema*** es una proposición en la que se pide la construcción de una figura de manera que satisfaga determinadas condiciones, o bien el cálculo de una magnitud desconocida. En ambos casos, cuando se ha obtenido lo que se pedía, se dice que se ha *resuelto* el problema.

El enunciado completo de un teorema consta de dos partes: la ***hipótesis***, que es lo que se supone, y la ***conclusión o tesis***, que es lo que se trata de demostrar, y que se deduce de la hipótesis.

Los teoremas y problemas de *Geometría* constituyen la parte más importante de su contenido. Una vez dadas las diferentes definiciones, para disponer de un vocabulario geométrico, y una vez enunciando los axiomas y postulados, para que la *Geometría* tenga un punto de partida, toda la sustancia o contenido de la verdad geométrica de la *Geometría* en sí, está contenida en los teoremas y problemas. Cuando los teoremas quedan demostrados y los problemas resueltos, se obtienen todos los conocimientos geométricos.

(No hay que confundir el término "teorema" con "teoría". Una teoría podrá o no ser susceptible de demostración, mientras que un teorema siempre puede ser demostrado. Por consiguiente, el principal e inmediato objeto de la *Geometría* es enunciar y demostrar teoremas, y enunciar y resolver problemas.

Los teoremas y su demostración.

Ya se ha definido un *teorema* como una proposición que hay que demostrar y hemos dicho que consta de hipótesis y de tesis. Una afirmación como la siguiente:

Si dos líneas rectas se cortan, los ángulos que se forman son iguales, es un teorema, La primera parte de la proposición, la que precede a la primera coma, es la hipótesis, y la segunda parte, la tesis. En la segunda parte del enunciado completo la que hay que demostrar.

Una demostración se puede escribir de diferentes maneras. Así, por ejemplo, se puede enunciar el teorema, dibujar una figura para representar la hipótesis, señalándola con letras para poder referirse a ella con comodidad, y expresar después la hipótesis y la tesis o conclusión por medio de esas letras. Empezando por la hipótesis o por una construcción adicional si es necesaria, se dan después los pasos convenientes para el razonamiento en el orden lógico y adecuado, explicando la razón de cada uno de ellos, hasta que finalmente una de esas afirmaciones es la conclusión deseada. El teorema habrá sido entonces demostrado.

Este es el método que siguió Euclides y que se ha venido usando desde entonces. Los enunciados conviene que sean muy precisos y tan cortos como sea posible. No se debe omitir nada necesario, ni incluir nada superfluo. En la forma estrictamente euclidiana, al final de la demostración se añaden las letras c.s.q.d., que representan las palabras "como se quería demostrar".

Otra forma de demostración es la que empieza con un estudio general de una figura previamente constituida, y, de una manera informal, como en la conversación o descripción, pone de manifiesto hechos y propiedades sucesivas, utilizando construcciones adicionales siempre que sea necesario, hasta que se llega a alguna conclusión importante. Entonces se enuncia por primera vez el teorema completo, incluyendo la conclusión a que se acaba de llegar.

Este método, también, es más fácil de seguir que el de Euclides, pero no es tan cómodo para las referencias. Lo empleó muy eficazmente Legrendre en el libro mencionado y todavía se usa muchísimo en los trabajos de investigación modernos y en las aplicaciones de la Geometría.

Axiomas generales.

Se enuncian aquí, sin comentarios, los axiomas generales que se aplican no sólo a la Geometría, sino a todas las Matemáticas:

(1) *Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.*

(2) *Si se suman miembro a miembro varias igualdades, se obtiene otra igualdad.*

(3) *Si se restan miembro a miembro dos igualdades, las diferencias son iguales.*

(4) *Si se suman o se restan miembro a miembro una desigualdad y una igualdad, el resultado es una desigualdad del mismo sentido que la primera.*

(5) *Los equimúltiplos de cantidades iguales son iguales, y los de cantidades desiguales son nuevas desigualdades del mismo sentido que la primera.*

(6) *Los equisubmúltiplos de cantidades iguales son iguales, y los de cantidades desiguales son nuevas desigualdades del mismo sentido que la primera.*

(7) *Las potencias y raíces iguales son igualdades.*

(8) *El todo es mayor que cualquiera de sus partes.*

(9) *El todo es igual a la suma de todas sus partes.*

(10) *En toda operación matemática una cosa se puede sustituir por otra que sea igual.*

Ciertas partes de algunos de estos axiomas pueden ser equivalentes a otros axiomas, pero para nuestros fines es preferible no combinarlos, sino emplearlos tal y como se enuncian.

Frecuentemente se alude al axioma (1) diciendo que es el *axioma de la igualdad.*

Se dice que los axiomas (2) y (3) son respectivamente los *axiomas de la adición y de la sustracción.*

A veces se llama al axioma (4) *axioma de la desigualdad.*

Se suele decir que los axiomas (5) y (6) son, respectivamente, los *axiomas de la multiplicación y de la división.*

Análogamente el axioma (7) es el *axioma de la potenciación y de la radicación.*

Se puede decir que los axiomas (8) y (9) son los *axiomas del todo.*

El axioma (10) es el *axioma de la sustitución.*

Los axiomas y postulados geométricos.

Ya se ha mencionado como se distinguen los axiomas y los postulados, pero aquí se enuncian sin distinción. No será posible confundirlos cuando se examinen.

(11) *Sólo se puede trazar una línea recta entre dos puntos cualesquiera del espacio*.

