UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2015 -2 **TIPO 1**
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS

NOMBRE____
Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Grupo**

____
FIRMA

Instrucciones: Lee detenidamente los cinco enunciados, este examen es la demostración de tu aprendizaje a lo largo del semestre, trata de entender y resolver primero los que tienes seguridad en tu conocimiento.

1. Resolver $(6x+1)\,y^2\dfrac{dy}{dx}+3x^2+2y^3=0$

2 PUNTOS

Resolución:

Ordenando:

$$(6x+1)\,y^2\frac{dy}{dx}=-3x^2-2y^3$$

$$\left(3x^2+2y^3\right)dx+\left(6xy^2+y^2\right)dy=0$$

$$M(x,y) \qquad\qquad N(x,y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6y^2 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=6y^2$$

dado que son iguales es una ecuación diferencial exacta.

Entonces la solución está dada por $f(x,y)=C$

$$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx$$

$$f(x,y)=\int\left(3x^2+2y^3\right)dx=x^3+2xy^3+f(y)$$

derivando con respecto a y e igualando:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

$$6xy^2+f'(y)=6xy^2+y^2$$

por lo que: $f'(y)=y^2$

integrando: $f(y)=\frac{1}{3}y^3$

sustituyendo en la solución:

$$f(x,y)=C$$

$$x^3+2xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

$3x^3+6xy^3+y^3=C$ Es la solución general.

2. Resolver la ecuación diferencial $xD(xy)+x^2D^2y-xy=x^2\left(e^{-x}+2\cos x\right)$

2 PUNTOS

Resolución:

$$xD(xy)+x^2D^2y-xy=x^2\left(e^{-x}+2\cos x\right)$$

$$x\left[y+xDy\right]+x^2D^2y-xy=x^2\left[e^{-x}+2\cos x\right]$$

$$xy+x^2Dy+x^2D^2y-xy=x^2\left[e^{-x}+2\cos x\right]$$

$$Dy+D^2y=e^{-x}+2\cos x$$

$$\left(D^2+D\right)y=e^{-x}+2\cos x$$

$$D(D+1)y=e^{-x}+2\cos x$$

Es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, no homogénea.

Para y_H:

$$D(D+1)y=0 \;;\quad m(m+1)=0 \;;\quad m_1=-1 \;\; y \;\; m_2=0$$

Por lo tanto:

$$y_H=C_1e^{-x}+C_2$$

Para y_P por el método de variación de parámetros:

$$y_P=ue^{-x}+w$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} e^{-x} & 1 \\ -e^{-x} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u' \\ w' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-x}+2\cos x \end{bmatrix}$$

premultiplicando por la matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} u' \\ w' \end{bmatrix} = \frac{1}{e^{-x}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ e^{-x} & e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-x} + 2\cos x \end{bmatrix} = e^{x} \begin{bmatrix} -\left(e^{-x} + 2\cos x\right) \\ e^{-x}\left(e^{-x} + 2\cos x\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2e^{x}\cos x \\ e^{-x} + 2\cos x \end{bmatrix}$$

igualando: $u' = -1 - 2e^{x}\cos x$, $w' = e^{-x} + 2\cos x$

integrando:

$$u = -x - 2\left[\frac{1}{2} e^{x}\left(\cos x + sen\, x\right)\right] + C, \quad w = -e^{-x} + 2\, sen\, x + C$$

$$u = -x - e^{x}\left(\cos x + sen\, x\right) + C$$

sustituyendo en y_P:

$$y_P = \left[-x - e^{-x}\left(\cos x + senx\right)\right] e^{-x} + 2sen\, x - e^{-x}$$

$$y_P = -xe^{-x} - \cos x + senx - e^{-x}$$

$$y_G = C_1 e^{-x} + C_2 - xe^{-x} - e^{-x} - \cos x + senx$$

3. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} bx' + ay' - 4x &= 5y \\ ax' - by' &= 3x \end{aligned} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Determinar el valor de las constantes “a” y “b” de manera que $x = e^{t}$ y $y = -e^{t}$ sean solución del sistema dado para las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $y(0) = -1$

2 PUNTOS

Resolución:

Se requiere que: $x = e^{t}$, $x' = e^{t}$, $y = -e^{t}$, $y' = -e^{t}$

$$bx' + ay' - 4x = 5y \ldots(1)$$

$$ax' - by' = 3x \ldots(2)$$

sustituyendo en 1:

$$be^{t} - 4e^{t} + a\left(-e^{t}\right) - 5\left(-e^{t}\right) = 0$$

$$be^{t} - 4e^{t} - ae^{t} + 5e^{t} = 0$$

$$b - a + 1 = 0$$

sustituyendo en 2:

$$ae^{t}-3e^{t}-b\left(-e^{t}\right)=0$$

$$a+b-3=0$$

el sistema con los valores es:

$$\begin{cases} -a+b=-1 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2b & = & 2 \\ a+b & = & 3 \end{array} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} b=1 \\ a=2 \end{array}$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{array}{rcl} x'-4x+2y'-5y & = & 0 \\ 2x'-3x-y' & = & 0 \end{array}$$

4. Determinar la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales haciendo uso de la transformada de Laplace

$$\begin{array}{l} x'+y'=1 \\ x'+6y-x=0 \end{array}$$

sujeto a $x(0)=y(0)=-1$ obtener sólo $x(t)$

2 PUNTOS

Resolución:

El sistema es:

$$\begin{array}{l} x'+y'=1 \\ x'+6y-x=0 \end{array} \quad ; \quad x(0)=y(0)=-1, \quad \text{sólo } x(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$s\,X(s)-(-1)+sY(s)-(-1)=\frac{1}{s}$$

$$s\,X(s)+sY(s)=\frac{1}{s}-2 \qquad \ldots(1)$$

$$sX(s)-(-1)+6Y(s)-X(s)=0$$

$$sX(s)+6Y(s)-X(s)=-1$$

$$6Y(s)=-1+X(s)-sX(s)$$

$$Y(s)=\frac{1}{6}\left[-1+X(s)-sX(s)\right]$$

sustituyendo en (1):

$$sX(s)+s\left[\frac{1}{6}\left(-1+X(s)-sX(s)\right)\right]=\frac{1}{s}-2$$

$$sX(s)-\frac{s}{6}+\frac{1}{6}sX(s)-\frac{s^2}{6}X(s)=\frac{1}{s}-2$$

factorizando:

$$X(s)\left[s+\frac{1}{6}s-\frac{s^2}{6}\right]=\frac{1}{s}-2+\frac{s}{6}$$

$$X(s)\left[\frac{7}{6}s-\frac{s^2}{6}\right]=\frac{6-12s+s^2}{6s}$$

$$X(s)\left[\frac{s}{6}(7-s)\right]=\frac{s^2-12s+6}{6s}$$

$$X(s)=-\frac{1}{s(s-7)}\left[\frac{s^2-12s+6}{s}\right]=-\frac{s^2-12s+6}{s^2(s-7)}$$

Aplicando antitransformada de Laplace:

$$x(t)=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-12s+6}{s^2(s-7)}\right\}=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-7}\right\}$$

por fracciones parciales, se tiene:

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{78}{49s}+\frac{6}{7s^2}+\frac{29}{49(s-7)}\right\}$$

por linealidad:

$$x(t)=-\frac{78}{49}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{6}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{29}{49}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-7}\right\}$$

$$x(t)=-\frac{78}{49}+\frac{6}{7}t+\frac{29}{49}e^{7t}$$

5. Desarrollar la función $f(x)=\begin{cases} -3 & ; \quad -\pi<x<0 \\ 3 & ; \quad 0<x<\pi \end{cases}$ en una serie de senos

2 PUNTOS

Resolución:

Se sabe que la función es impar. El desarrollo en serie de senos está dado por:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$

donde $b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$

$p = \pi, \quad sustituyendo:$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 3\,sen\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)dx = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi} sen(nx)\,dx$$

integrando:

$$b_n = \frac{6}{\pi}\frac{1}{n}\left[-\cos(nx)\right]_0^{\pi} = -\frac{6}{n\pi}\left[\cos(n\pi)-1\right]$$

$$b_n = \frac{6}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

sustituyendo en la serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right]sen\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]sen(nx)$$

$$f(x) = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1+(-1)^{n+1}\right]sen(nx)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2015 -2 **TIPO 2**

DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **29 DE MAYO DE 2015**

NOMBRE____

Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Grupo**

____

FIRMA

Instrucciones: Lee detenidamente los cinco enunciados, este examen es la demostración de tu aprendizaje a lo largo del semestre, trata de entender y resolver primero los que tienes seguridad en tu conocimiento.

