UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
RESOLUCIONES

SEMESTRE 2016 -2 | **Tipo B**

30 de mayo de 2016

1. **Resolver la siguiente ecuación diferencial.**

$$y' = 4 - 9x^2 - 6x^5 \quad ; \quad y(1) = 2$$

Resolución:

Se procede a representar la ecuación diferencial de la siguiente manera para poder realizar la separación de variables

$$\frac{dy}{dx} = 4 - 9x^2 - 6x^5$$

Se procede a separar las variables

$$dy = \left(4 - 9x^2 - 6x^5\right)dx$$

Ya que están separadas las variables; integramos de ambos lados de la ecuación

$$\int dy = \int \left(4 - 9x^2 - 6x^5\right)dx$$

Lo que resulta en

$$y = 4x - \frac{9x^3}{3} - \frac{6x^6}{6} + C$$

Ahora debemos encontrar el valor de la constante; de las condiciones iniciales se tiene que:

$$2 = 4(1) - 3(1)^3 - (1)^6 + C$$

Despejando la constante C se tiene que $C = 2$

Por lo que la solución de la ecuación diferencial queda

$$\boxed{y = 4x - x^3 - x^6 + 2}$$

2. **Aplicar el método de coeficientes indeterminados para resolver la ecuación diferencial.**

$$y'' + y = \cos x$$

Resolución:

Para la Ecuación Diferencial homogénea asociada

$$\left(D^2 + 1\right)y = 0$$

Ecuación auxiliar:

$$m^2 + 1 = 0$$

$$m_{1,2} = \pm i$$

$$y_c = C_1 \cos x + C_2 \, sen\, x$$

Operador anulador de $F(x) = \cos x$ es $D^2 + 1$

Aplicando el operador anulador a la Ecuación Diferencial:

$$\left(D^2+1\right)^2 y=0$$

$$y_G=C_1\cos x+C_2 sen\,x+C_3 x\cos x+C_4 x\,sen\,x$$

Solución particular:

$$y_P=C_3 x\cos x+C_4 x\,sen\,x$$

$$y_P'=C_3\cos x-C_3 x\,sen\,x+C_4 sen\,x+C_4 x\cos x$$

$$y_P''=-2C_3 sen\,x+2C_4\cos x-C_3 x\cos x-C_4 x\,sen\,x$$

Sustituyendo la solución particular en la Ecuación Diferencial:

$$y_P''+y_P=\cos x$$

Se obtiene:

$$-2C_3 sen\,x+2C_4\cos x=\cos x$$

$$C_3=0,\quad C_4=\frac{1}{2}$$

$$y_P=\frac{1}{2}x\,sen\,x$$

$$\boxed{y=C_1\cos x+C_2 sen\,x+\frac{1}{2}x\,sen\,x}$$ Solución General

3. **Obtener la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.**

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Resolución:

$$x_1'-x_2=0\ \ldots\ (1)$$

$$x_2'-x_1=0\ \ldots\ (2)$$

$$Dx_1-x_2=0$$

$$-x_1+Dx_2=0$$

$$\begin{bmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta=D^2-1$$

Por lo que:

$$\left(D^2-1\right)x_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Es decir

$\left(D^2-1\right)x_1=0$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$m^2-1=0$

$m_1=1\ ;\ \ m_2=-1$

Entonces

$x_1=C_1e^t+C_2e^{-t}$

Sustituyendo x_1 en (1)

$x_2=x_1'\ \ derivando\ a\,x_1\ \ se\ tiene$

$x_2=C_1e^t-C_2e^{-t}$

Finalmente tenemos que la solución general es:

$x_1=C_1e^t+C_2e^{-t}$

$x_2=C_1e^t-C_2e^{-t}$

4. Resolver la ecuación integro-diferencial, donde u es una función escalón.

$$z'+z+\int_0^t z\left(\tau\right)\,d\tau=u\left(t\right)\quad ;\ z\left(0\right)=0$$

Resolución:

$$\frac{d}{dx}z\left(t\right)+z\left(t\right)+\int_0^t z\left(t\right)dt=u\left(t\right)$$

$$s\,z\left(s\right)-\cancel{z\left(0\right)}^{\,0}+z\left(s\right)+\frac{z\left(s\right)}{s}=\frac{1}{s}$$

$$s\,z\left(s\right)+z\left(s\right)+\frac{z\left(s\right)}{s}=\frac{1}{s}$$

$$\left(\frac{s^2+s+1}{s}\right)z\left(s\right)=\frac{1}{s}$$

$$z\left(s\right)=\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$z\left(s\right)=\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$z\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}e^{-\frac{1}{2}}\,sen\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\ t\right)$$

Finalmente tenemos

$$z(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}\,sen\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ t\right)$$

5. Resolver la siguiente ecuación diferencial, considere una constante de separación igual a uno.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2\,t\,x^2\,\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

Resolución:

$$u(x,t)=F(x)G(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=F'(x)G(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=F(x)G'(t)$$

Sustituyendo

$$F(x)G'(t)+2t\,x^2F'(x)G(t)=0$$

Separando variables

$$F(x)G'(t)=-2tx^2F'(x)G(t)$$

$$\frac{G'(t)}{2tG(t)}=\frac{-x^2F'(x)}{F(x)}=1$$

$$\frac{G'(t)}{2t\,G(t)}=1$$

$$\frac{dG(t)}{dt}\,\frac{1}{2t\,G(t)}=1$$

$$\frac{dG(t)}{G(t)}=2t\,dt$$

$$\ln G(t)=t^2+C_1$$

$$G(t)=e^{t^2+C_1}$$

$$-\frac{x^2F'(x)}{F(x)}=1$$

$$-\frac{dF(x)}{dx}\,\frac{x^2}{F(x)}=1$$

$$\frac{dF(x)}{F(x)}=-\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln F(x)=\frac{1}{x}+C_2$$

$$F(x)=e^{\frac{1}{x}+C_2}$$

$$\boxed{u(x,t)=C_3e^{t^2+\frac{1}{x}}}$$