(12) *Una línea recta se puede prolongar indefinidamente.*

(13) *Siempre se puede trazar una circunferencia que tenga como centro un punto cualquiera, y como radio una longitud cualquiera.*

(14) *Una figura geométrica no cambia de forma ni de tamaño con el movimiento.*

(15) *Todos los ángulos rectos son iguales.*

(16) *Se puede trazar una y sólo una palabra a una línea recta dada, desde un punto exterior a la misma.*

El (11) se llama *axioma de la línea recta.*

El (14) se llama *axioma de superposición.*

El (16) es el famoso *axioma de las paralelas.*

Aunque los matemáticos actuales empleen las palabras "axiomas" y "postulados" como sinónimos, los griegos antiguos hicieron una distinción , la distinción adoptada por Euclides posiblemente es que un axioma es una suposición inicial a todos los estudios, mientras que un postulado es una suposición inicial que pertenece al estudio en mano.

5. CONCEPTOS GENERALES.

Aunque ya se han dado algunas definiciones, aquí se presentan otras que han dado algunos filósofos.

Definición. Es una convención, un cambio de palabras que se establece con el propósito de abreviar la expresión sin introducir algún concepto nuevo.

Axioma. Etimológicamente significa *valor o dignidad*.

Según:

Aristóteles (384-322 a de J.C.). Los axiomas son las proposiciones primeras de las cuales parte la demostración.

Descartes, René (1596-1650). Los axiomas son verdades eternas que residen en nuestra mente.

Locke, John (1632-1704). Los axiomas son proposiciones originales que la experiencia hace explícita.

Kant, Immanuel (1724-1804). Principios sintéticos a priori (que precede del efecto a la causa), en cuanto son evidentemente ciertos.

Mill, John Stuart (1806-1873). Los axiomas son verdades experimentales, generalizaciones de la experimentación.

Russell, Jean Jacques (1712-1778), **Frege**, Gottlob (1848-1925), **Peano**, Giusseppe (1858-1932), y **Hilbert**, David (1862-1943): Los axiomas no son verdaderos ni falsos, han sido adoptados convencionalmente por motivos de conveniencia, como fundamentos o premisas del discurso matemático.

Teorema. Consta de dos partes, la hipótesis que es lo que se supone y la conclusión o tesis que es lo que se trata de demostrar y se deduce de la hipótesis.

Para Aristóteles un teorema es cualquier proposición demostrable, por lo que este término ingresa al lenguaje matemático desde esos tiempos remotos.

Principio. Punto de partida y fundamento de un proceso cualquiera.

Para Christian **Wolf** (1679-1754), un principio es lo que contiene es sí la razón de alguna otra cosa.

Para Henri **Poincaré** (1854-1912), un principio es una ley empírica sustituida al control de la experiencia mediante oportunas convenciones y por razones de comodidad.

Aunque la matemática es una ciencia de carácter y origen abstracto, es importante resaltar que muchos de sus contenidos se han relacionado con aspectos físicos.

Aquí se da una definición de lo que se considera ley de la naturaleza. Ley de la naturaleza es una regularidad establecida con seguridad bastante de los observados en el acontecer natural, siempre y cuando se le considere en el sentido del principio de causalidad.

Principio de causalidad. Todo proceso natural está absoluta y cuantitativamente determinado al menos por la totalidad de las circunstancias o condiciones físicas que acompañan su aparición.

Postulado. Proposición que ni es evidente ni ha sido demostrada, pero que es necesario admitir porque es el único principio del que se deduce una verdad indudable.

Dimensión. Def. Todo aquello susceptible de ser medido. En geometría, es una de las propiedades del espacio.

El **espacio** tal y como lo conocemos, es tridimensional. Para definir un volumen se necesitan tres medidas (dimensiones) largo, ancho y altura.

En Álgebra se usa un concepto más abstracto, a menudo se utilizan espacios con cuatro o incluso con un número infinito de dimensiones. Estos espacios no tienen sentido en el mundo real, pero son herramientas muy útiles y resultan esenciales en ciertas disciplinas, entre ellas la física cuántica.

En la física clásica, al espacio se le considera homogéneo e isótropo. Homogéneo, ya que no existen puntos privilegiados; esto es, sí trasladamos un cuerpo a través del espacio, todos los puntos por los que pasa en su movimiento tienen las mismas características. Isótropo, puesto que no existen direcciones privilegiadas; es decir, si hacemos girar a un cuerpo, todos los segmentos rectilíneos que lo constituyen tienen las mismas características en cuanto al giro.

Demostración. En geometría se refiere a un razonamiento mediante el cual se establece de una manera lógica la verdad o falsedad de una proposición.

Construcción. Representación de una figura por puntos y líneas.

Problema. Como ya mencionamos un problema es una proposición en la que se pide la construcción de una figura que satisfaga determinadas condiciones; o bien, el cálculo de una magnitud desconocida. En ambos casos cuando se desarrolla un problema lo denominaremos resolución y al resultado solución.

Resolución de un problema. Es el proceso que se da a una representación gráfica (construcción) de manera que satisfaga las condiciones establecidas previamente.

Ahora daremos algunas definiciones de *Geometría*:

GEOMETRÍA *es la ciencia de la extensión y la posición en el espacio y la relación entre ellos, mediante procedimientos específico.*

Se le considera como la ciencia de la posición, la forma y la magnitud, y que tiene por objeto el estudio de la extensión considerada bajo sus tres dimensiones línea, superficie y cuerpo. Es la parte de la matemática que estudia los problemas de forma, de medida y de posición de elementos geométricos así, como la relación entre ellos, por medio de procedimientos específicos

.

Las relaciones básicas y fundamentales de la geometría son sus axiomas y postulado, es decir, sus cimientos.