1. Resolver $x\,dy+\left(xy+y-x^2-2x\right)dx=0$

2 PUNTOS

Resolución:

$$x\,dy+\left(xy+y-x^2-2x\right)dx=0$$

ordenando:

$$x\,dy=-\left(xy+y-x^2-2x\right)dx$$

$$x\frac{dy}{dx}=x^2+2x-xy-y$$

$$x\frac{dy}{dx}+\left(x+1\right)y=x^2+2x$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x+1}{x}y=x+2$$

es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea, donde:

$p\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x}$ y $g\left(x\right)=x+2$

La solución está dada por: $y_G=y_H+y_P$

El factor integrante es: $\mu\left(x\right)=e^{\int P(x)dx}$

entonces $\mu(x)=e^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}=e^{x+\ln x}=e^{x}e^{\ln x}=xe^{x}$

multiplicando toda la ecuación diferencial por el factor integrante, se tiene:

$$xe^{x}\frac{dy}{dx}+xe^{x}\left(\frac{x+1}{x}\right)y=xe^{x}(x+2)$$

se observa que:

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{x}y\right]=xe^{x}g(x)$$

$$xe^{x}\frac{dy}{dx}+e^{x}(x+1)=xe^{x}(x+2)$$

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{x}y\right)=xe^{x}(x+2)$$

$$d\,xe^{x}y=\left(xe^{x}(x+2)\right)dx=\left(x^{2}e^{x}+2xe^{x}\right)dx$$

integrando:

$$xe^{x}y=\int\left(x^{2}e^{x}+2xe^{x}\right)dx$$

$$xe^{x}y=x^{2}e^{x}-2xe^{x}+2e^{x}+2xe^{x}-2e^{x}+C=x^{2}e^{x}+C$$

$$y=x+C\frac{e^{-x}}{x}$$

2. Resolver la ecuación diferencial $y'''+y''+y'+y=30e^{2x}+80\,sen\,3x$

2 PUNTOS

Resolución:

$$y'''+y''+y'+y=30e^{2x}+80\,sen\,3x$$

$$D^{3}y+D^{2}y+Dy+y=30e^{2x}+80\,sen\,3x$$

$$\left(D^{3}+D^{2}+D+1\right)y=30e^{2x}+80\,sen\,3x$$

La solución está dada por:

$$y_G=y_H+y_P$$

Para y_H: $\left(D^{3}+D^{2}+D+1\right)y=0$

$$(D+1)\left(D^2+1\right)y=0$$

el polinomio auxiliar es:

$$(m+1)\left(m^2+1\right)=0$$

$m_1=-1$, $m_2=-i$, $m_3=i$

con $a=0$ y $b=1$

$$y_H=C_1e^{-x}+C_2 sen\,x+C_3\cos x$$

Para y_P:

$$P_1(D)=(D-2)\left(D^2+9\right)$$

$$(D-2)\left(D^2+9\right)(D+1)\left(D^2+1\right)y=0$$

entonces, se propone de acuerdo con $g(x)=30e^{2x}+80sen(3x)$

$$y_P=Ae^{2x}+B\,sen\,3x+C\cos(3x)$$

debe satisfacer la ecuación diferencial, entonces:

$$y_P'''+y_P''+y_P'+y_P=30e^{2x}+80\,sen(3x)$$

las derivadas son:

$$y_P'=2Ae^{2x}+3B\cos(3x)-3Csen(3x)$$

$$y_P''=4Ae^{2x}-9Bsen(3x)-9C\cos(3x)$$

$$y_P'''=8Ae^{2x}-27B\cos(3x)+27Csen(3x)$$

sustituyendo las derivadas de la solución particular:

$$15Ae^{2x}-24B\cos(3x)+24Csen(3x)-8Bsen(3x)-8C\cos(3x)=30e^{2x}+80sen(3x)$$

igualando:

$$\begin{array}{lll} 15A = 30 & \quad -24B-8C=0 & \quad C=3 \;,\; B=-1 \\ A = 2 & \quad -8B+24C=80 & \end{array}$$

Por lo tanto:

$$y_P=2e^{2x}-sen(3x)+3\cos(3x)$$

La solución general está dada por:

$$y_G=C_1e^{-x}+C_2\,sen\,x+C_3\cos x+2e^{2x}-sen(3x)+3\cos(3x)$$

3. Para el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$x'' + y' = 5t$$
$$2x' - x + y' = sen(t)$$

Obtener la solución general para la variable $x(t)$

2 PUNTOS

Resolución:

El sistema es no homogéneo.

$$\begin{cases} x'' + y' & = & 5t \\ 2x' - x + y' & = & sen(t) \end{cases}$$

El sistema en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} D^2 & D \\ 2D-1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t \\ sen(t) \end{bmatrix}$$

