EL OPERADOR DERIVADA, SUS PROPIEDADES Y SUS APLICACIONES

Ing. JOEL GÓMEZ

M en I JESÚS EDMUNDO RUIZ MEDINA

Prólogo

La intención de esta obra es dar a conocer las ventajas que tiene el manejo del ***operador derivada*** y sus aplicaciones en los procesos de derivación e integración de ciertas funciones y consecuentemente en la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes, cuyo término independiente lo constituye esos tipos de funciones.

Pues es bien sabido que gran cantidad de fenómenos físicos están representados matemáticamente por estos tipos de ecuaciones y sistemas.

A lo largo de ésta obra se demostrarán cada una de las propiedades y aplicaciones.

Se pretende con estas herramientas, que tanto el profesor como el alumno resuelvan de manera más dinámica los problemas que involucran ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales de estos tipos.

Joel Gómez
Jesús Edmundo Ruiz Medina

Índice general

1

Propiedades del Operador derivada y sus aplicaciones a las derivadas y a las ecuaciones diferenciales

1.1. *Primera propiedad del operador derivada*

Sea $\mathbf{x}$ la variable independiente, aunque en otros casos puede ser $\mathbf{t}$ ó cualquier otra letra previamente establecida.
Se define a:

$$\begin{array}{lcll} D & = & \frac{d}{dx} & \text{como el operador primera derivada} \\ D^2 & = & \frac{d^2}{dx^2} & \text{como el operador segunda derivada} \\ D^3 & = & \frac{d^3}{dx^3} & \text{como el operador tercera derivada} \\ & & & \vdots \\ D^n & = & \frac{d^n}{dx^n} & \text{como el operador n-ésima derivada} \end{array}$$

Consideremos para esta primera propiedad, funciones del tipo exponencial es decir:

$$\mathbf{f(x) = e^{\pm ax}}$$

donde $\mathbf{a}$ es un escalar o constante.
Aplicando el operador derivada a éste tipo de funciones

$$\begin{array}{lclcl} De^{\pm ax} & = & \frac{d}{dx}e^{\pm ax} & = & \pm ae^{\pm ax} \\ D^2e^{\pm ax} & = & \frac{d^2}{dx^2}e^{\pm ax} & = & a^2e^{\pm ax} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} D^3e^{\pm ax} & = & \frac{d^3}{dx^3}e^{\pm ax} & = & \pm a^3e^{\pm ax} \\ & & \vdots & & \\ D^ne^{\pm ax} & = & \frac{d^n}{dx^n}e^{\pm ax} & = & (\pm a)^ne^{\pm ax} \end{array}$$

Sumando miembro a miembro se tiene:

$$De^{\pm ax}+D^2e^{\pm ax}+D^3e^{\pm ax}+...+D^ne^{\pm ax} = \pm ae^{\pm ax}+(\pm a)^2e^{\pm ax}+(\pm a)^3e^{\pm ax}+...+(\pm a)^ne^{\pm ax}$$

Factorizando ahora en ambos miembros $\mathbf{e^{\pm ax}}$ se obtiene:

$$\left[D + D^2 + D^3 + ... + D^n\right] e^{\pm ax} = \left[\pm a + (\pm a)^2 + (\pm a)^3 + ... + (\pm a)^n\right] e^{\pm ax}$$

si en esta expresión designamos a la sumas de términos en $\mathbf{D}$ como $\mathbf{P(D)}$ (Polinomio diferencial o derivada) y a la suma de términos en $\mathbf{a}$ como $\mathbf{P(a)}$ se reduce a:

$$\mathbf{P(D)e^{\pm ax} = P(\pm a)e^{\pm ax}} \qquad (1.1)$$

Ejemplo 1.1 *Obtener la siguiente derivada*

$$\frac{d^3}{dx^3}(8e^{3x}) + 8\frac{d^2}{dx^2}(8e^{3x}) + 20(8e^{3x})$$

factorizando en esta expresión $\mathbf{8e^{3x}}$ y sustituyendo las derivadas por el operador derivada correspondiente tendremos:

$$\left[\frac{d^3}{dx^3} + 8\frac{d^2}{dx^2} + 20\right]\left(8e^{3x}\right) = \left[D^3 + 8D^2 + 20\right]\left(8e^{3x}\right)$$

aplicando la ecuación (1.1) el resultado es:

$$\frac{d^3}{dx^3}(8e^{3x}) + 8\frac{d^2}{dx^2}(8e^{3x}) + 20(8e^{3x}) = \left[(3)^3 + 8(3)^2 + 20\right]\left(8e^{3x}\right) = \mathbf{952e^{3x}}$$

Ejemplo 1.2 *Obtener la siguiente derivada*

$$\frac{d^3}{dx^3}(8e^{-3x}) + 8\frac{d^2}{dx^2}(8e^{-3x}) + 20(8e^{-3x})$$

factorizando en esta expresión $\mathbf{8e^{-3x}}$ y sustituyendo las derivadas por el operador derivada correspondiente tendremos:

$$\left[\frac{d^3}{dx^3}+8\frac{d^2}{dx^2}+20\right]\left(8e^{-3x}\right)=\left[D^3+8D^2+20\right]\left(8e^{-3x}\right)$$

aplicando la ecuación (1.1) el resultado es:

$$\frac{d^3}{dx^3}(8e^{-3x})+8\frac{d^2}{dx^2}(8e^{-3x})+20(8e^{-3x})=\left[(-3)^3+8(-3)^2+20\right]\left(8e^{3x}\right)=\mathbf{520e^{-3x}}$$

1.1.1. *Aplicación de la primera propiedad del operador derivada a las ecuaciones diferenciales ordinarias*

Esta primera propiedad puede aplicarse también a la determinación de una solución particular (y_p), de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes; esto es, de la ecuación (1.1) donde $P(\pm a)$ es una constante y $P(D)$ una función **escalar**, podemos entonces premultiplicar dicha expresión por:

$$\left(\frac{1}{P(\pm a)}\right)\left(\frac{1}{P(D)}\right)$$

y obtener

$$\left(\frac{1}{P(\pm a)}\right)\left(\frac{1}{P(D)}\right)P(D)e^{\pm ax}=\left(\frac{1}{P(\pm a)}\right)\left(\frac{1}{P(D)}\right)P(\pm a)e^{\pm ax}$$

por lo tanto tenemos que

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{P(D)}}\right)\mathbf{e^{\pm ax}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{P(\pm a)}}\mathbf{e^{\pm ax}} \qquad (1.2)$$

Nota:***Se debe hacer notar que en la expresión*** (1.2),$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{P(D)}}\right)$ ***corresponde al polinomio inverso de*** $\mathbf{P(D)}$ ***y que representa realmente procesos de integración.***

Ejemplo 1.3 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal no* *homogénea:*

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=10e^{4x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Solución

`Solución homogénea:`
Aplicando el concepto de polinomio diferencial tenemos:

$$(D^2-3D+2)y=0$$
$$(D-1)(D-2)y=0$$
$$D_1=1,D_2=2$$

donde el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial homogénea es:

$$\{e^x,e^{2x}\}$$

por tanto la solución homogénea de la ecuación diferencial es:

$$y_h=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

Nota: ***En*** $\mathbf{P(D)=(D-1)(D-2)}$***, D significa*** $\left(\mathbf{D=\frac{d}{dx}}\right)$***, si en la ecuación característica se conserva esta misma letra, entonces será considerada como un símbolo algebraico y no como operador derivada; es decir*** $\mathbf{(D-1)(D-2)=0}$ ***por lo tanto*** $\mathbf{D_1=1}$ ***y*** $\mathbf{D_2=2}$ ***, raíces de la ecuación característica.***

