UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS APLICADAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2016 -2 **6 DE JUNIO DE 2016**

1. Obtener una función $M(x,y)$ de modo que la ecuación diferencial sea exacta.

$$M(x,y)\,dx+\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)dy=0$$

Resolución

Para que (1) sea exacta es necesario que:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\text{................}(2)$$

$$M(x,y)\,dx+\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)dy\text{..................}(1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)=xye^{xy}+e^{xy}+2y-\frac{1}{x^2}\text{.....}(3)$$

Integrando (2) *con respecto a* y *:*

$$M(x,y)=\int\frac{\partial N}{\partial x}dy\text{...........}(4)$$

Sustituyendo (3) *en* (4) *se obtiene :*

$$M(x,y)=x\underbrace{\int ye^{xy}dy}_{I_1}+\frac{e^{xy}}{x}+y^2-\frac{y}{x^2}+h(x)\text{..........}(5)$$

La int egral I_1 *sepuede resolver por partes :*

$$u=y\quad ;\quad du=dy$$

$$dv=e^{xy}dy\quad ;\quad v=\frac{e^{xy}}{x}$$

Así

$$I_1=\int ye^{xy}dy=y\frac{e^{xy}}{x}-\int\frac{e^{xy}}{x}dy$$

$$=y\frac{e^{xy}}{x}-\frac{1}{x}\left(\frac{e^{xy}}{x}\right)\text{.............}(6)$$

Sustituyendo (6) *en* (5) *y simplificando :*

$$M(x,y)=x\left[y\frac{e^{xy}}{x}-\frac{1}{x}\left(\frac{e^{xy}}{x}\right)\right]+\frac{e^{xy}}{x}+y^2-\frac{y}{x^2}+h(x)$$

$$\boxed{M(x,y)=ye^{xy}+y^2-\frac{y}{x^2}+h(x)}$$

2. Resolver la ecuación diferencial

$$y' - 7y = sen\ 2x$$

Resolución

$$\mu(x) = e^{-\int 7dx} = e^{-7x}$$

$$d\left(e^{-7x}\right) = e^{-7x} sen(2x) \Rightarrow e^{-7x} y = \underbrace{\int e^{-7x} sen(2x)\, dx}_{\substack{u=sen(2x) \quad dv=e^{-7x}dx \\ du=2cos(2x)dx \quad v=-\frac{1}{7}e^{-7x}}}$$

$$\int e^{-7x} sen(2x)\, dx = -\frac{1}{7} e^{-7x} sen(2x) + \frac{2}{7} \underbrace{\int e^{-7x} cos(2x)\, dx}_{\substack{u=cos(2x) \quad dv=e^{-7x}dx \\ du=-2sen(2x)dx \quad v=-\frac{1}{7}e^{-7x}}} + C$$

$$\int e^{-7x} sen(2x)\, dx = -\frac{1}{7} e^{-7x} sen(2x) + \frac{2}{7}\left[-\frac{1}{7} e^{-7x} cos(2x) - \frac{2}{7}\int e^{-7x} sen(2x)\, dx\right] + C$$

$$\int e^{-7x} sen(2x)\, dx = -\frac{1}{7} e^{-7x} sen(2x) - \frac{2}{49} e^{-7x} cos(2x) - \frac{4}{49}\int e^{-7x} sen(2x)\, dx + C$$

$$\int e^{-7x} sen(2x)\, dx + \frac{4}{49}\int e^{-7x} sen(2x)\, dx = -\frac{1}{7} e^{-7x} sen(2x) - \frac{2}{49} e^{-7x} cos(2x) + C$$

$$\frac{53}{49}\int e^{-7x} sen(2x)\, dx = -\frac{1}{7} e^{-7x} sen(2x) - \frac{2}{49} e^{-7x} cos(2x) + C$$

$$\int e^{-7x} sen(2x)\, dx = -\frac{7}{53} e^{-7x} sen(2x) - \frac{2}{53} e^{-7x} cos(2x) + C$$