Se puede resolver para $x(t)$, por eliminación sistemática o por determinantes:

$$\begin{vmatrix} D^2 & D \\ 2D-1 & D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 5t & D \\ sen(t) & D \end{vmatrix}$$

$$\left[D^3 - D(2D-1) \right] x = D(5t) - D(sen\,t)$$

$$\left(D^3 - 2D^2 + D \right) x = 5 - \cos\ t$$

$$D\left(D^2 - 2D + 1 \right) x = 5 - \cos t$$

$$D(D-1)^2\ x = 5 - \cos t$$

Es una ecuación diferencial lineal no homogénea, se puede resolver por coeficientes indeterminados o por variación de parámetros. Entonces su solución está dada por: $x_G = x_H + x_P$

Para x_H:

$$D(D-1)^2\ x = 0$$

El polinomio auxiliar:

$$m(m-1)^2 = 0\ ; \quad m_1 = 0\ , \quad m_2 = 1\ , \quad m_3 = 1$$

$$x_H = C_1 + C_2 e^t + C_3\, t\, e^t$$

Para x_P, tomando en cuenta $q = 5 - \cos t$ con $m_4 = 0$ y $m_5 = 0 \pm i$ se propone:

$P_1(D) = D\left(D^2 + 1\right)$

$x_P = At + B\,sen\,t + C\cos t$

La solución particular propuesta debe satisfacer a la ecuación diferencial, entonces:

$x'_p = A + B\cos t - C\,\text{sen}\,t$

$x''_p = -Bsent - C\cos t$

$x'''_P = -B\cos t + Csent$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$x'''_p - 2x''_p + x'_p = 5 - \cos t$

$2Bsent + 2C\cos t + A = 5 - \cos t$

igualando:

$A = 5\;,\quad 2C = -1\;,\quad 2B = 0$

entonces: $A = 5\;,\quad C = -\dfrac{1}{2}\;,\quad B = 0$

La solución particular está dada por:

$x_P = 5t - \dfrac{1}{2}\cos\,t$

La solución general es:

$x_G = C_1 + C_2e^t + C_3te^t + 5t - \dfrac{1}{2}\cos t$

4. Calcular la función $f(t)$ si

$$F(s) = \frac{4}{s^2 - 16}\,e^{-2s}$$

2 PUNTOS

Resolución:

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s^2 - 16}e^{-2s}\right\}$

$f(t) = senh\left(4(t-2)\right)u(t-2)$

$f(t) = \dfrac{1}{2}\left[e^{4(t-2)} - e^{4(t-2)}\right]u(t-2)$

5. Resolver $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ para una constante de separación positiva.

2 PUNTOS

Resolución:

$$u=F(x)G(y)\ ;\quad \frac{\partial u}{\partial x}=F'(x)G(y)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=F(x)G'(y)$$

sustituyendo en la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$xF'(x)G(y)-F(x)G'(y)=0$$

$$xF'(x)G(y)=F(x)G'(y)$$

separando variables:

$$\frac{xF'(x)}{F(x)}=\frac{G'(y)}{G(y)}=\alpha^2$$

$$xF'(x)=\alpha^2F(x) \qquad\qquad G'(y)=\alpha^2G(y)$$

$$\frac{x}{F(x)}\frac{dF(x)}{dx}=\alpha^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{G(y)}\frac{dG(y)}{dy}=\alpha^2$$

son ecuaciones ordinarias de variables separables, entonces:

$$\frac{dF(x)}{F(x)}=\alpha^2\frac{dx}{x} \qquad \text{y} \qquad \frac{dG(y)}{G(y)}=\alpha^2dy$$

integrando ambos lados de las ecuaciones, se tiene:

$$\int\frac{dF(x)}{F(x)}=\alpha^2\int\frac{dx}{x} \qquad \text{y} \qquad \int\frac{dG(y)}{G(y)}=\alpha^2\int dy$$

$$\ln\big(F(x)\big)=\alpha^2\ln(x)+C_1 \qquad \text{y} \qquad \ln\big(G(y)\big)=\alpha^2\,y+C_2$$

aplicando exponencial natural en ambas ecuaciones;

$$F(x)=Ax^{\alpha^2} \qquad \text{y} \qquad G(y)=Be^{\alpha^2 y}$$

sustituyendo en la solución propuesta como producto de dos funciones:

$$u(x,y)=F(x)G(y)=Ax^{\alpha^2}Be^{\alpha^2y}=Cx^{\alpha^2}e^{\alpha^2y}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

PRIMER EXAMEN FINAL

RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2015 -2 **TIPO 3**
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **29 DE MAYO DE 2015**

NOMBRE____
Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Grupo**

____
FIRMA

Instrucciones: Lee detenidamente los cinco enunciados, este examen es la demostración de tu aprendizaje a lo largo del semestre, trata de entender y resolver primero los que tienes seguridad en tu conocimiento.