Más concretamente, se puede considerar a la Geometría como la ciencia que trata de la *construcción* de figuras en condiciones dadas, de su *medida* y *propiedades*. Por consiguiente, utilizando la segunda forma del enunciado, se tiene que:

Geometría Plana *es la ciencia que se trata de las figuras planas*. Es la Geometría de *dos dimensiones*.

Geometría del Espacio *es la ciencia que trata de las figuras en el espacio*. Es la Geometría de *tres dimensiones*.

Elementos Básicos. Los elementos básicos de la geometría son ***el punto***, ***la línea***, ***la superficie*** y ***el cuerpo***.

Estos conceptos estrictamente son no definibles, sin embargo es importante tener una idea concreta de dichos conceptos; a saber:

Punto. Se le considera como la intersección de dos líneas y es denotado con una letra mayúscula. Es la mínima expresión de la extensión y por lo tanto no tiene longitud, ni anchura, ni altura; solo nos indica una posición en el espacio.

Línea. Se considera generada por un punto en movimiento que sigue cierta dirección. Su longitud es indefinida. Se le considera como la intersección de dos planos.

Es posible conceptualizarla como aquello que delimita a una superficie o como un conjunto de puntos que tienen como única medida la longitud.

Superficie. Se considera generada por una línea en movimiento con una dirección determinada. Se entiende intuitivamente como la forma exterior de los cuerpos. Otra forma, es el límite que separa a un cuerpo del espacio que lo rodea. Configuración geométrica con dos direcciones de expansión.

Cuerpo. Se considera como la parte del espacio limitado por superficies llamadas caras. Puede ser sólido o hueco.

Concepto de ángulo. *Angulo del lat. angulum, rincón.*

Este concepto aparentemente sencillo tiene diferentes acepciones según su uso, a saber:

Curso de Geometría; Lamadrid Arturo A.; Vda. de Ch. Bouret; México 1914. *Se llama ángulo, a una figura plana formada por dos semirrectas que parten de un mismo origen. Las semirrectas se llaman lados del ángulo, su origen común vértice del ángulo.*

Elementos de Geometría; Bruño, G.M.; Edit. Enseñanza; México 1950. *Ángulo es la figura formada por dos semirrectas que parten de un mismo origen. Estas líneas se llaman lados del ángulo y su intersección vértice.*

Geometría Plana; Barnett Rich, PH. D.; McGraw Hill; México 1977. *Se denomina ángulo, a una figura formada por dos rectas que se cortan en un punto. Las rectas se llaman lados del ángulo y el punto es su vértice.*

Enciclopedia Autodidáctica; Guillet, USA 1977. *Ángulo es la porción de plano limitada por dos semirrectas que parten del mismo punto.*

Matemática; Diccionario Rioduero; España 1977. *Ángulo: queda determinado por dos semirrectas con un origen común (el vértice) que se pueden superponer mediante un giro. La medida de este giro indica la medida del ángulo.*

Geometría Thompson, J. E.; UTEHA; México 1981. *Cuando dos rectas se cortan en un punto o están trazadas en direcciones diferentes a partir del mismo punto, la figura que forman recibe el nombre de ángulo. Las rectas son los lados del ángulo y el punto en que se cortan es el vértice.*

Pequeño Larousse Ilustrado; Larouse; México 1988. *Ángulo. Ángulo rectilíneo, abertura por dos líneas que parten de un mismo punto.*

Gran Enciclopedia Educativa; Programa Educativa Visual¸Colombia 1991. *Ángulo es la porción de plano limitado por dos semirrectas llamadas lados y un origen común llamado vértice del ángulo.*

Geometría y Trigonometría; Baldor; USA 1992. *Ángulo es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice. Las semirrectas se llaman lados.*

Nueva Enciclopedia Temática; Planeta; España 1993. *Todo ángulo puede considerarse engendrado por la rotación de una semirrecta alrededor de su origen. Dicha rotación puede efectuarse en dos direcciones.*

Diccionario Enciclopédico; Grijalbo; Argentina 1995. *Ángulo es la porción del plano comprendida entre dos semirrectas (lados) de origen común (vértice). Se mide según el arco intersecado por sus lados en una circunferencia centrada en el vértice, en grados sexagesimales o centesimales y en radianes.*

Pequeño Larouse; México 1977. *Ángulo (Lat. Angulum, rincón). Figura formada por dos semirrectas, o por dos semiplanos, o caras que se cortan.*

Libro de Texto de 3er. Año de Primaria SEP; México 2000. *Un ángulo está formado por la unión de dos rayos, denominados lados que tienen el mismo punto externo o vértice..*

Libro de Texto de 6º. Año de Primaria SEP; México 2000. *Ángulo es la magnitud de rotación de una semirrecta que gira sobre otra que permanece fija.*

Como puede observarse esta diversidad de definiciones seguramente ha provocado la confusión que presentan los alumnos no solo en esta etapa sino desde etapas tempranas.

Consideramos que esta última definición cumple con las necesidades que manejamos cuando tratamos de las rotaciones. Tal parece que los conceptos ángulo y giro se manejan por separado y no conjuntamente como debiera ser.

6. RAZONES Y PROPORCIONES.

Razón. La razón es el resultado de comparar matemáticamente dos cantidades entre sí, sin tomar en cuenta su especie.

Cuando la comparación se hace restando, se le llama razón aritmética por diferencia:

$$\mathbf{A - B = R}$$

Cuando la comparación se hace dividiendo, recibe el nombre de razón geométrica o por cociente:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \mathbf{R}$$

Problemas que implican razones. Los problemas de dividen en dos tipos:

a) problemas donde se requiere determinar la razón entre dos cantidades conocidas, y,

b) problemas donde conocida una cantidad, se requiere descomponerla en dos partes de acuerdo a una razón geométrica.