$$e^{-7x} y = -\frac{7}{53} e^{-7x} sen(2x) - \frac{2}{53} e^{-7x} cos(2x) + C$$

$$\boxed{y = -\frac{7}{53} sen(2x) - \frac{2}{53} cos(2x) + Ce^{7x}}$$

3. Utilizar el método de variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial

$$y''' + y' = \sec x$$

Resolución

$\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = \pm i$

$y_H = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$

$y_p = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\operatorname{sen} x$

$C.F: \{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$

$$w(1,\cos x,\operatorname{sen} x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ \sec x & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{1} = \sec x$$

$C_1(x) = \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + A_1$

$$C'(x)_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen} x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \sec x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{1} = -\cos x \sec x = -1$$

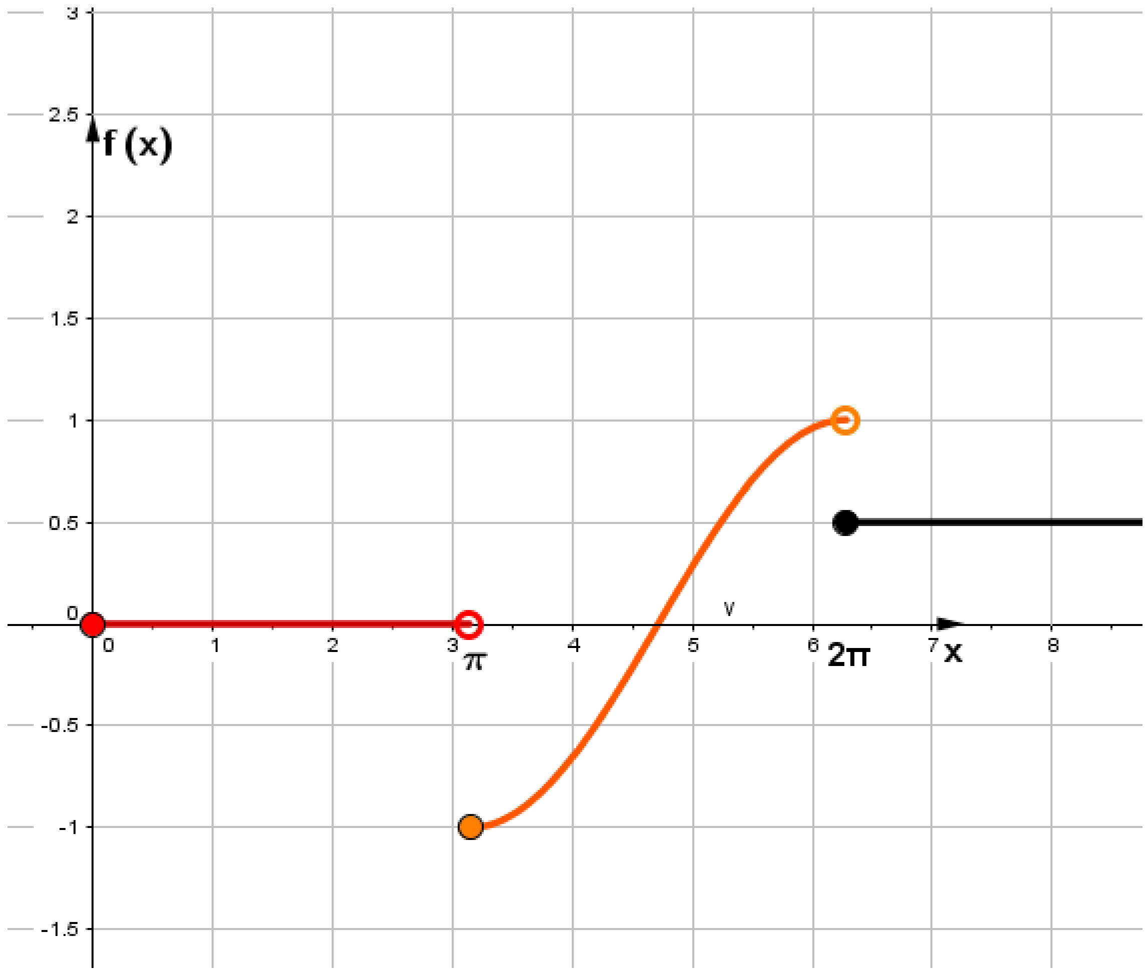
$C_2(x) = -\int dx = -x + A_2$

$$C_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & -\cos x & \sec x \end{vmatrix}}{1} = -\operatorname{sen} x \sec x = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x$$

$C_3(x) = -\int \tan x \, dx = \ln|\cos x| + A_3$

$$\boxed{y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \operatorname{sen} x \ln|\cos x|}$$

4. La gráfica de la función $f\left(x\right)$ está representada por:



calcular $\mathcal{L}\left\{f\left(x\right)\right\}$

Resolución

La función $f\left(x\right)$ también se puede expresar como:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 0 & ; \quad 0\le x<\pi \\ \cos\ x & ; \quad \pi\le x<2\pi \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x\ge 2\pi \end{cases} \quad ...\left(1\right)$$

