UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2015 -2 **TIPO 1**

DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **5 DE JUNIO DE 2015**

NOMBRE____

Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Grupo**

____

FIRMA

Instrucciones: Lee detenidamente los seis enunciados, este examen es la demostración de tu aprendizaje a lo largo del semestre, trata de entender y resolver primero los que tienes seguridad en tu conocimiento.

1. Resolver la ecuación diferencial

$$\left(\frac{1-sen\left(x\right)}{y}\right)dy-\ln\left(y\right)dx=0$$

1.5 PUNTOS

Resolución:

Se observa que es una ecuación diferencial ordinaria, de variables separables:

$$\left(\frac{1-sen\left(x\right)}{y}\right)dy-\ln\left(y\right)dx=0$$

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{1-sen\,x}$$

Integrando en ambos lados:

$$\int\frac{1}{yw}y\,dw=\int\frac{1+sen\,x}{(1-sen\,x)(1+sen\,x)}dx$$

$$\int\frac{dw}{w}=\int\frac{1+sen\,x}{1-sen^2x}dx=\int\frac{1+sen\,x}{\cos^2x}dx$$

$$\ln w+C_1=\int\sec^2x\,dx+\int\tan x\cdot\sec x\,dx$$

$$\ln\left(\ln y\right)+C_1=\tan x+\sec x+C_2$$

$$\ln\left(\ln y\right)=\tan x+\sec x+C$$

aplicando exponencial natural y por leyes de exponentes:

$$\ln y = e^{\tan x + \sec x + C}$$

$$y = Ce^{e^{\tan x + \sec x}}$$

2. Obtener la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' - 2y'' - 5y' = 10x - 1$$

2.0 PUNTOS

Resolución:

$$y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' - 2y'' - 5y' = 10x - 1$$

$$\left(D^5 + 2D^4 + 4D^3 - 2D^2 - 5D\right) y = 10x - 1$$

$$D\left(D^4 + 2D^3 + 4D^2 - 2D - 5\right) y = 10x - 1$$

se observan tres raíces para el polinomio auxiliar, cero y $m = \pm 1$; luego, realizando división sintética o por factores cuadráticos, la ecuación equivale a:

$$D(D-1)(D+1)\left(D^2 + 2D + 5\right) y = 10x - 1$$

el polinomio auxiliar es:

$$P(m) = m(m-1)(m+1)\left(m^2 + 2m + 5\right) = 0$$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = -1, \quad m_4 = -1 - 2i, \quad m_5 = -1 + 2i$$

la solución homogénea asociada es:

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + e^{-x}\left[C_4 sen(2x) + C_5 \cos(2x)\right]$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x} sen(2x) + C_5 e^{-x} \cos(2x)$$

Para la solución particular, por el método de coeficientes indeterminados, se tiene:

$$P_1(D) = D^2$$

aplicando a la ecuación diferencial:

$$D^2 D(D-1)(D+1)\left(D^2 + 2D + 5\right) y = D^2 (10x - 1) = 0$$

entonces:

$$y_{NH} = Ax + Bx^2 + C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x} sen(2x) + C_5 e^{-x} \cos(2x)$$

comparando y_H y y_{NH}, se tiene la propuesta para la solución particular:

$$y_p = Ax + Bx^2$$

La solución propuesta debe satisfacer a la ecuación diferencial, es decir:

$y_p{}^{V} + 2y_p^{IV} + 4y_p''' - 2y_p'' - 5y_p' = 10x - 1$

$y_P' = A + 2Bx$

$y_P'' = 2B \quad , \quad y_p''' = 0 \quad , \quad y^{IV}{}_p = 0 \quad , \quad y^{V}{}_p = 0$

sustituyendo en la ecuación diferencial:

$-4B - 5A - 10Bx = 10x - 1$

igualando:

$-10B = 10 \quad , \quad -5A - 4B = -1$

$B = -1 \quad , \quad A = 1$

sustituyendo los valores:

$y_P = x - x^2$

la solución general está dada por:

$y_G = y_H + y_P$

$y_G = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{-x} sen(2x) + C_5 e^{-x}\cos(2x) + x - x^2$