1. Resolver $\left(x^2+4\right)\dfrac{dy}{dx}=2x-8xy$ sujeta a $y(0)=-1$

2 PUNTOS

Resolución:

$$\left(x^2+4\right)\frac{dy}{dx}=2x-8xy \quad ; \quad y(0)=-1$$

se escribe como:

$$\left(x^2+4\right)\frac{dy}{dx}+8xy=2x$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{8x}{x^2+4}y=\frac{2x}{x^2+4}$$

que es la forma normal de una ecuación diferencial lineal, primer orden, no homogénea; se puede resolver por factor integrante, entonces:

$$p(x)=\frac{8x}{x^2+4} \qquad \text{y} \qquad q(x)=\frac{2x}{x^2+4}$$

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{8xdx}{x^2+4}}=e^{4\ln\left(x^2+4\right)}=\left(x^2+4\right)^4$$

multiplicando toda la ecuación diferencial normal por el factor integrante, se tiene:

$$\left(x^2+4\right)^4\frac{dy}{dx}+\left(x^2+4\right)^4\frac{8x}{x^2+4}y=\left(x^2+4\right)^4\frac{2x}{x^2+4}$$

del resultado anterior se observa:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2+4\right)^4 y\right]=\left(x^2+4\right)^3 2x$$

igual a:

$$d\left(x^2+4\right)^4 y=2x\left(x^2+4\right)^3 dx$$

integrando:

$$\left(x^2+4\right)^4 y=\int 2x\left(x^2+4\right)^3 dx=2\int x\left(x^6+12x^4+48x^2+64\right)dx$$

$$\left(x^2+4\right)^4 y=2\left[\frac{x^8}{8}+\frac{12}{6}x^6+\frac{48}{4}x^4+\frac{64}{2}x^2\right]$$

$$\left(x^2+4\right)^4 y=\frac{1}{4}x^8+4x^6+24x^4+64x+C$$

entonces:

$$y=\frac{1}{\left(x^2+4\right)^4}\left[\frac{1}{4}x^8+4x^6+24x^4+64x\right]+\frac{C}{\left(x^2+4\right)^4}$$

Para las condiciones de valor inicial, se tiene:

$$-1=\frac{C}{4^4}\Rightarrow C=-256$$

La solución particular es:

$$y=\frac{x}{\left(x^2+4\right)^4}\left[\frac{1}{4}x^7+4x^5+24x^3+64x\right]-\frac{256}{\left(x^2+4\right)^4}$$

$$y=\frac{1}{\left(x^2+4\right)^4}\left[\frac{1}{4}x^8+4x^6+24x^4+64x-256\right]$$

2. Resolver la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones de valor inicial que se indican.

$$y'''-2y''+y'=xe^x+5 \;\; ; \quad y(0)=y'(0)=2 \;\; , \;\; y''(0)=-1$$

2 PUNTOS

Resolución:

La solución general está dada por:

$$y_G=y_H+y_P$$

Para y_H:

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

$$\left(D^3 - 2D^2 + D\right) y = 0$$

$$D\left(D^2 - 2D + 1\right) y = 0$$

$$D\left(D-1\right)^2 y = 0$$

El polinomio auxiliar es:

$$m\left(m-1\right)^2 = 0 \quad , \quad m_1 = 0 \quad , \quad m_2 = m_3 = 1$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x$$

Para y_P por coeficientes indeterminados, se tiene:

$$P_1\left(D\right) = D\left(D-1\right)^2$$

$$D\left(D-1\right)^2 \left[x e^x + 5 \right] = 0$$

$$D\left(D-1\right)^2 D\left(D-1\right)^2 y = 0$$

$$y_{NH} = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + Bx^2 e^x + Cx^3 e^x + Ax$$