La ecuación $\left(1\right)$ también se puede expresar en términos de funciones escalón unitario:

$$f\left(x\right)=u\left(x-\pi\right)\cos x-u\left(x-2\pi\right)\cos x+\frac{1}{2}u\left(x-2\pi\right)...\left(2\right)$$

Ahora, se aplica la transformada de Laplace a $\left(2\right)$:

$$\mathcal{L}\left\{f\left(x\right)\right\}=F\left(s\right)=\underbrace{\mathcal{L}\left\{u\left(x-\pi\right)\cos x\right\}}_{1er\ término}-\underbrace{\mathcal{L}\left\{u\left(x-2\pi\right)\cos x\right\}}_{2o\ término}+\underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{u\left(x-2\pi\right)\right\}}_{3er\ término}\ ...\left(3\right)$$

El primer término del miembro derecho en (3) :

Forma alternativa de 2do teorema de traslación

$$\mathcal{L}\{g(x)u(x-a)\}=e^{-as}\mathcal{L}\{g(x+a)\}$$

Con la identificación

$$a=\pi \;;\; g(x+a)=g(x+\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos x$$

Se obtiene:

$$\mathcal{L}\{u(x-\pi)\cos x\}=e^{-\pi s}\mathcal{L}\{-\cos x\}=\frac{-se^{-\pi s}}{s^2+1} \quad ...(4)$$

El segundo término:

Como $\cos x=\cos(x-2\pi)$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{\cos x\, u(x-2\pi)\}=\mathcal{L}\{\cos(x-2\pi)\, u(x-2\pi)\}$$

Usando el segundo teorema de traslación

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\, u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$

Identificando

$a=2\pi$ y $f(x)=\cos x$

$$\mathcal{L}\{\cos(x-2\pi)\, u(x-2\pi)\}=\frac{se^{-2\pi s}}{s^2+1} \quad ...(5)$$

El tercer término:

De igual forma se usa el segundo teorema de traslación con:

$a=2\pi$ y $f(x)=1$

$$\mathcal{L}\{u(x-2\pi)\}=\frac{e^{-2\pi s}}{s} \quad ...(6)$$

Sustituyendo (4) , (5) y (6) en (3) se obtiene finalmente:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)=-\frac{se^{-\pi s}}{s^2+1}-\frac{se^{-2\pi s}}{s^2+1}+\frac{1}{2}\frac{e^{-2\pi s}}{s}}$$