Actividad:

Tenga a la mano un tramo de cuerda o listón de cualquier medida y doble de tal forma que una de sus partes este en razón con respecto a la otra:

Razones propuestas:

- 1/1
- 1/2
- 1/4
- 3/4
- 5/7

Proporción geométrica. Una proporción geométrica es una igualdad formada por dos razones geométricas.

Se tienen dos formas de expresar una proporción:

extremo : medio :: medio : extremo

$$\frac{\textbf{extremo}}{\textbf{medio}} = \frac{\textbf{medio}}{\textbf{extremo}}$$

La aritmética elemental define dos clases de proporciones, a saber:

Discretas: su característica es que los términos o elementos que la componen todos son diferentes.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

En ella se incluye la que conocemos como cuarta proporcional, llamada así cuando se desconoce el valor de cualquiera de sus elementos.

Ejemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Continuas: su característica es que los términos medios o extremos que las componen son iguales.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{a}$$

En ellas se incluyen las que conocemos como tercera proporcional y media proporcional.

Media proporcional, llamada así cuando se desconoce el valor de los términos medios o extremos.

Ejemplos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{x}{b} = \frac{c}{x}$$

Tercera Proporcional, llamada así cuando se desconoce el valor de cualquiera de las cantidades no iguales.

Ejemplo:

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$$

Propiedad general: el producto de sus medios es igual producto de sus extremos, que corresponde a la forma de comprobar la equivalencia entre fracciones.

Cantidades directa e inversamente proporcionales.

Son cantidades directamente proporcionales aquellas que al aumentar o disminuir el valor de una, en la misma proporción, hace aumentar o disminuir el valor de la otra.

Son cantidades inversamente proporcionales, aquellas donde al aumentar el valor de una de ellas, en la misma proporción, hace que disminuya el valor de la otra.

Actividad. Diseñar dos problemas que ejemplifiquen las situaciones mencionadas arriba.

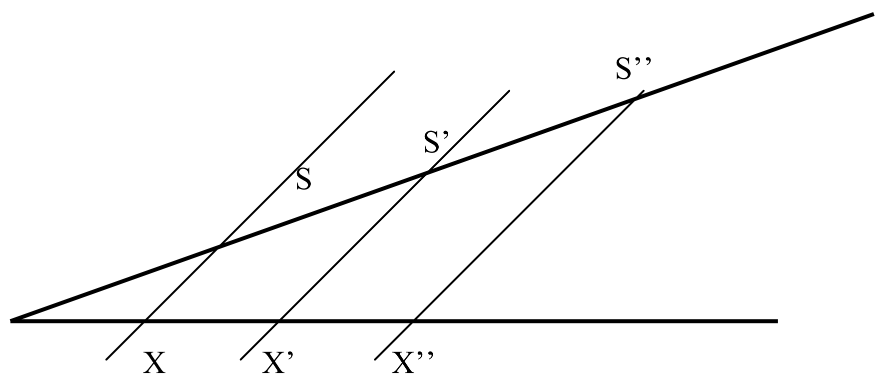
Actividad. Comente con algún compañero si es posible resolver el problema: Si en una lata de sardinas se encontraron 6 sardinas ¿cuántas latas deben abrirse para juntar 30 sardinas?

7. PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS Y SEMEJANZA,

Proporcionalidad de segmentos.

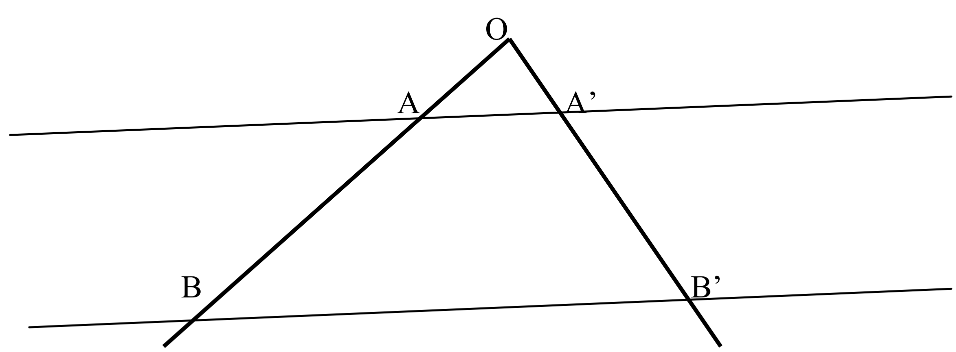
El tratamiento de problemas que incluían el concepto de proporcionalidad fue tratado hacia el siglo VI a C., por uno de los siete sabios de Grecia, el matemático Tales de Mileto.

Actividad. Construya, con el apoyo de escuadras y escalímetro, varias paralelas, que estén a la misma distancia, de tal forma que determinen segmentos iguales sobre una recta horizontal, y compruebe que determinan también segmentos iguales sobre cualquier otra recta.



Teorema de Tales.

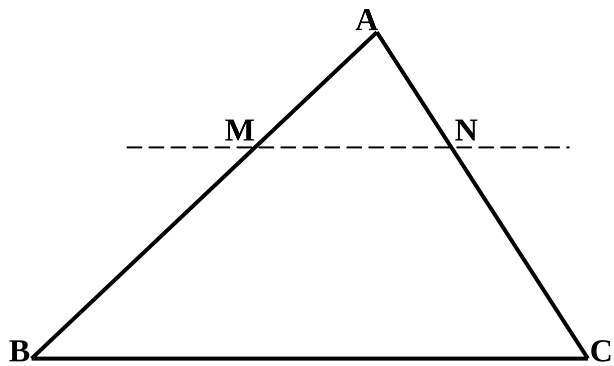
Los segmentos determinados por rectas paralelas en dos concurrentes son proporcionales.