La solución particular propuesta es:

$$y_P = Ax + Bx^2 e^x + Cx^3 e^x$$

La solución debe satisfacer a la ecuación diferencial, por lo que:

$$y_P''' - 2y_P'' + y_P' = x e^x + 5$$

$$y_P' = A + 2Bxe^x + Bx^2 e^x + 3Cxe^x + Cx^3 e^x$$

$$y_P'' = 2Be^x + 4Bxe^x + Bx^2 e^2 + 6Cxe^x + 6Cx^2 e^x + Cx^3 e^x$$

$$y_P''' = 6Be^x + 6Bxe^x + Bx^2 e^x + 6Ce^x + 18Cxe^x + 9Cx^2 e^x + Cx^3 e^x$$

sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\left(2B + 6C\right) e^x + 6Cxe^x + A = xe^x + 5$$

Igualando:

$$A = 5 \quad , \quad C = \frac{1}{6} \quad , \quad B = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto la solución particular es:

$$y_P = 5x - \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

La solución general está dada por:

$$y_G = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x + 5x - \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

Para la solución particular:

$$y_G(0) = 2 = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x + 5x - \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

$$y_G = 2 = C_1 + C_2$$

$$y'_G(0) = 2 = C_2e^x + C_3e^x + C_3xe^x + 5 - xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

$$y'_G = 2 = C_2 + C_3 + 5$$

$$y''_G(0) = -1 = \frac{1}{6}e^x\left(6C_2 + 12C_3 + 6C_3x - 6 - 6x + 3x^2 + x^3\right)$$

$$y''_G = -1 = C_2 + 2C_3 - 1$$

resolviendo el sistema:

$$2 = C_1 + C_2$$

$$2 = C_2 + C_3 + 5$$

$$0 = C_2 + 2C_3$$

$$C_1 = 8 \;\;,\;\; C_2 = -6 \;\;,\;\; C_3 = 3$$

La solución particular para las condiciones de valor inicial, es:

$$y_P = 8 - 6x + 3xe^x - \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

3. Convertir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales a una ecuación diferencial en términos de la variable $y_1(t)$

$$y'_1 = y_1 + 2y_2 + 5\cos(t)$$
$$y'_2 = 3y_1 + 2y_2 + 5$$

2 PUNTOS

Resolución:

Se tiene

$$(D-1)y_1 - 2y_2 = 5\cos(t)$$

$$-3y_1 + (D-2)y_2 = 5$$

se simplifica $y_2(t)$

$$(D-2)\left[(D-1)y_1 - 2y_2\right] = (D-2)\left(5\cos(t)\right)$$

$$2\left(-3y_1 + (D-2)y_2\right) = 10$$

sumando las ecuaciones: $y''_1 - 3y'_1 - 4y_1 = 10 - 5sent - 10\cos t$

4. Usar el Teorema de Convolución para obtener la transformada inversa de la siguiente función

$$F(s)=\frac{1}{s^4\left(s^2+1\right)}$$

2 PUNTOS

Resolución:

Se tiene: $F(s)=\dfrac{1}{s^4\left(s^2+1\right)}$

Igual a: $F(s)=\dfrac{1}{s^4\left(s^2+1\right)}=\dfrac{1}{6}\dfrac{6}{s^4}\bullet\dfrac{1}{s^2+1}=H(s)G(s)=\mathcal{L}\left\{h(t)*g(t)\right\}$

Usando convolución en el producto:

$$h(t)*g(t)=\int_0^t h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau=\int_0^t \frac{1}{6}(\tau)^3 sen(t-\tau)\;d\tau$$

integrando por partes:

$$h(t)*g(t)=\frac{1}{6}\left[\tau^3\cos(t-\tau)+3\tau^2\operatorname{sen}(t-\tau)-6\tau\cos(t-\tau)-6sen(t-\tau)\right]\Big|_0^t$$

$$h(t)*g(t)=\frac{1}{6}t^3-t+sen(t)$$

5. Obtener una función $F(x)$ y una función $G(y)$ tal que $u(x,y)=F(x)G(y)$ sea una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u=0$$

2 PUNTOS

Resolución:

Se tiene $U=X(x)\,Y(y)$ para simplificar $U=X\,Y$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=X'Y \qquad\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=X''Y$$

sustituyendo:

$$X''Y-X\,Y=0=\left(X''-X\right)Y=0$$

multiplicando por $\dfrac{1}{Y}$; $Y\neq 0$

$$X''-X=0$$

$$\left(D^2-1\right)X=0 \qquad ; \qquad P(m)=m^2-1=(m-1)(m+1)$$

$$X_H=C_1e^{-x}+C_2e^{x} \qquad\qquad Y=y$$

sustituyendo: $U=XY=\left(C_1e^{-x}+C_2e^{x}\right)y \qquad\qquad U=C_1\,y\,e^{-x}+C_2\;e^{x}y$