3. Determinar el sistema equivalente de primer orden, en forma matricial, de la ecuación diferencial $y''' - 4y = 2\,sen\,t$

1.5 PUNTOS

Resolución:

Para el sistema, se sabe que:

$y''' = 4y + 2\,sen\,t$

$y = u_1$

$y' = u_1' = u_2$

$y'' = u_2' = u_3$

$y''' = u_3'$

sustituyendo:

$u_1' = u_2$

$u_2' = u_3$

$u_3' = 4u_1 + 2\,sen\,t$

en forma matricial, se escribe como:

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\,sen\,t \end{bmatrix}$$ sistema equivalente de primer orden.

4. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = \delta(t-1) \quad ; \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

1.5 PUNTOS

Resolución:

$y'' - 4y' + 3y = \delta(t-1) \quad ; \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

aplicando transformada de Laplace:

$\mathcal{L}\{y'' - 4y' + 3y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$

por linealidad:

$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$

$s^2 Y(s) - 4s\,Y(s) + 3Y(s) = e^{-s}$

$Y(s)\left[s^2 - 4s + 3\right] = e^{-s} \Rightarrow Y(s) = \dfrac{e^{-s}}{s^2 - 4s + 3} = \dfrac{e^{-s}}{(s-3)(s-1)}$

por descomposición en fracciones racionales:

$\dfrac{1}{(s-3)(s-1)} = \dfrac{A}{s-3} + \dfrac{B}{s-1} \quad ; \quad \begin{matrix} 1 = A(s-1) + B(s-3) = As - A + Bs - 3B \\ 1 = (A+B)s + (-A-3B) \end{matrix}$

igualando: $1 = -A - 3B \ ; \ 0 = A + B$

sumando las dos ecuaciones: $A = \dfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad B = -\dfrac{1}{2}$

aplicando la transformada inversa de Laplace:

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-s}\left[\dfrac{\frac{1}{2}}{s-3} - \dfrac{\frac{1}{2}}{s-1} \right] \right\} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{e^{-s}}{s-3} \right\} - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{e^{-s}}{s-1} \right\}$

$y(t) = \dfrac{1}{2}u(t-1)e^{3(t-1)} - \dfrac{1}{2}u(t-1)e^{t-1}$

5. Obtener $\mathcal{L}^{-1}\left\{ \dfrac{s^2}{\left(s^2+9\right)^2} \right\}$

1.5 PUNTOS

Resolución:

Se pide calcular la transformada inversa, se puede obtener por convolución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{\left(s^2+9\right)^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\cdot\frac{s}{s^2+9}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)H(s)\right\}$$

se sabe que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)H(s)\right\}=\cos(3t)*\cos(3t)=\int_0^t\cos\left(3(t-\tau)\right)\cos 3\tau\, d\tau$$

$$\int_0^t\cos\left(3(t-\tau)\right)\cos 3\tau\, d\tau=\int_0^t\left(\cos(3\,\mathrm{t})\cos(3\tau)+sen(3t)\,sen(3\tau)\right)\cos 3\tau\, d\tau$$

$$\int_0^t\cos\left(3(t-\tau)\right)\cos 3\tau\, d\tau=\cos(3\,\mathrm{t})\int_0^t\cos^2(3\tau)\,d\tau+sen(3t)\int_0^t sen(3\tau)\cos(3\tau)\,d\tau$$

La primera integral se resuelve por identidad o por partes, y la segunda por sustitución de u:

$$\int_0^t\cos^2(3\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left[1-\cos(6\tau)\right]d\tau=\frac{1}{2}\left[\tau\right]_0^t+\frac{1}{12}\left(sen(6\tau)\right)_0^t=\frac{1}{2}t+\frac{1}{12}sen(6t)$$

$$\int_0^t sen(3\tau)\cos(3\tau)\,d\tau=\frac{1}{3}\int_0^t u\,du=\frac{1}{6}\left[sen^2(3\tau)\right]_0^t=\frac{1}{6}sen^2(3t)$$

sustituyendo:

$$\int_0^t\cos\left(3(t-\tau)\right)\cos 3\tau\, d\tau=\cos(3\,\mathrm{t})\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{12}sen(6t)\right]+sen(3t)\left[\frac{1}{6}sen^2(3t)\right]$$

desarrollando y sumando:

$$\int_0^t\cos\left(3(t-\tau)\right)\cos 3\tau\, d\tau=\frac{2}{3}sent\cos^2 t-\frac{1}{6}sent+2t\cos^3 t-\frac{3}{2}t\cos t$$