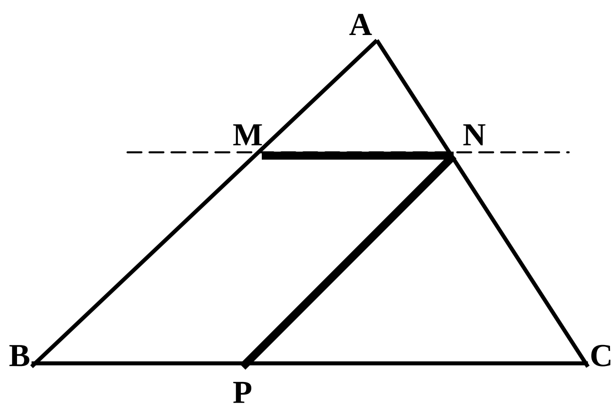
$$\frac{OB}{AB} = \frac{OB'}{A`B`}$$

Actividad. Obtenga las proporciones entre los lados de las siguientes representaciones gráficas.

a)



b)



Conclusiones.

Toda paralela a un triángulo determina con los otros lados un nuevo triángulo cuyos lados son proporcionales a los del primero.

El teorema de Tales también permite dividir un segmento de recta cualquiera en un número de partes iguales cualesquiera.

Actividad. Dividir un segmento de recta en:

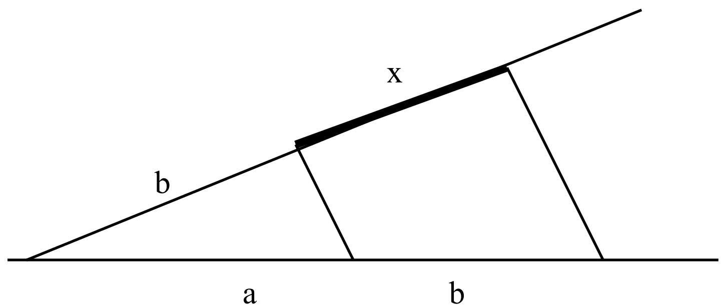
- 5 partes iguales,
- 7partes iguales, y,
- 13 partes iguales.

La tercera proporcional y su relación con la sección áurea.

Formalmente. Un segmento x se llama tercera proporcional de dos segmentos dados a y b si se comprueba que:

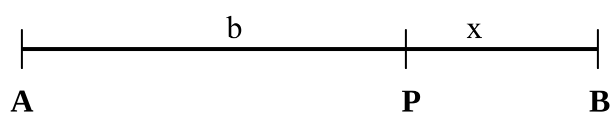
$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}$$

En la representación se muestra una forma de obtener geométricamente la tercera proporcional de dos segmentos.



La construcción queda justificada por el T. de Tales.

Otra forma de observar la tercera proporcional es sobre un segmento de recta. Se identifica un punto P sobre el segmento AB, de forma tal que PB sea la tercera proporcional de AB y AP, a saber:



$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB} \quad \textbf{o también} \quad \frac{\mathbf{b}+\mathbf{x}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{x}} \qquad \textbf{…. (1)}$$

La razón de esta proporción se le conoce como $\phi = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{x}}$. Esta razón era conocida por los griegos con el nombre de *La Sección*.

En el Renacimiento, el monge Luca Pacioli (1509) la llamó *Divina Proporción* y Leonardo da Vinci le asigno el nombre de *Sección Aurea*, que es como se conoce como hasta ahora.

Si en la expresión (1) dividimos el numerador y el denominador del primer miembro de la proporción entre x, la fracción no se altera, obteniendo:

$$\frac{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{x}}+1}{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{x}}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{x}} \quad \textbf{y por tanto} \quad \frac{\phi+1}{\phi}=\phi \qquad \textbf{… (2)}$$

igualando a 0 se obtiene: $\boldsymbol{\phi^2 - \phi - 1 = 0}$

Actividad: Resolver la ecuación de segundo grado y comprobar que:

$$\boldsymbol{\phi = 1.618033989\ldots}$$

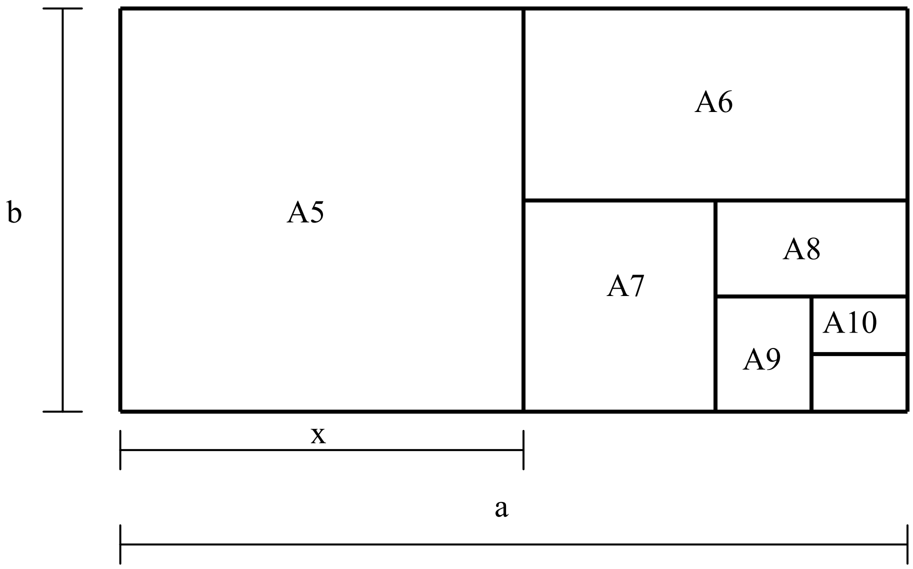
Este valor se conoce como el *número de oro*.