`Solución particular:`
Empleando Coeficientes Indeterminados

$$y_p=Ae^{4x}$$
$$y_p'=4Ae^{4x}$$
$$y_p''=16Ae^{4x}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos:

$$16Ae^{4x}-3(4Ae^{4x})+2(Ae^{4x})=10e^{4x}$$
$$6Ae^{4x}=10e^{4x}$$
$$A=\tfrac{10}{6}=\tfrac{5}{3}$$

por tanto la solución particular es:

$$y_p = \frac{5}{3}e^{4x}$$

Solución particular:

Empleando Operador Diferencial o Derivada

De la ecuación (α)

$$\left(D^2 - 3D + 2\right) y_p = 10e^{4x}$$
$$y_p = \left[\tfrac{1}{D^2 - 3D + 2}\right] 10e^{4x}$$

Aplicando a ésta expresión la primera propiedad del operador diferencial se obtiene:

$$y_p = \frac{10}{(4)^2 - 3(4) + 2}e^{4x} = \frac{10}{6}e^{4x} = \frac{5}{3}e^{4x}$$

por lo que la solución general es:

$$\mathbf{y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \frac{5}{3}e^{4x}}$$

Ejemplo 1.4 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal no homogénea:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 10e^{-4x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Solución

Solución homogénea:

Aplicando el concepto de polinomio diferencial tenemos:

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$
$$(D - 1)(D - 2)y = 0$$
$$D_1 = 1, D_2 = 2$$

donde en el conjunto fundamental de solución es:

$$\{e^x, e^{2x}\}$$

siendo la solución homogénea:

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

`Solución particular:`

De la ecuación (β)

$$(D^2 - 3D + 2)\, y_p = 10e^{-4x}$$
$$y_p = \left[\tfrac{1}{D^2-3D+2}\right] 10e^{-4x}$$

Aplicando a ésta expresión la primera propiedad del operador diferencial se obtiene:

$$y_p = \frac{10}{(-4)^2 - 3(-4) + 2} e^{-4x} = \frac{10}{30} e^{-4x} = \frac{1}{3} e^{-4x}$$

Verifiquemos la solución particular

$$\begin{array}{rcl}
(D^2 - 3D + 2)\, \frac{1}{3}e^{-4x} & = & 10e^{-4x} \\
((-4)^2 - 3(-4) + 2)\, \frac{1}{3}e^{-4x} & & 10e^{-4x} \\
(16 + 12 + 2)\, \frac{1}{3}e^{-4x} & & 10e^{-4x} \\
\frac{30}{3}e^{-4x} & & 10e^{-4x} \\
\mathbf{10e^{-4x}} & = & \mathbf{10e^{-4x}}
\end{array}$$

por lo que la solución general es:

$$\mathbf{y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3} e^{-4x}}$$

Los casos de repetición de raíces se resuelven con la tercera y cuarta propiedad, más adelante.

1.2. *Segunda propiedad del operador derivada*

Consideremos en este caso funciones de tipo senoidal y cosenoidal como:

$$\mathbf{sen(ax + b), cos(ax + b), sen(ax), cos(ax)}$$

donde **a** y **b** son números reales.
Sea

$$\mathbf{f(x) = sen(ax + b)}$$

Aplicando sucesivamente el operador derivada a ésta función hasta la cuarta derivada tendremos:

$$Dsen(ax+b) = \tfrac{d}{dx}sen(ax+b) = acos(ax+b) \tag{1.3}$$

$$D^2sen(ax+b) = \tfrac{d^2}{dx^2}sen(ax+b) = -a^2sen(ax+b) \tag{1.4}$$
$$D^3sen(ax+b) = \tfrac{d^3}{dx^3}sen(ax+b) = -a^3cos(ax+b) \tag{1.5}$$
$$D^4sen(ax+b) = \tfrac{d^4}{dx^4}sen(ax+b) = a^4sen(ax+b) \tag{1.6}$$

De las expresiones anteriores se observa que la función trigonométrica $sen(ax+b)$ se repite en (1.4) y (1.6) donde $\mathbf{D^2}$ es sustituida por $\mathbf{-a^2}$ y $\mathbf{D^4}$ por $\mathbf{(-a^2)^2 = a^4}$.

Ejemplo 1.5 *Realizar la siguiente operación*

$$\frac{d^3}{dx^3}sen(3x+2) + \frac{d^2}{dx^2}sen(3x+2) + \frac{d}{dx}sen(3x+2)$$

Factorizando la función $sen(3x+2)$ y utilizando el **operador derivada** (D) se obtiene:

$$\left[D^3 + D^2 + D\right] sen(3x+2)$$

Al desarrollar se tiene:

$$\left[(D^2)D + D^2 + D\right] sen(3x+2)$$

$$[(D^2)D + D^2 + D]_{D^2=-9}\, sen(3x+2)$$
$$[(-9)D + (-9) + D]\, sen(3x+2) = [-8D - 9]\, sen(3x+2)$$
$$[-8D-9]\, sen(3x+2) = -8Dsen(3x+2) - 9sen(3x+2)$$
$$\mathbf{-24cos(3x+2) - 9sen(3x+2)}$$

Ejemplo 1.6 *Realizar la siguiente operación*

$$\frac{d^3}{dx^3}cos(2x-4) + \frac{d^2}{dx^2}cos(2x-4) + \frac{d}{dx}cos(2x-4)$$

Factorizando la función $cos(2x-4)$ y utilizando el **operador derivada** (D) se obtiene:

$$\left[D^3 + D^2 + D\right] cos(2x-4)$$

Al desarrollar se tiene:

$$[(D^2)D + D^2 + D]\,cos(2x-4)$$
$$[(D^2)D + D^2 + D]_{D^2=-4}\,cos(2x-4)$$
$$[(-4)D + (-4) + D]\,cos(2x-4) = [-3D-4]\,cos(2x-4)$$
$$[-3D-4]\,cos(2x-4) = -3Dcos(2x-4) - 4cos(2x-4)$$
$$\mathbf{6sen(2x-4) - 4cos(2x-4)}$$

1.2.1. *Aplicación de la segunda propiedad del operador derivada a las ecuaciones diferenciales ordinarias*

La demostración de ésta propiedad considerando operadores inverso es similar a la demostración de la primera propiedad, tomando en cuenta la siguiente fórmula de Euler:

$$\mathbf{e^{(\theta i)} = cos(\theta) + isen(\theta)}$$

Una aplicación de esta propiedad la tenemos en la determinación de una solución particular (y_p) de una ecuación diferencial.

