UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2016 -1 **TIPO 1**

DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **5 DE DICIEMBRE DE 2015**

NOMBRE____

Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Grupo**

____

FIRMA

Instrucciones: Lee detenidamente los cinco enunciados, este examen es la demostración de tu aprendizaje a lo largo del semestre, trata de entender y resolver primero los que tienes seguridad en tu conocimiento.

1. Un investigador de crímenes encuentra un cadáver al entrar a un edificio de la Ciudad de México. Al instante mide la temperatura del cadáver siendo de 30 °C. Dos horas más tarde al llegar el médico forense toma nuevamente la temperatura del cadáver la cual ha disminuido a 24 °C.
La temperatura ambiente durante este tiempo permanece constante a 5 °C. Si se sabe que la temperatura del cadáver cambia a una velocidad proporcional a la diferencia de temperaturas del cadáver y del ambiente, esto es:

$$\frac{dT_C}{dt} = k\left(T_C - T_{amb}\right) \qquad ; \qquad T_C \text{ representa la temperatura del cadáver}$$

Determinar:

a) La solución de la ecuación diferencial.

b) Una expresión que determine la hora en que murió la persona si fue encontrada a las 0:00 horas.

Nota: La temperatura del cuerpo humano vivo es de 37 °C.

Resolución:

Del enunciado $\frac{dT_c}{dt} = k\left(T_c - T_{amb}\right)$

se sabe que $T_{amb} = 5°C$

$$\frac{dT_c}{dt} = k\left(T_c - 5\right)$$

La solución de la Ecuación Diferencial es:

$$dT_c = k\left(T_c - 5\right)dt$$

$$\frac{dT_c}{T_c - 5} = k\,dt$$

Integrando:

$$\int \frac{dT_c}{T_c-5} = k\int dt$$

$\ln\left(T_c-5\right) = kt + C$ solución general implícita

Aplicando exponencial natural:

$T_c - 5 = Ce^{kt}$

$T_c = Ce^{kt} + 5$ solución explícita

Del enunciado: $t=0$, $T_c = 30\,°C$ y $t = 2h$, $T_c = 24\,°C$

$30 - 5 = Ce^{0} \quad \Rightarrow \quad C = 25$

$Tc = 25e^{kt} + 5$ solución particular

2. Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = \tan x$ sujeta a $y\left(0\right) = 0$; $y'\left(0\right) = 0$

Resolución:

$y'' + y = \tan x$; $y\left(0\right) = 0$, $y'\left(0\right) = 0$

La solución general está dada por:

$y_G = y_H + y_P$

La ecuación diferencial se debe resolver por variación de parámetros por ser $q\left(x\right) = \tan x$

Primero la solución homogénea asociada es y_H :

$y'' + y = \left(D^2 + 1\right)y = 0$

El polinomio auxiliar es:

$m^2 + 1 = 0$

$m^2 = -1$

$m_{1,2} = \pm i$ con $a = 0$ y $b = 1$

por lo que:

$y_H = C_1 sen\, x + C_2 \cos x$

Segundo, la solución particular y_P :

Se propone $y_P = u\left(x\right) sen\, x + v\left(x\right)\cos x$

donde $y_P = u\, sen\, x + v \cos x$; $u = u\left(x\right)$ y $v = v\left(x\right)$

Entonces con los vectores base:

$$\begin{bmatrix} sen\, x & \cos x \\ \cos x & -sen\, x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tan x \end{bmatrix}$$

Premultiplicando por la matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \frac{1}{-sen^2 x - \cos^2 x} \begin{bmatrix} -sen\, x & -\cos x \\ -\cos x & sen\, x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tan x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen\, x & \cos x \\ \cos x & -sen\, x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \tan x \\ -sen\, x \tan x \end{bmatrix}$$

Igualando: $u' = \cos x \tan x$ y $v' = -sen\, x \tan x$

Integrando: $u = \int sen\, x\, dx$ y $v = -\int \frac{sen^2 x}{\cos x} dx$

$$u = -\cos x$$

$$v = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\, dx = -\int (\sec x - \cos x)\, dx$$

$$v = -\ln(\sec x + \tan x) + sen\, x$$

sustituyendo en la solución particular propuesta:

$$y_P = -\cos x\ sen\, x - \cos x \ln(\sec x + \tan x) + sen\, x\ \cos x$$

La solución general está dada por:

$$y_G = C_1\, sen\, x + C_2 \cos x + sen\, x \cos x - \cos x \left[sen\, x + \ln(\sec x + \tan x) \right]$$

$$y_G = C_1\, sen\, x + C_2 \cos x + sen\, x \cos x - sen\, x \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

$$y_G = C_1\, sen\, x + C_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

Sustituyendo las condiciones de valor inicial:

$$C_2 = 0$$

$$y'_G = C_1 \cos x - C_2 sen\, x + sen\, x \ln(\sec x + \tan x) - \cos x \left[\frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \right]$$

$$C_1 = 1$$

Por lo tanto, con $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ se tiene:

$$\boxed{y_P = sen\, x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)}$$

3. Determinar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} x' &= -y - \cos t \\ y' &= x + sen\, t \end{aligned}$$

Resolución:

El sistema es:

$$\begin{aligned} x' &= -y - \cos t \\ y' &= x + sen\, t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x' + y &= -\cos t \\ -x + y' &= sen\, t \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -sen\, t \end{bmatrix}$$

Al usar determinantes:

$$\begin{vmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -\cos t & 1 \\ sen\,t & D \end{vmatrix} \Rightarrow \left(D^2+1\right)x = -D\cos t - sen\,t$$

entonces:

$$\left(D^2+1\right)x = sen\,t - sen\,t = 0$$

La ecuación diferencial es:

$$\left(D^2+1\right)x = 0$$

Es una ecuación diferencial lineal, ordinaria, homogénea, entonces:

$$x_G = x_H$$

Para x_H :

$$\left(D^2+1\right)x = 0 \;, \quad m^2+1=0 \;, \quad m^2=-1 \;, \quad m_{1,2}=\pm i$$

$$x_H = C_1\cos t + C_2\,sen\,t$$

$$y_H = -\cos t + C_1 sen\,t - C_2\cos t$$

$$y_H = C_1 sen\,t - \cos t\left[C_2+1\right]$$

4. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 3y = 5t\;u\left(t-2\right)$$

usar transformada de Laplace, sujeta a las condiciones de valor inicial $y\left(0\right)=1$, $y'\left(0\right)=-1$

Resolución:

$$y'' + 4y' + 3y = 5t\;u\left(t-2\right); \quad y\left(0\right)=1 \;, \quad y'\left(0\right)=-1$$

Se puede escribir como:

$$y'' + 4y' + 3y = 5\left(t-2+2\right)u\left(t-2\right)$$

$$y'' + 4y' + 3y = 5\left(t-2\right)u\left(t-2\right) + 10u\left(t-2\right)$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{y''\right\} + 4\mathcal{L}\left\{y'\right\} + 3\mathcal{L}\left\{y\right\} = 5\mathcal{L}\left\{\left(t-2\right)u\left(t-2\right)\right\} + 10\mathcal{L}\left\{u\left(t-2\right)\right\}$$

$$s^2\,Y\left(s\right) - s^1\left(1\right) - s^0\left(-1\right) + 4sY\left(s\right) - 4s^0\left(1\right) + 3Y\left(s\right) = 5\frac{e^{-2s}}{s^2} + 10\frac{e^{-2s}}{s}$$

$$Y\left(s\right)\left[s^2+4s+3\right] = 5\frac{e^{-2s}}{s^2} + 10\frac{e^{-2s}}{s} + s - 1 + 4$$

$$Y(s)\left[s^2+4s+3\right]=\frac{5e^{-2s}+10se^{-2s}+s^3+3s^2}{s^2}$$

$$Y(s)\left[(s+3)(s+1)\right]=\frac{5e^{-2s}+10se^{-2s}+s^3+3s^2}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{5e^{-2s}+10s^2e^{-2s}+s^3+3s^2}{s^2(s+3)(s+1)}=\frac{e^{-2s}\left(s+10s^2\right)}{s^2(s+3)(s+1)}+\frac{s^3+3s^2}{s^2(s+3)(s+1)}$$

$$Y(s)=\frac{5e^{-2s}(1+2s)}{s^2(s+3)(s+1)}+\frac{s^2(s+3)}{s^2(s+3)(s+1)}$$

$$Y(s)=5e^{-2s}\,\frac{(1+2s)}{s^2(s+3)(s+1)}+\frac{1}{s+1}$$

Por fracciones parciales:

$$\frac{1+2s}{s^2(s+3)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+3}+\frac{D}{s+1}$$

despejando y agrupando:

$$2s+1=(A+C+D)s^3+(4A+B+C+3D)s^2+(3A+4B)s+3B$$

El sistema es:

$$A+C+D=0$$
$$4A+B+C+3D=0$$
$$3A+4B=2$$
$$3B=1$$
$$A=\frac{2}{9},\quad B=\frac{1}{3},\quad C=\frac{5}{18},\quad D=-\frac{1}{2}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace:

$$y(t)=5u(t-2)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{9s}+\frac{1}{3s^2}+\frac{5}{18(s+3)}-\frac{1}{2(s+1)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$y(t)=5u(t-2)\left[\frac{2}{9}+\frac{(t-2)}{3}+\frac{5}{18}e^{-3(t-2)}-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}\right]+e^{-t}$$

$$y(t)=5u(t-2)\frac{4+6(t-2)+5e^{-3(t-2)}-9e^{-(t-1)}}{18}+e^{-t}$$

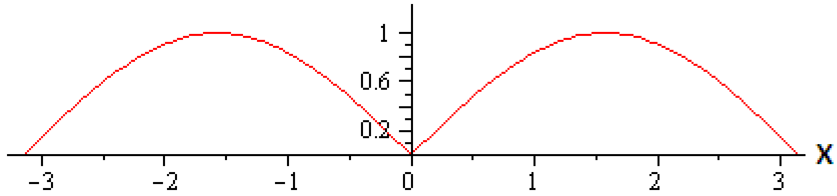
$$\boxed{y(t)=y(t)=\frac{5}{18}u(t-2)\left[4+6(t-2)+5e^{-3(t-2)}-9e^{-(t-1)}\right]+e^{-t}}$$

5. Desarrollar la función $f(x)=|sen\,x|\ ,\quad -\pi<x<\pi$

Resolución:

Se tiene $f(x)=|sen\,x|\ ,\ -\pi<x<\pi$, que es un seno rectificado.

Se sabe que es una función par, simétrica con respecto a y.



La serie en cosenos está dada por:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)x$$

se sabe que:

$$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

sustituyendo:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\,x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\,x\,dx\ =\frac{2}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left[-\cos\pi+\cos 0\right]=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\,x\cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)dx=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen\,x\cos(nx)\,dx$$

Al calcular la integral:

$$\int_0^{\pi} sen\,x\cos(nx)\,dx=\frac{1}{n}senxsen(nx)-\frac{1}{n}\int_0^{\pi} sen(nx)\cos x dx$$

$$u=senx$$

$$du=\cos xdx$$

$$dv=\cos(nx)\,dx$$

$$v=\frac{1}{n}sen(nx)$$

$$\int_0^{\pi} sen\,x\cos(nx)\,dx=\frac{1}{n}senxsen(nx)-\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos x\cos(nx)-\int_0^{\pi}-\frac{1}{n}\cos(nx)(-sen(x))\,dx\right]$$

$$u=\cos x$$

$$du=-senxdx$$

$$dv=sen(nx)\,dx$$

$$v=-\frac{1}{n}\cos(nx)$$

$$\int_0^{\pi} sen\,x\cos(nx)\,dx=\frac{1}{n}senxsen(nx)+\frac{1}{n^2}\cos x\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(nx)senxdx$$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\int_0^{\pi} sen\,x\cos(nx)\,dx=\frac{1}{n}senxsen(nx)+\frac{1}{n^2}\cos x\cos(nx)$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)\int_0^{\pi} sen\,x\cos(nx)\,dx=\frac{1}{n}senxsen(nx)+\frac{1}{n^2}\cos x\cos(nx)$$

$$\int_0^{\pi} sen\,x\cos(nx)\,dx=\frac{n}{n^2-1}senxsen(nx)+\frac{1}{n^2-1}\cos x\cos(nx)$$

Por regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi} sen\,x\cos(nx)\,dx=\left[\frac{nsenxsen(nx)+\cos x\cos(nx)}{n^2-1}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\left[\frac{\cos\pi\cos(n\pi)-1}{n^2-1}\right]$$

$$\int_0^{\pi} sen\,x\cos(nx)\,dx=\left[\frac{(-1)\cos(n\pi)-1}{n^2-1}\right]$$

sustituyendo:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n\pi)}{n^2-1}\right]\qquad,\qquad n=\ 2,\ 3,\ldots$$

sustituyendo en la serie:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\cos(n\pi)}{n^2-1}\cos(nx)$$

$$f(x)=|senx|=\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx)$$