También:

$$\int_0^t\cos\left(3(t-\tau)\right)\cos 3\tau\, d\tau=\frac{1}{6}sen(3t)+\frac{1}{2}t\cos(3t)$$

Otra forma de resolver, haciendo descomposición en fracciones simples:

$$\frac{s^2}{\left(s^2+9\right)^2}=\frac{As+B}{s^2+9}+\frac{Cs+D}{\left(s^2+9\right)^2}$$

$$s^2=(As+B)\left(s^2+9\right)+Cs+D$$

$$s^2=As^3+9As+Bs^2+9B+Cs+D$$

$$s^2=As^3+Bs^2+(9A+C)s+9B+D$$

igualando:

$A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=-9$

$$\frac{s^2}{\left(s^2+9\right)^2}=\frac{1}{s^2+9}-\frac{9}{\left(s^2+9\right)^2}$$

entonces, sustituyendo y por linealidad, además completando la forma, se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{\left(s^2+9\right)^2}\right\}=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}-\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(3)(9)}{\left(s^2+9\right)^2}\right\} \qquad ; \qquad \mathcal{L}\left\{sen\,k\,t-k\,t\cos k\,t\right\}=\frac{2k^3}{\left(s^2+k^2\right)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{\left(s^2+9\right)^2}\right\}=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}-\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(3)(9)}{\left(s^2+9\right)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{\left(s^2+9\right)^2}\right\}=\frac{1}{3}sen(3t)-\frac{1}{6}\left(sen(3t)-3t\cos(3t)\right)=\frac{1}{6}sen(3t)+\frac{1}{2}t\cos(3t)$$

6. Obtener una solución completa de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$t^2\frac{\partial u}{\partial x}-x^2\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

para una constante de separación $\alpha=1$

2.0 PUNTOS

Resolución:

se tiene

$t^2\frac{\partial u}{\partial x}-x^2\frac{\partial u}{\partial t}=0$ con $\alpha=1$

se propone: $u=F(x)G(t)$

entonces:

$\frac{\partial u}{\partial x}=F'(x)G(t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=F(x)G'(t)$

sustituyendo en la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$t^2F'(x)G(t)-x^2F(x)G'(t)=0$

separando variables:

$$\frac{F'(x)}{x^2F(x)}=\frac{G'(t)}{t^2G(t)}$$

$$\frac{1}{x^2F(x)}\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{t^2G(t)}\frac{dG(t)}{dt}=\alpha^2=1$$

entonces:

$$\frac{dF(x)}{F(x)}=x^2dx \qquad , \qquad \frac{dG(t)}{G(t)}=t^2dt$$

Integrando, además, se observa que son funciones simétricas (lo que se le hace a una, se reproduce en la otra), por simetría:

$$\int \frac{dF(x)}{F(x)} = \int x^2\, dx \qquad \int \frac{dG(t)}{G(t)} = \int t^2\, dt$$

$$\ln F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C_1 \quad ; \quad \ln G(t) = \frac{1}{3}t^3 + C_2$$

aplicando exponencial natural:

$$e^{\ln(F(x))} = e^{\frac{1}{3}x^3 + C_1} \quad ; \quad e^{\ln(G(t))} = e^{\frac{1}{3}t^3 + C_2}$$

$$F(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} e^{C_1} \quad ; \quad G(t) = e^{\frac{1}{3}t^3} e^{C_2}$$

$$F(x) = C_1 e^{\frac{1}{3}x^3} \quad ; \quad G(t) = C_2 e^{\frac{1}{3}t^3}$$

por lo que:

$$u(x,t) = C_1 e^{\frac{1}{3}x^3}\, C_2 e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$u(x,t) = A e^{\frac{1}{3}\left(x^3 + t^3\right)}$$