Cabe mencionar al respecto que, los antiguos ya conocían algunas relaciones entre los dedos de las manos, así por ejemplo en un dedo, la relación entre la primera falange y la segunda, así como entre la segunda y la tercera, guarda esta relación.

Actualmente esta relación se aplica al uso de papel corriente para poder establecer los formatos normalizados DIN A y sus dimensiones respectivas DIN A0 hasta DIN A10, siendo el más frecuente el DIN A4 (folio).

Formato DIN 476-serie A	**Medidas (en mm)**
A0	**841 x 1 189**
A1	**594 x 841**
A2	**420 x 594**
A3	**297 x 420**
A4	**210 x 297**
A5	**148 x 210**
A6	**105 x 148**
A7	**74 x 105**
A8	**52 x 74**
A9	**37 x 52**
A10	**26 x 37**

Todos estos formatos se obtienen a partir de dividir a la mitad el inmediato superior, tal como se muestra en la figura:



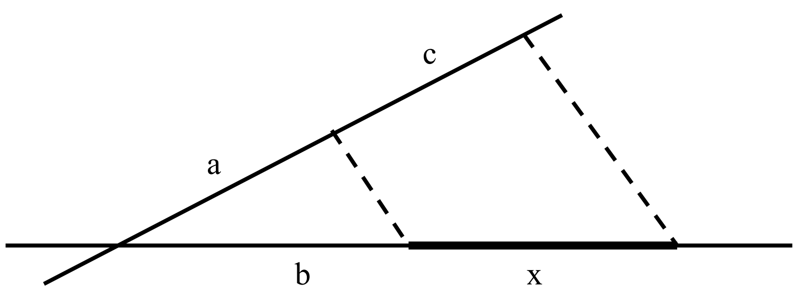
Observe que el valor de x se obtiene como tercera proporcional de a y b.

Cuarta y media proporcional.

Un segmento x se llama cuarta proporcional de otros tres segmentos a, b y c, si se cumple:

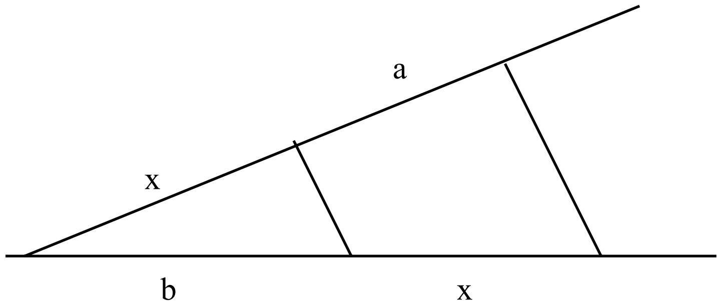
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

La construcción geométrica de dicho segmento cuarta proporcional, también se apoya en el teorema de Tales.



Un segmento x se llama media proporcional de otros dos segmentos a y b, si se cumple:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$



Semejanza.

Para poder establecer formalmente este concepto es necesario definir los siguientes conceptos:

- **Homólogos.** Se designa así a los lados o a los ángulos correspondientes de figuras congruentes o semejantes. Es costumbre señalar con una misma marca en las figuras geométricas, los lados y los ángulos homólogos.

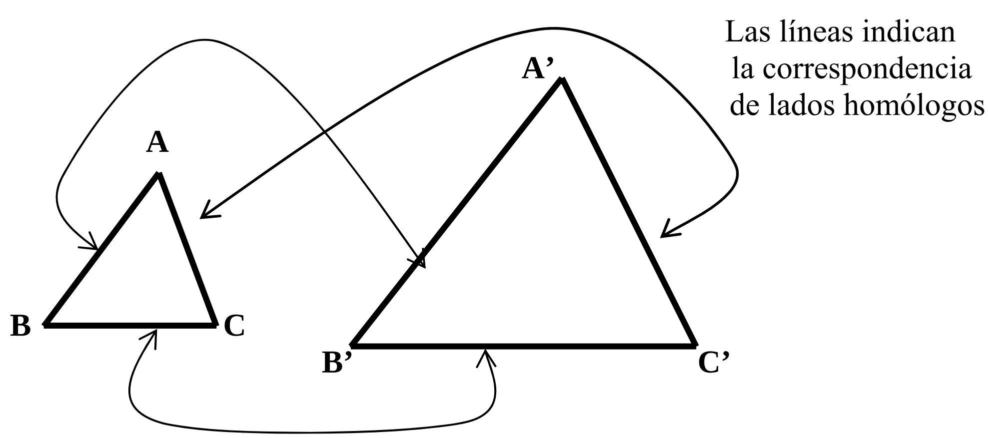
- **Congruencia de ángulos.** Dos ángulos son congruentes (≅) si tienen la misma medida.

El concepto de semejanza nos da la idea de dos figuras con igual forma pero de diferente medida.

La razón o proporción constante entre cada dos segmentos homólogos recibe el nombre de razón de semejanza.