Ejemplo 1.7 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 20cos(4x)$$

Solución

`Solución homogénea:`
Aplicando el polinomio diferencial tenemos:

$$[D^2 + 5D + 6]\,y = 0$$
$$[(D+2)(D+3)]\,y = 0$$
$$D_1 = -2, D_2 = -3$$

cuyo conjunto fundamental solución es:

$$\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$$

por lo que su solución homogénea se presenta como:

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

`Solución particular:`
Empleando Coeficientes Indeterminados

$$y_p = Acos(4x) + Bsen(4x)$$
$$y_p^{'} = -4Asen(4x) + 4Bcos(4x)$$
$$y_p^{''} = -16Acos(4x) - 16Bsen(4x)$$

sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos:

$$-16Acos(4x) - 16Bsen(4x) - 20Asen(4x) + 20Bcos(4x) + 6Acos(4x) + 6Bsen(4x) = 20cos(4x)$$

Agrupando:

$$[-10A + 20B]\,cos(4x) + [-20A - 10B]\,sen(4x) = 20cos(4x)$$

resolviendo el sistema:

$$-10A + 20B = 20$$
$$-20A - 10B = 0$$

se obtienen:

$$A = -\frac{2}{5}, B = \frac{4}{5}$$

al sustituir las constantes previamente obtenidas se tiene:

$$y_p = -\frac{2}{5}cos(4x) + \frac{4}{5}sen(4x)$$

`Solución particular:`
Empleando el Operador Derivada.

$$[D^2 + 5D + 6]\,y_p = 20cos(4x)$$
$$y_p = \left[\tfrac{1}{D^2+5D+6}\right] 20cos(4x),\ D^2 = -16$$
$$y_p = \left[\tfrac{1}{(-16+5D+6)}\right] 20cos(4x)$$
$$y_p = \left[\tfrac{1}{(5D-10)}\right] 20cos(4x) = \left[\tfrac{5}{5(D-2)}\right] 4cos(4x) = \left[\tfrac{1}{(D-2)}\right] 4cos(4x)$$

Multiplicando el operador inverso por $\frac{D+2}{D+2}$ se tiene

$$
\begin{gathered}
y_p = \left[\frac{1}{D-2}\right]\left(\frac{D+2}{D+2}\right) 4cos(4x) \\
y_p = \left(\frac{D+2}{D^2-4}\right) 4cos(4x),\ D^2 = -16 \\
y_p = \left[\frac{D+2}{(-16)-4}\right] 4cos(4x) \\
y_p = \left[\frac{D+2}{(-20)}\right] 4cos(4x) \\
y_p = -\frac{1}{20}\left[D+2\right] 4cos(4x) \\
y_p = -\frac{1}{20}\left[4(D)cos(4x) + 8cos(4x)\right] \\
y_p = -\frac{1}{20}\left[-16sen(4x) + 8cos(4x)\right] \\
y_p = -\frac{8}{20}cos(4x) + \frac{16}{20}sen(4x)
\end{gathered}
$$

donde la solución particular es:

$$y_p = -\frac{2}{5}cos(4x) + \frac{4}{5}sen(4x)$$

Por lo que la solución general buscada es:

$$\mathbf{y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{2}{5}cos(4x) + \frac{4}{5}sen(4x)}$$

Ejemplo 1.8 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 20sen(4x)$$

Solución

`Solución homogénea:`

Aplicando el polinomio diferencial tenemos:

$$
\begin{gathered}
\left[D^2 + 5D + 6\right] y = 0 \\
\left[(D+2)(D+3)\right] y = 0 \\
D_1 = -2, D_2 = -3
\end{gathered}
$$

donde el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial es:

$$\{e^{-2x}, e^{-3x}\}$$

por lo que la solución homogénea se presenta como:

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$$

`Solución particular:`

$$\begin{gathered}
[D^2+5D+6]\,y_p = 20sen(4x)\\
y_p = \left[\tfrac{1}{D^2+5D+6}\right]20sen(4x),\ D^2=-16\\
y_p = \left[\tfrac{1}{(-16+5D+6)}\right]20sen(4x)\\
y_p = \left[\tfrac{1}{(5D-10)}\right]20sen(4x) = \left[\tfrac{20}{5(D-2)}\right]sen(4x) = 4\left[\tfrac{1}{(D-2)}\right]sen(4x)
\end{gathered}$$

Multiplicando el operador inverso por $\frac{D+2}{D+2}$ se tiene

$$\begin{gathered}
y_p = 4\left[\tfrac{1}{D-2}\right]\left(\tfrac{D+2}{D+2}\right)sen(4x)\\
y_p = 4\left(\tfrac{D+2}{D^2-4}\right)sen(4x),\ D^2=-16\\
y_p = 4\left[\tfrac{D+2}{(-16)-4}\right]sen(4x)\\
y_p = 4\left[\tfrac{D+2}{(-20)}\right]sen(4x)\\
y_p = -\tfrac{4}{20}[D+2]\,sen(4x)\\
y_p = -\tfrac{1}{5}[4cos(4x)+2sen(4x)]
\end{gathered}$$

Siendo nuestra solución particular

$$y_p = -\frac{4}{5}cos(4x) - \frac{2}{5}sen(4x)$$

Verifiquemos nuestra solución

$$\begin{aligned}
[D^2+5D+6]\,y_p &= 20sen(4x)\\
[D^2+5D+6]\left(-\tfrac{4}{5}cos(4x)-\tfrac{2}{5}sen(4x)\right) &\quad 20sen(4x)\\
[-16+5D+6]\left(-\tfrac{4}{5}cos(4x)-\tfrac{2}{5}sen(4x)\right) &\quad 20sen(4x)\\
[5D-10]\left(-\tfrac{4}{5}cos(4x)-\tfrac{2}{5}sen(4x)\right) &\quad 20sen(4x)\\
[D-2]\left(-4cos(4x)-2sen(4x)\right) &\quad 20sen(4x)\\
16sen(4x)-8cos(4x)+8cos(4x)+4sen(4x) &\quad 20sen(4x)\\
\mathbf{20sen(4x)} &= \mathbf{20sen(4x)}
\end{aligned}$$

Por lo que la solución general buscada es:

$$\mathbf{y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} - \frac{4}{5}cos(4x) - \frac{2}{5}sen(4x)}$$

1.3. *Tercera propiedad del operador derivada*

En está propiedad se considera una función cualquiera de x, llamada $u(x)$ multiplicada por la función exponencial $e^{\pm ax}$ es decir:

$$\mathbf{f(x) = e^{\pm ax} u(x)}$$

Aplicando el operador derivada en forma sucesiva a la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(e^{\pm ax}u(x)) = D(e^{\pm ax}u(x)) = e^{\pm ax}D(u(x)) + e^{\pm ax}(\pm au(x))$$
$$D(e^{\pm ax}u(x)) = e^{\pm ax}(D \pm a)u(x)$$
$$D^2(e^{\pm ax}u(x)) = D(e^{\pm ax}(D \pm a)u(x)) = e^{\pm ax}D(D \pm a)u(x) + e^{\pm ax}(\pm a(D \pm a)u(x))$$
$$D^2(e^{\pm ax}u(x)) = e^{\pm ax}\left[D(D \pm a) + \pm a(D \pm a)\right]u(x) = e^{\pm ax}(D \pm a)^2 u(x)$$

Generalizando:

$$D^n\left(e^{\pm ax}u(x)\right) = e^{\pm ax}\left(D \pm a\right)^n u(x) \qquad (1.7)$$