5. Utilizar la transformada de Laplace para resolver el siguiente problema de valor inicial

$$y''+5y'-3y=u(t-4)\ ;\ y(0)=0\ ;\ y'(0)=0$$

Resolución

$$S^2Y(s)+5SY(s)-3Y(s)=\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$Y(s)\left[S^2+5S-3\right]=\frac{e^{-4s}}{s}$$

$$Y(s)=\frac{e^{-4s}}{s\left[S^2+5S-3\right]}=e^{-4s}\,\frac{1}{s\left[S^2+5S-3\right]}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-4s}\,\frac{1}{s\left[S^2+5S-3\right]}\right\}=f(t-4)u(t-4)$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S\left[S^2+5S-3\right]}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{S}+\frac{CS+D}{S^2+5S-3}\right\}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A\left(S^2+5S-3\right)+CS^2+DS}{S\left(S^2+5S-3\right)}\right\}$$

$$A\left(S^2+5S-3\right)+CS^2+DS=1$$

$$AS^2+5AS-3A+CS^2+DS=1$$

$$(A+C)S^2+(5A+D)S-3A=1$$

$$-3A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{3}$$

$$5A+D=0\Rightarrow D=-5A=\frac{5}{3}$$

$$A+C=0\Rightarrow C=-A=\frac{1}{3}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{S}+\frac{\frac{1}{3}S+\frac{5}{3}}{S^2+5S-3}\right\}$$

$$f(t)=-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S+5}{S^2+5S-3}\right\}$$

$$f(t)=-\frac{1}{3}(1)+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S+5}{\left(S+\frac{5}{2}\right)^2-3-\frac{25}{4}}\right\}$$

$$f(t)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S+5}{\left(S+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{37}{4}}\right\}$$

$$f(t)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S+5+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}{\left(S+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$f(t)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S+\frac{5}{2}}{\left(S+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{2}}{\left(S+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2}\right\}\right\}$$

$$f(t)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-\frac{5}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)t+\left(\frac{2}{\sqrt{37}}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{37}}{2}}{\left(S+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$f(t)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-\frac{5}{2}t}\cosh\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)t+\left(\frac{5}{3\sqrt{37}}\right)e^{-\frac{5}{2}t}senh\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)t$$

$$f(t-4)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-\frac{5}{2}(t-4)}\cosh\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)(t-4)+\left(\frac{5}{3\sqrt{37}}\right)e^{-\frac{5}{2}(t-4)}senh\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)(t-4)$$

Por lo tanto

$$y(t)=f(t-4)u(t-4)$$

$$\boxed{y(t)=\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-\frac{5}{2}(t-4)}\cosh\left(\frac{\sqrt{37}}{2}(t-4)\right)+\frac{5}{3\sqrt{37}}e^{-\frac{5}{2}(t-4)}senh\left(\frac{\sqrt{37}}{2}(t-4)\right)\right]u(t-4)}$$

6. Resolver la siguiente ecuación en derivadas parciales para una constante de separación $k=5$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+10\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Resolución

$$u(x,y)=F(x)G(y)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dF}{dx}G(y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{dG}{dx}F(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+10\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$\frac{dF}{dx}G(y)+10F(x)\frac{dG}{dy}=0\Rightarrow\frac{dF}{dx}G(y)=-10F(x)\frac{dG}{dy}$$

$$\frac{1}{F(x)}\frac{dF}{dx}=5\Rightarrow\frac{dF}{F(x)}=5dx\Rightarrow\int\frac{dF}{F(x)}=\int 5dx$$

$$\ln F(x)=5x+C_1\Rightarrow F(x)=k_1e^{5x}$$

$$-\frac{10}{G(y)}\frac{dG}{dy}=5\Rightarrow\frac{dG}{dy}+\frac{1}{2}G(y)=0$$

$$\lambda+\frac{1}{2}=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{2}$$

$$G(y)=k_2e^{-\frac{1}{2}y}$$

$$u(x,y)=F(x)G(y)=k_1e^{5x}k_2e^{-\frac{1}{2}y}$$

$$\boxed{u(x,y)=Ae^{5x-\frac{1}{2}y}}$$