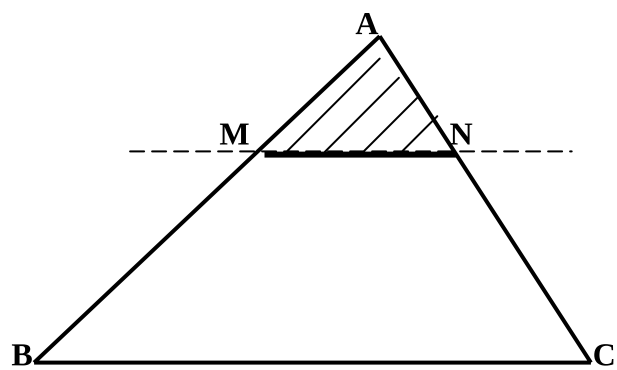
Semejanza de triángulos.

Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma pero distinto tamaño.



En general, dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos homólogos congruentes y sus lados homólogos proporcionales.

Teorema fundamental: si dos lados de un triángulo se cortan por una paralela al tercero se obtiene otro triángulo semejante al primero.

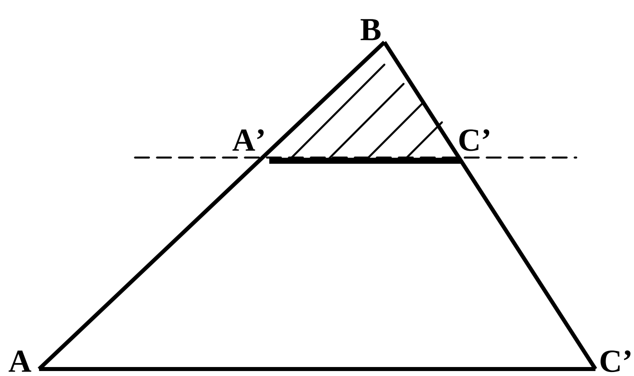


Actividad.
Aplicando teoremas, corolarios definiciones, proposiciones y/o conceptos, demostrar que los ángulos homólogos de los triángulos ABC y AMN con congruentes.

8. CRITERIOS DE SEMEJANZA.

Estos criterios resultan si consideramos que es suficiente que se cumplan ciertas condiciones de relación entre dos triángulos, a saber:

I. Dos triángulos son semejantes si tienen proporcionales sus lados homólogos.
II. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes.
III. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido congruente.



I. $$\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}$$

II. **<A ≅<A' y <C ≅<C'**

III. $$\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'}$$ **y <B ≅ <B**

Actividad.

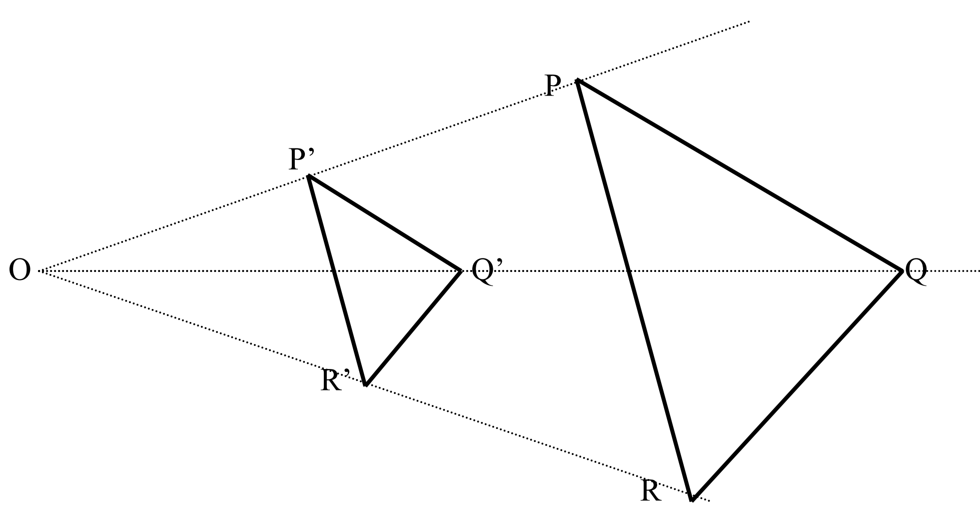
- Construir un triángulo inscrito en una semicircunferencia de tal forma que uno de los lados del triángulo coincida con el diámetro.
- Comprobar de dos formas diferentes (experimental y analítica) que se trata de un triángulo rectángulo.
- Trazar la altura del triángulo perpendicular al lado mayor y comprobar de dos formas diferentes (experimental y analítica), que los triángulos que se forman son semejantes.
- Proponer dos formas diferentes para obtener modelos que permitan calcular la altura del triángulo, conocidas las bases de los triángulos que se forman al construir la altura.

De una conclusión de lo observado.

9 HOMOTECIA.

Relación que hace corresponder biunívocamente los puntos de dos figuras geométricas con respecto a un punto colineal con cada par de puntos correspondientes llamado centro de homotecia, y tal que la razón de las distancias de puntos correspondientes a dicho centro es una constante, llamada constante e homotecia.

Se dice que dos figuras son homotéticas con relación a un punto O cuando a todo punto P de la primera corresponde a un punto P' de la segunda tal que la recta PP' pase por O y la razón OP : OP' permanece constante.