Esta propiedad nos permite anteponer la exponencial al operador derivada, afectando éste último únicamente a la función $u(x)$.
Si en lugar del operador D aplicamos a éste tipo de funciones un $P(D)$, entonces:

$$\mathbf{P(D)e^{\pm ax}u(x) = e^{\pm ax}P(D \pm a)u(x)} \qquad (1.8)$$

Ejemplo 1.9 *Obtener:*

$$\left(D^2 + 2D - 6\right)e^{2x}sen(4x)$$

SOLUCIÓN
Empleando la ecuación (1.8) podemos reducir la expresión anterior a:

$$e^{2x}[(D+2)^2 + 2(D+2) - 6]sen(4x)$$
$$e^{2x}[D^2 + 4D + 4 + 2D + 4 - 6]sen(4x)$$
$$e^{2x}[D^2 + 6D + 2]sen(4x)$$

aplicándole a esta última expresión la segunda propiedad el operador diferencial se obtiene:

$$\begin{aligned}(D^2+2D-6)\,e^{2x}sen(4x) &= e^{2x}(-16+6D+2)sen(4x)\\ &= e^{2x}(6D-14)sen(4x)\\ &= e^{2x}\left[6D(sen(4x))-14sen(4x)\right]\\ &= e^{2x}\left[24cos(4x)-14sen(4x)\right]\end{aligned}$$

finalmente

$$\mathbf{(D^2+2D-6)e^{2x}sen(4x)=24e^{2x}cos(4x)-14e^{2x}sen(4x)}$$

Ejemplo 1.10 *Obtener:*

$$\left(D^2+2D-6\right)e^{2x}cos(4x)$$

Solución
Empleando la ecuación (1.8) podemos reducir la expresión anterior a:

$$e^{2x}[(D+2)^2+2(D+2)-6]cos(4x)$$
$$e^{2x}[D^2+4D+4+2D+4-6]cos(4x)$$
$$e^{2x}[D^2+6D+2]cos(4x)$$

aplicándole a esta última expresión la segunda propiedad el operador diferencial se obtiene:

$$\begin{aligned}(D^2+2D-6)\,e^{2x}cos(4x) &= e^{2x}(-16+6D+2)cos(4x)\\ &= e^{2x}(6D-14)cos(4x)\\ &= e^{2x}\left[6D(cos(4x))-14cos(4x)\right]\\ &= e^{2x}\left[-24sen(4x)-14cos(4x)\right]\end{aligned}$$

finalmente

$$\mathbf{(D^2+2D-6)e^{2x}cos(4x)=-24e^{2x}sen(4x)-14e^{2x}cos(4x)}$$

1.3.1. *Aplicación de la tercera propiedad del operador derivada a las ecuaciones diferenciales ordinarias*

Demostración de está propiedad considerando operadores inversos.
Si en la ecuación (1.8) hacemos el siguiente cambio

$$u(x)=\left[\frac{1}{P(D\pm a)}\right]v(x)$$

se tendrá:

$$P(D)e^{\pm ax}\left[\frac{1}{P(D\pm a)}\right]v(x)=e^{\pm ax}P(D\pm a)\left[\frac{1}{P(D\pm a)}\right]v(x)$$

$$P(D)e^{\pm ax}\left[\frac{1}{P(D\pm a)}\right]v(x)=e^{\pm ax}v(x)$$

premultiplicando ambos miembros por $\frac{1}{P(D)}$

$$\left[\frac{1}{P(D)}\right]P(D)e^{\pm ax}\left[\frac{1}{P(D\pm a)}\right]v(x)=\left[\frac{1}{P(D)}\right]e^{\pm ax}v(x)$$

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{P(D)}}\right]\mathbf{e^{\pm ax}v(x)}=\mathbf{e^{\pm ax}}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{P(D\pm a)}}\right]\mathbf{v(x)} \tag{1.9}$$

Una aplicación de esta propiedad la tenemos en la determinación de una y_p de una ecuación diferencial.

Ejemplo 1.11 *Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:*

$$y^{'''}+6y^{''}+11y^{'}+6y=8e^{2x}cos(3x)$$

Solución

`Solución homogénea:`
Aplicando el concepto de polinomio diferencial podemos expresar la ecuación diferencial como:

$$\left[D^3+6D^2+11D+6\right]y=0$$
$$\left[(D+1)(D+2)(D+3)\right]y=0$$
$$D_1=-1, D_2=-2, D_3=-3$$

donde el conjunto fundamental de solución se presenta como:

$$\{e^{-x},e^{-2x},e^{-3x}\}$$

por lo que la solución homogénea se expresa

$$y_h=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$$

`Solución particular:`
Empleando Coeficientes Indeterminados

$$y_p = Ae^{2x}cos(3x) + Be^{2x}sen(3x)$$
$$y_p' = A\left[-3e^{2x}sen(3x) + 2e^{2x}cos(3x)\right] + B\left[3e^{2x}cos(3x) + 2e^{2x}sen(3x)\right]$$
$$y_p'' = A\left[-5e^{2x}cos(3x) - 12e^{2x}sen(3x)\right] + B\left[-5e^{2x}sen(3x) + 12e^{2x}cos(3x)\right]$$
$$y_p''' = A\left[-46e^{2x}cos(3x) - 9e^{2x}sen(3x)\right] + B\left[-46e^{2x}sen(3x) + 9e^{2x}cos(3x)\right]$$

sustituyendo en la ecuación deferencial:

$$\left[-48A + 114B\right]e^{2x}cos(3x) + \left[-114A - 48B\right]e^{2x}sen(3x) = 8e^{2x}cos(3x)$$

Resolviendo el sistema:

$$-48A + 114B = 8$$
$$-114A - 48B = 0$$

se tiene:

$$A = -\frac{32}{1275} \text{ y } B = \frac{76}{1275}$$

por lo que la solución particular es:

$$y_p = -\frac{32}{1275}e^{2x}cos(3x) + \frac{76}{1275}e^{2x}sen(3x)$$

`Solución particular:`
Empleando las Propiedades del Operador Derivada

$$\left(D^3 + 6D^2 + 11D + 6\right)y_p = 8e^{2x}cos(3x)$$
$$y_p = \left[\frac{1}{D^3+6D^2+11D+6}\right]8e^{2x}cos(3x)$$

Aplicando la tercera propiedad del operador derivada

$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{(D+2)^3+6(D+2)^2+11(D+2)+6}\right]cos(3x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{D^3+12D^2+47D+60}\right]cos(3x)$$

Aplicando la segunda propiedad del operador derivada

$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{D(D^2)+12D^2+47D+60}\right]cos(3x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{D(-9)+12(-9)+47D+60}\right]cos(3x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{38D-48}\right]cos(3x)$$

multiplicando por $\frac{38D+48}{38D+48}$

$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{38D-48}\right]\left(\frac{38D+48}{38D+48}\right)cos(3x$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{38D+48}{1444D^2-2304}\right]cos(3x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{38D+48}{1444(-9)-2304}\right]cos(3x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{38D+48}{-15300}\right]cos(3x)$$
$$y_p = -\frac{8}{15300}e^{2x}\left[38D(cos(3x)) + 48cos(3x)\right]$$
$$y_p = -\frac{8}{15300}e^{2x}\left[-114sen(3x) + 48cos(3x)\right]$$
$$y_p = \frac{76}{1275}e^{2x}sen(3x) - \frac{32}{1275}e^{2x}cos(3x)$$

por lo que la solución general buscada es:

$$\mathbf{y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} - \frac{32}{1275}e^{2x}cos(3x) + \frac{76}{1275}e^{2x}sen(3x)}$$

Ejemplo 1.12 *Determinar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:*

$$y^{'''} + 6y^{''} + 11y^{'} + 6y = 8e^{2x}sen(x)$$

Solución

`Solución homogénea:`

Aplicando el concepto de polinomio diferencial podemos expresar la ecuación diferencial como:

$$\left[D^3 + 6D^2 + 11D + 6\right]y = 0$$
$$\left[(D+1)(D+2)(D+3)\right]y = 0$$
$$D_1 = -1, D_2 = -2, D_3 = -3$$

cuyo conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x}\}$$

por lo que la solución homogénea tendrá la forma:

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$$

Solución particular:

$$(D^3+6D^2+11D+6)\,y_p = 8e^{2x}sen(x)$$
$$y_p = \left[\frac{1}{D^3+6D^2+11D+6}\right]8e^{2x}sen(x)$$

Aplicando la tercera propiedad del operador derivada

$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{(D+2)^3+6(D+2)^2+11(D+2)+6}\right]sen(x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{D^3+12D^2+47D+60}\right]sen(x)$$

Aplicando la segunda propiedad del operador derivada

$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{D(D^2)+12D^2+47D+60}\right]sen(x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{D(-1)+12(-1)+47D+60}\right]sen(x)$$

$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{46D+48}\right]sen(x)$$

multiplicando por $\frac{46D-48}{46D-48}$

$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{1}{46D+48}\right]\left(\frac{46D-48}{46D-48}\right)sen(x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{46D-48}{2116D^2-2304}\right]sen(x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{46D-48}{2116(-1)-2304}\right]sen(x)$$
$$y_p = 8e^{2x}\left[\frac{46D-48}{-4420}\right]sen(x)$$
$$y_p = -\frac{8}{4420}e^{2x}\left[46D(sen(x))-48sen(x)\right]$$
$$y_p = -\frac{8}{4420}e^{2x}\left[46cos(x)-48sen(x)\right]$$
$$y_p = -\frac{92}{1105}e^{2x}cos(x)+\frac{96}{1105}e^{2x}sen(x)$$

Verifiquemos dicha solución

$$\begin{array}{rcl}
(D^3+6D^2+11D+6)\left(-\frac{92}{1105}e^{2x}cos(x)+\frac{96}{1105}e^{2x}sen(x)\right) & = & 8e^{2x}sen(x)\\
e^{2x}\left((D+2)^3+6(D+2)^2+11(D+2)+6\right)\left(-\frac{92}{1105}cos(x)+\frac{96}{1105}sen(x)\right) & & 8e^{2x}sen(x)\\
e^{2x}\left(D^3+12D^2+47D+60\right)\left(-\frac{92}{1105}cos(x)+\frac{96}{1105}sen(x)\right) & & 8e^{2x}sen(x)\\
e^{2x}\left(-D-12+47D+60\right)\left(-\frac{92}{1105}cos(x)+\frac{96}{1105}sen(x)\right) & & 8e^{2x}sen(x)\\
e^{2x}\left(46D+48\right)\left(-\frac{92}{1105}cos(x)+\frac{96}{1105}sen(x)\right) & & 8e^{2x}sen(x)\\
e^{2x}\left(\frac{4232}{1105}sen(x)+\frac{4416}{1105}cos(x)-\frac{4416}{1105}cos(x)+\frac{4608}{1105}sen(x)\right) & & 8e^{2x}sen(x)\\
e^{2x}\left(\frac{8840}{1105}sen(x)\right) & & 8e^{2x}sen(x)\\
\mathbf{8e^{2x}sen(x)} & = & \mathbf{8e^{2x}sen(x)}
\end{array}$$

por lo que la solución general buscada es:

$$\mathbf{y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} - \frac{92}{1105}e^{2x}cos(x) + \frac{96}{1105}e^{2x}sen(x)}$$

1.4. *Cuarta propiedad del operador derivada*

Las funciones a considerar en éste caso son:

$$\mathbf{f(x) = x^r u(x)}$$

donde r es un entero positivo,aunque puede ser cualquier número real.
Si $\mathbf{r = 1}$

$$f(x) = xu(x)$$

aplicando sucesivamente el operador derivada tenemos:

$$\begin{gathered}
\tfrac{d}{dx}(xu(x)) = D(xu(x)) = xD(u(x)) + u(x) = \left[(x + \tfrac{d}{dD})D\right]u(x) \\
\tfrac{d^2}{dx^2}(xu(x)) = D\left[xD(u(x)) + u(x)\right] = xD^2u(x) + 2Du(x) = \left[(x + \tfrac{d}{dD})D^2\right]u(x) \\
\vdots \\
\tfrac{d^n}{dx^n}(xu(x)) = xD^nu(x) + nD^{n-1}u(x) = \left[(x + \tfrac{d}{dD})D^n\right]u(x)
\end{gathered}$$

Generalizando:

$$\left[(x + \frac{d}{dD})D^n\right]u(x) = xD^n(u(x)) + \frac{d}{dD}(D^n)(u(x)) \tag{1.10}$$

Si $\mathbf{r = 2}$

$$f(x) = x^2u(x)$$

$$\begin{gathered}
D(x^2u(x)) = x^2D(u(x)) + 2xu(x) \\
D(x^2u(x)) = \left[\left(x + \tfrac{d}{dD}\right)^2 D\right]u(x) = \left[(x^2 + 2x\tfrac{d}{dD} + \tfrac{d^2}{dD^2})D\right]u(x) \\
D^2(x^2u(x)) = D\left[x^2D(u(x)) + 2xu(x)\right] = x^2D^2(u(x)) + 4xD(u(x)) + 2u(x) \\
D^2(x^2u(x)) = \left[\left(x + \tfrac{d}{dD}\right)^2 D^2\right]u(x) \\
\vdots \\
D^n(x^2u(x)) = \left[\left(x + \tfrac{d}{dD}\right)^2 D^n\right]u(x)
\end{gathered}$$

Generalizando:

$$\left[(x+\frac{d}{dD})^2 D^n\right] u(x) = x^2 D^n(u(x)) + 2x\frac{d}{dD}(D^n)(u(x)) + \frac{d^2}{dD^2}(D^n)(u(x)) \qquad (1.11)$$

En general:

$$D^n\left(x^r u(x)\right) = \left[(x+\frac{d}{dD})^r D^n\right] u(x)$$

Si en lugar de D se tiene un polinomio $P(D)$ la expresión cambia a:

$$\mathbf{P(D)x^r u(x)} = \left[(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dD}})^{\mathbf{r}}\mathbf{P(D)}\right]\mathbf{u(x)} \qquad (1.12)$$

Esta propiedad nos permite anteponer, el polinomio en x al operador derivada, afectando únicamente a la función $u(x)$.

Ejemplo 1.13 *Obtener:*

$$(D^3+8D^2+3D+2)x^2e^{2x}$$

Solución

Un primer procedimiento es usando la tercera propiedad del operador derivada

$$(D^3+8D^2+3D+2)x^2e^{2x} = e^{2x}\left[(D+2)^3+8(D+2)^2+3(D+2)+2\right]x^2$$

Desarrollando:

$$e^{2x}\left[(D^3+6D^2+12D+8)+8(D^2+4D+4)+3(D+2)+2\right]x^2$$
$$e^{2x}\left[D^3+14D^2+47D+48\right]x^2$$
$$e^{2x}\left[D^3(x^2)+14D^2(x^2)+47D(x^2)+48x^2\right]$$
$$e^{2x}\left[28+94x+48x^2\right]$$

Reacomodando se tiene:

$$\left[\mathbf{48x^2+94x+28}\right]\mathbf{e^{2x}}$$

Un segundo procedimiento es usando la cuarta y primera propiedad del operador derivada.