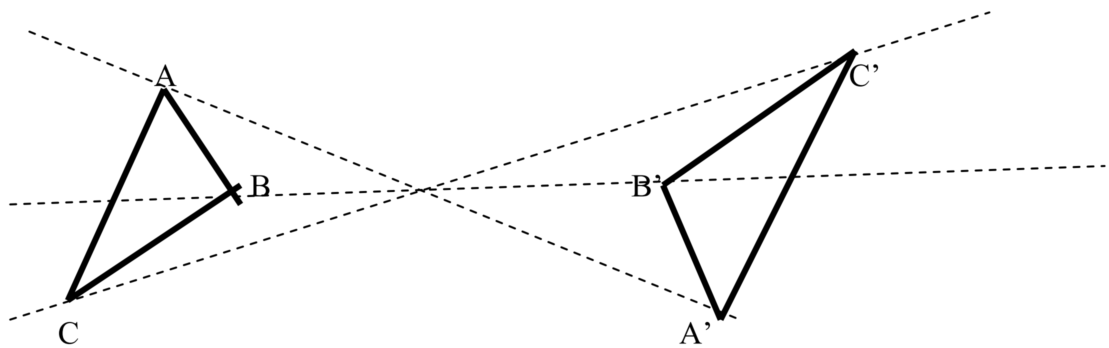


Homotecia directa (es toda homotecia cuya constante es mayor que cero).

El punto O se denomina centro de hometecia y la razón constante k:

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{OQ}{OQ'} = \frac{OR}{OR'} = \mathbf{k}$$

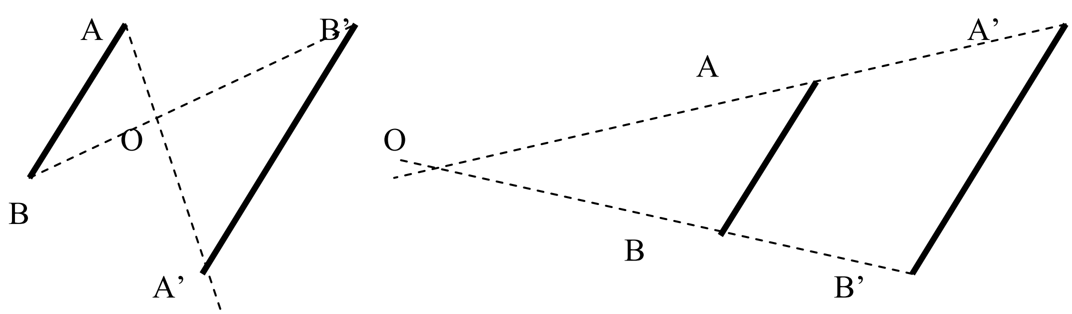
se llama razón de homotecia o constante de homotecia.



Homotecia inversa (es toda homotecia cuya constante es menor que cero).

Propiedades de la homotecia.

- Un punto de una figura sólo tiene un punto homotético directo y uno inverso para una razón y centro de homotecia dados.



- En dos figuras homotéticas, el segmento AB que une dos puntos cualesquiera de la primera y el segmento A'B' que une los puntos homólogos de la segunda, son paralelas y la razón de ellos es igual a la razón de homotecia.

- La figura homotética de una recta es otra recta.

- El ángulo formado (comprendido) por dos rectas es igual al ángulo formado (comprendido) por sus homotéticas.

- La figura homotética de un polígono es otro polígono semejante al primero.

- La figura homotética de una circunferencia es otra circunferencia.

Actividad.
Dibujar una circunferencia de radio igual a 2.5 cm y construir su homotética directa de acuerdo a k = 2. Obtener el radio de la circunferencia homotética.

Actividad.
Dibujar un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio y obtener su homotética directa de acuerdo k = ½.

Actividad.
Dibujar un hexágono regular de 4cm de lado y construir su homotética inversa de acuerdo a k = -1

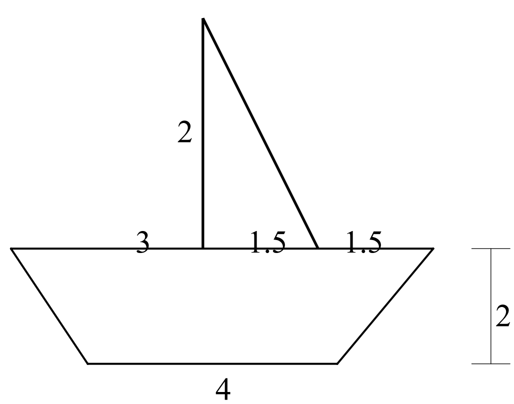
Instrumentos que permiten construir figuras homotéticas.

El pantógrafo. Es un instrumento que se usa para dibujar una figura plana semejante a otra dada. Tiene aplicación en Cartografía donde a menudo se necesita reducir o ampliar planos o mapas. Este aparato fue ideado en 1615 por Marolais.

Otro aparato es el **compás de reducción**.

Aplicaciones de la homotecia.

Dibujar la siguiente figura:



Dimensiones en cm

Obtener su homotética de acuerdo a k = 2

Obtener las razones entre las áreas parciales.

BIBLIOGRAFÍA.

Aragón Benitez, V.
Diccionario de Matemáticas
Edit. Patria
México, 1994

Aragón Bohórquez, Misael A., at el
Diccionario de Matemáticas
Edit. Ediplesa
México. 1979

García Arenas, Jesús at el
Geometría y Experiencias
Edit. Alambra
México, 1996

González, Mario O.
Complementos de Geometría
Minerva Books. LTD
USA, 1965

Klinger, F.
La Geometría
Edit. Marcombo
España, 1979

Martínez Echeverri, Leonor at el
Diccionario de la Filosofía
Edit. Panamericana
Colombia, 1999

Thompson, J. E.
Geometría
Edit. UTEHA
México, 1981

Verlag Herder, KG
Diccionario Rioduero
Edit Rioduero
España, 1977