Aplicando la cuarta propiedad

$$(D^3+8D^2+3D+2)x^2e^{2x}=\left[(x+\tfrac{d}{dD})^2(D^3+8D^2+3D+2)\right]e^{2x}$$
$$\left[(x^2+2x\tfrac{d}{dD}+\tfrac{d^2}{dD^2})(D^3+8D^2+3D+2)\right]e^{2x}$$
$$x^2(D^3+8D^2+3D+2)e^{2x}+2x\tfrac{d}{dD}(D^3+8D^2+3D+2)e^{2x}+\tfrac{d^2}{dD^2}(D^3+8D^2+3D+2)e^{2x}$$
$$x^2(D^3+8D^2+3D+2)e^{2x}+2x(3D^2+16D+3)e^{2x}+(6D+16)e^{2x}$$

Aplicando la primera propiedad

$$x^2[(2)^3+8(2)^2+3(2)+2]e^{2x}+2x[3(2)^2+16(2)+3]e^{2x}+[6(2)+16]e^{2x}$$
$$x^2(8+32+6+2)e^{2x}+2x(12+32+3)e^{2x}+(12+16)e^{2x}$$
$$x^2(48)e^{2x}+2x(47)e^{2x}+28e^{2x}$$
$$\mathbf{[48x^2+94x+28]\,e^{2x}}$$

Ejemplo 1.14 *Obtener:*

$$(D^4+8D^3-5D^2+3D-4)xsen(2x)$$

Solución

Una forma de solución es empleando la tercera propiedad del operador derivada ,empleando la sustitución $sen(2x)$ por e^{2xi}, donde

$$\mathbf{e^{2xi}=cos(2x)+isen(2x)}$$

Nota: ***Obsérvese que el término que involucra al seno es la parte imaginaria de la expresión***.

$$(D^4+8D^3-5D^2+3D-4)xe^{2xi}$$

Aplicando la tercera propiedad

$$e^{2xi}((D+2i)^4+8(D+2i)^3-5(D+2i)^2+3(D+2i)-4)x$$
$$e^{2xi}(D^4+(8+8i)D^3+(-29+48i)D^2+(-93-52i)D+(32-58i))x$$
$$e^{2xi}((-93-52i)D+(32-58i))x$$
$$e^{2xi}((-93+32x)+(-52-58x)i)$$

Reacomodando

$$((-93+32x)+(-52-58x)i)e^{2xi}$$
$$((-93+32x)+(-52-58x)i)(cos(2x)+isen(2x))$$

Desarrollando

$$[(-93+32x)cos(2x)+(52+58x)sen(2x)]+[(-93+32x)sen(2x)-(52+58x)cos(2x)]i$$

como se hizo notar antes la función **seno** involucra a la parte imaginaria en la representación e^{2xi},por lo que tomaremos dichos términos como solución de la ecuación, esto es:

$$\mathbf{-58xcos(2x)+32xsen(2x)-52cos(2x)-93sen(2x)}$$

Un segundo método es aplicar la cuarta propiedad

$$(D^4+8D^3-5D^2+3D-4)xsen(2x)=\left[(x+\tfrac{d}{dD})(D^4+8D^3-5D^2+3D-4)\right]sen(2x)$$
$$=x(D^4+8D^3-5D^2+3D-4)sen(2x)+(4D^3+24D^2-10D+3)sen(2x)$$

Aplicando la segunda propiedad

$$x(D^2D^2+8D^2D-5D^2+3D-4)sen(2x)+(4D^2D+24D^2-10D+3)sen(2x)$$
$$x((-4)(-4)+8(-4)D-5(-4)+3D-4)sen(2x)+(4(-4)D+24(-4)-10D+3)sen(2x)$$
$$x(16-32D+20+3D-4)sen(2x)+(-16D-96-10D+3)sen(2x)$$
$$x(-29D+32)sen(2x)+(-26D-93)sen(2x)$$
$$x(-29D(sen(2x))+32sen(2x)-26D(sen(2x))-93sen(2x)$$
$$x(-58cos(2x)+32sen(2x))-52cos(2x)-93sen(2x)$$

Desarrollando

$$\mathbf{-58xcos(2x)+32xsen(2x)-52cos(2x)-93sen(2x)}$$

1.4.1. *Aplicación de la cuarta propiedad del operador derivada a las ecuaciones diferenciales ordinarias*

Demostración de está propiedad considerando operadores inversos
Si en la ecuación (1.12) consideramos a $\mathbf{r}=\mathbf{1}$, esta se reduce a:

$$P(D)xu(x)=\left[(x+\frac{d}{dD})P(D)\right]u(x)=xP(D)u(x)+P^{'}(D)u(x)$$

Si hacemos $u(x)=\left[\frac{1}{P(D)}\right]v(x)$ y sustituimos en la expresión anterior se tendrá:

$$\begin{aligned} P(D)x\left[\tfrac{1}{P(D)}\right]v(x) &= xP(D)\left[\tfrac{1}{P(D)}\right]v(x)+\left[\tfrac{P^{'}(D)}{P(D)}\right]v(x)\\ &= xv(x)+\left[\tfrac{P^{'}(D)}{P(D)}\right]v(x)\\ xv(x) &= P(D)x\left[\tfrac{1}{P(D)}\right]v(x)-\left[\tfrac{P^{'}(D)}{P(D)}\right]v(x)\end{aligned}$$

premultiplicando por $\frac{1}{P(D)}$

$$\left[\frac{1}{P(D)}\right]xv(x)=x\left[\frac{1}{P(D)}\right]v(x)-\left[\frac{P^{'}(D)}{(P(D))^2}\right]v(x)$$

Finalmente:

$$\left[\frac{1}{P(D)}\right]xv(x)=\left[\left(x+\frac{d}{dD}\right)\frac{1}{P(D)}\right]v(x) \tag{1.13}$$

Si $\mathbf{r}=\mathbf{2}$ entonces (1.12) se transforma en:

$$P(D)x^2u(x)=\left[\left(x+\tfrac{d}{dD}\right)^2P(D)\right]u(x)=\left[(x^2+2x\tfrac{d}{dD}+\tfrac{d^2}{dD^2})p(D)\right]u(x)$$
$$P(D)x^2u(x)=x^2P(D)u(x)+2xP^{'}(D)u(x)+P^{''}(D)u(x)$$

Si hacemos $u(x)=\left[\frac{1}{P(D)}\right]v(x)$ y sustituimos en la ecuación anterior tendremos

$$P(D)x^2\left[\tfrac{1}{p(D)}\right]v(x)=x^2P(D)\left[\tfrac{1}{P(D)}\right]v(x)+2xP^{'}(D)\left[\tfrac{1}{P(D)}\right]v(x)+P^{''}(D)\left[\tfrac{1}{P(D)}\right]v(x)$$
$$P(D)x^2\left[\tfrac{1}{p(D)}\right]v(x)=x^2v(x)+2x\left[\tfrac{P^{'}(D)}{P(D)}\right]v(x)+\left[\tfrac{P^{''}(D)}{P(D)}\right]v(x)$$

Despejando $x^2v(x)$

$$x^2v(x)=P(D)x^2\left[\frac{1}{P(D)}\right]v(x)-2x\left[\frac{P^{'}(D)}{P(D)}v(x)\right]-\left[\frac{P^{''}(D)}{P(D)}v(x)\right]$$

premultiplicando por $\frac{1}{P(D)}$

$$\frac{1}{P(D)}x^2v(x) = x^2\left[\frac{1}{P(D)}\right]v(x) + \frac{1}{P(D)}\left[-2x\frac{P'(D)}{P(D)}v(x)\right] - \frac{P''(D)}{(P(D))^2}v(x) \qquad (1.14)$$

Por la ecuación (1.13):

$$\frac{1}{P(D)}\left[-2x\frac{P'(D)}{P(D)}v(x)\right] = -2\left[\left(x+\frac{d}{dD}\right)\frac{1}{P(D)}\right]\frac{P'(D)}{P(D)}v(x)$$

$$\frac{1}{P(D)}\left[-2x\frac{P'(D)}{P(D)}v(x)\right] = -2x\left[\frac{P'(D)}{(P(D))^2}\right]v(x) + 2\left[\frac{(P'(D))^2}{(P(D))^3}\right]v(x) \qquad (1.15)$$

Si sustituimos (1.15) en (1.14) y premultiplicamos el último término de (1.14) por $\frac{P(D)}{P(D)} = 1$

se tiene

$$\frac{1}{P(D)}x^2v(x) = x^2\left[\frac{1}{P(D)}\right]v(x) - 2x\left[\frac{P'(D)}{(P(D))^2}\right] + \frac{2\left[P'(D)\right]^2}{[P(D)]^3}v(x) - \frac{P(D)P''(D)}{[P(D)]^3}$$
$$\frac{1}{P(D)}x^2v(x) = \left[\left(x+\frac{d}{dD}\right)^2\left(\frac{1}{P(D)}\right)\right]v(x)$$

Generalizando:

$$\mathbf{\frac{1}{P(D)}x^nv(x) = \left[\left(x+\frac{d}{dD}\right)^n\frac{1}{P(D)}\right]v(x)} \qquad (1.16)$$

De lo anterior concluimos que la cuarta propiedad es aplicable también a operadores diferenciales inversos$\left(\frac{1}{P(D)}\right)$

Ejemplo 1.15 *Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial*

$$\left(D^2-2D+2\right)y = 8xe^x$$

Solución

`Solución homogénea:`

$$(D^2-2D+2)y = 0$$
$$(D^2-2(1)D+((1)^2+(1)^2)$$
$$D_1 = 1+i, D_2 = 1-i$$

cuyo conjunto fundamental de soluciones se representa:

$$\{e^x cos(x), e^x sen(x)\}$$

por lo cual la solución homogénea de la ecuación diferencial es:

$$y_h = C_1 e^x cos(x) + C_2 e^x sen(x)$$

`Solución particular:`
Empleando Coeficientes Indeterminados

$$y_p = Ae^x + Bxe^x$$
$$y_p^{'} = Ae^x + B[xe^x + e^x]$$
$$y_p^{''} = Ae^x + B[xe^x + 2e^x]$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$(Ae^x + B[xe^x + 2e^x]) - 2(Ae^x + B[xe^x + e^x]) + 2(Ae^x + Bxe^x) = 8xe^x$$
$$[(A - 2A + 2A) + (2B - 2B)]\, e^x + [B - 2B + 2B]\, xe^x = 8xe^x$$
$$Ae^x + Bxe^x = 8xe^x$$

donde se forma el siguiente sistema

$$Ae^x = 0e^x$$
$$Bxe^x = 8xe^x$$

cuya solución es $A = 0$ y $B = 8$, esto indica que su solución particular será:

$$y_p = 8xe^x$$

`Solución particular:`
Empleando propiedades del Operador Derivada

$$(D^2 - 2D + 2)y_p = 8xe^x$$

por lo tanto

$$y_p = \left[\frac{1}{D^2 - 2D + 2}\right] 8xe^x$$

aplicando la cuarta propiedad

$$y_p = 8\left(x + \frac{d}{dD}\right)\left[\frac{1}{D^2-2D+2}\right]e^x$$
$$y_p = 8x\left[\frac{1}{D^2-2D+2}\right]e^x + 8\left(\frac{-2D+2}{(D^2-2D+2)^2}\right)e^x$$

aplicando la primera propiedad

$$y_p = 8x\left(\frac{1}{(1)^2-2(1)+2}\right)e^x + 8\left(\frac{-2(1)+2}{((1)^2-2(1)+2)^2}\right)e^x = 8xe^x$$

por lo cual la solución general es

$$\mathbf{y(x) = C_1e^xcos(x) + C_2e^xsen(x) + 8xe^x}$$

Ejemplo 1.16 *Encontrar la solución de la siguiente ecuación diferencial*

$$(D^2+4D+4)y = te^{3t}cos(2t)$$

Solución

`Solución homogénea:`

$$(D^2+4D+4)y = 0$$
$$(D+2)(D+2)y = 0$$
$$D_1 = -2, D_2 = -2$$

donde el conjunto fundamental solución de la ecuación diferencial es:

$$\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$$

por lo que nuestra solución homogénea se presenta como:

$$y_h = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t}$$

`Solución particular:`
Empleando Coeficientes Indeterminados.

$$y_p = Ae^{3t}cos(2t) + Be^{3t}sen(2t) + Cte^{3t}cos(2t) + Ete^{3t}sen(2t)$$

Sustituyendo en:

$$(D^2+4D+4)[Ae^{3t}cos(2t)+Be^{3t}sen(2t)+Cte^{3t}cos(2t)+Ete^{3t}sen(2t)]=te^{3t}cos(2t)]$$

Separando

$(D^2+4D+4)[Ae^{3t}cos(2t)+Be^{3t}sen(2t)]$ y en $(D^2+4D+4)[Cte^{3t}cos(2t)+Ete^{3t}sen(2t)]$

Se tiene

$$(D^2+4D+4)[Ae^{3t}cos(2t)+Be^{3t}sen(2t)]$$

Aplicando la tercera propiedad

$$e^{3t}((D+3)^2+4(D+3)+4)[Acos(2t)+Bsen(2t)]$$
$$e^{3t}(D^2+10D+25)[Acos(2t)+Bsen(2t)]$$

Aplicando segunda propiedad

$$e^{3t}(-(2)^2+10D+25)[Acos(2t)+Bsen(2t)]$$
$$e^{3t}(10D+21)[Acos(2t)+Bsen(2t)]$$
$$\mathbf{e^{3t}}\left[(\mathbf{-20Asen(2t)}+\mathbf{20Bcos(2t)}+\mathbf{21Acos(2t)}+\mathbf{21Bsen(2t)}\right]$$

Por otra parte

$$(D^2+4D+4)[Cte^{3t}cos(2t)+Ete^{3t}sen(2t)]$$

Aplicamos primero tercera propiedad

$$e^{3t}((D+3)^2+4(D+3)+4)[Ctcos(2t)+Etsen(2t)]$$
$$e^{3t}(D^2+10D+25)[Ctcos(2t)+Etsen(2t)]$$

Aplicando cuarta propiedad

$$e^{3t}\left((t+\tfrac{d}{dD})(D^2+10D+25)\right)[Ccos(2t)+Esen(2t)]$$
$$\left[te^{3t}(D^2+10D+25)+e^{3t}(2D+10)\right](Ccos(2t)+Esen(2t))$$

Aplicando segunda propiedad

$$\left[te^{3t}(-(2)^2+10D+25)+e^{3t}(2D+10)\right](Ccos(2t)+Esen(2t))$$
$$\left[te^{3t}(10D+21)+e^{3t}(2D+10)\right](Ccos(2t)+Esen(2t))$$

Desarrollando:

$$\mathbf{te^{3t}\left[-20Csen(2t)+20Ecos(2t)+21Ccos(2t)+21Esen(2t)\right]+}$$
$$\mathbf{e^{3t}\left[-4Csen(2t)+4Ecos(2t)+10Ccos(2t)+10Esen(2t)\right]}$$

Agrupando términos semejantes

$$te^{3t}\left[(21C+20E)cos(2t)+(-20C+21E)sen(2t)\right]$$
$$\text{y}$$
$$e^{3t}\left[(10C+4E)cos(2t)+(-4C+10E)sen(2t)\right]$$

incorporando la expresión antes calculada se forma el sistema

$$\begin{aligned}(21A+20B+10C+4E)e^{3t}cos(2t) &= 0\\(-20A+21B-4C+10E)e^{3t}sen(2t) &= 0\\(21C+20E)te^{3t}cos(2t) &= te^{3t}cos(2t)\\(-20C+21E)te^{3t}sen(2t) &= 0\end{aligned}$$

cuya solución es:

$$A=-\frac{130}{24389}, B=-\frac{284}{24389}, C=\frac{21}{841}, E=\frac{20}{841}$$

sustituyendo estos valores en la solución particular planteada obtenemos:

$$y_p=Ae^{3t}cos(2t)+Be^{3t}sen(2t)+Cte^{3t}cos(2t)+Ete^{3t}sen(2t)$$
$$\mathbf{y_p=-\tfrac{130}{24389}e^{3t}cos(2t)-\tfrac{284}{24389}e^{3t}sen(2t)+\tfrac{21}{841}te^{3t}cos(2t)+\tfrac{20}{841}te^{3t}sen(2t)}$$

`Solución particular:`
Empleando propiedades del Operador Derivada.

$$(D^2+4D+4)y_p=te^{3t}cos(2t)$$
$$y_p=\tfrac{1}{D^2+4D+4}te^{3t}cos(2t)$$

Aplicando la tercera propiedad

$$y_p=\tfrac{1}{D^2+4D+4}te^{3t}cos(2t)$$
$$y_p=e^{3t}\tfrac{1}{(D+3)^2+4(D+3)+4}tcos(2t)$$
$$y_p=e^{3t}\tfrac{1}{D^2+10D+25}tcos(2t)$$

Aplicando la cuarta propiedad

$$y_p = e^{3t}\left[\left(t+\tfrac{d}{dD}\right)\left(\tfrac{1}{D^2+10D+25}\right)\right]cos(2t)$$
$$y_p = e^{3t}\left[t\left(\tfrac{1}{D^2+10D+25}\right)cos(2t) - \tfrac{2D+10}{(D^2+10D+25)^2}cos(2t)\right]$$

Aplicando la segunda propiedad

$$y_p = e^{3t}\left[t\left(\frac{1}{D^2+10D+25}\right)cos(2t) - \frac{2D+10}{(D^2+10D+25)^2}cos(2t)\right]$$

$$y_p = e^{3t}\left[t\left(\tfrac{1}{-4+10D+25}\right)cos(2t) - \tfrac{2D+10}{(-4+10D+25)^2}cos(2t)\right]$$
$$y_p = e^{3t}\left[t\left(\tfrac{1}{10D+21}\right)cos(2t) - \tfrac{2D+10}{(10D+21)^2}cos(2t)\right]$$
$$y_p = e^{3t}\left[t\left(\tfrac{1}{10D+21}\right)cos(2t) - \tfrac{2D+10}{100D^2+420D+441}cos(2t)\right]$$
$$y_p = e^{3t}\left[t\left(\tfrac{1}{10D+21}\right)cos(2t) - \tfrac{2D+10}{100(-4)+420D+441}cos(2t)\right]$$
$$y_p = e^{3t}\left[t\left(\tfrac{1}{10D+21}\right)cos(2t) - \tfrac{2D+10}{420D+41}cos(2t)\right]$$

al multiplicar por $\frac{10D-21}{10D-21}$ y $\frac{420D-41}{420D-41}$

$$y_p = e^{3t}\left[t\left(\frac{10D-21}{100D^2-441}\right)cos(2t) - \left(\frac{840D^2+4118D-410}{176400D^2-1681}\right)cos(2t)\right]$$

Al aplicar segunda propiedad

$$y_p = e^{3t}\left[t\left(\frac{10D-21}{-841}\right)cos(2t) - \left(\frac{4118D-3770}{-707281}\right)cos(2t)\right]$$

Desarrollando

$$y_p = te^{3t}\left(\frac{20}{841}sen(2t)+\frac{21}{841}cos(2t)\right) - e^{3t}\left(\frac{8236}{707281}sen(2t)+\frac{3770}{707281}\right)cos(2t)$$

Agrupando y simplificando

$$y_p = e^{3t}\left[\left(\frac{21}{841}t - \frac{130}{24389}\right)cos(2t) + \left(\frac{20}{841}t - \frac{284}{24389}\right)sen(2t)\right]$$

Otra manera de atacar este problema es:

Aplicando la cuarta propiedad

$$y_p = \frac{1}{D^2+4D+4} te^{3t} cos(2t)$$
$$y_p = \left(t + \frac{d}{dD}\right)\left[\frac{1}{D^2+4D+4}\right] e^{3t} cos(2t)$$
$$y_p = t\left(\frac{1}{D^2+4D+4}\right) e^{3t} cos(2t) - \left(\frac{2D+4}{(D^2+4D+4)^2}\right) e^{3t} cos(2t)$$

Aplicando la tercera propiedad

$$y_p = te^{3t}\left(\frac{1}{(D+3)^2+4(D+3)+4}\right) cos(2t) - e^{3t}\left(\frac{2(D+3)+4}{((D+3)^2+4(D+3)+4)^2}\right) cos(2t)$$
$$y_p = te^{3t}\left(\frac{1}{D^2+10D+25}\right) cos(2t) - e^{3t}\left(\frac{2D+10}{(D^2+10D+25)^2}\right) cos(2t)$$

Aplicando la segunda propiedad

$$y_p = te^{3t}\left(\frac{1}{10D+21}\right) cos(2t) - e^{3t}\left(\frac{2D+10}{(10D+21)^2}\right) cos(2t)$$
$$y_p = te^{3t}\left(\frac{1}{10D+21}\right) cos(2t) - e^{3t}\left(\frac{2D+10}{420D+41}\right) cos(2t)$$

al multiplicar por $\frac{10D-21}{10D-21}$ y $\frac{420D-41}{420D-41}$

$$y_p = te^{3t}\left(\frac{10D-21}{100D^2-441}\right) cos(2t) - e^{3t}\left(\frac{840D^2+4118D-410}{176400D^2-1681}\right) cos(2t)$$

Al aplicar segunda propiedad

$$y_p = te^{3t}\left(\frac{10D-21}{-841}\right) cos(2t) - e^{3t}\left(\frac{4118D-3770}{-707281}\right) cos(2t)$$

Desarrollando

$$y_p = te^{3t}\left(\frac{20}{841} sen(2t) + \frac{21}{841} cos(2t)\right) - e^{3t}\left(\frac{8236}{707281} sen(2t) + \frac{3770}{707281}\right) cos(2t)$$

Agrupando y simplificando

$$y_p = e^{3t}\left[\left(\frac{21}{841}t - \frac{130}{24389}\right) cos(2t) + \left(\frac{20}{841}t - \frac{284}{24389}\right) sen(2t)\right]$$

por lo que la solución general es:

$$\mathbf{y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t} + e^{3t}\left[\left(\frac{21}{841}t - \frac{130}{24389}\right) cos(2t) + \left(\frac{20}{841}t - \frac{284}{24389}\right) sen(2t)\right]}$$

Nota: ***La aplicación de la cuarta propiedad en operadores inversos solo es aplicable cuando no existe repetición de raíces entre la solución homogénea y el término independiente, yá que esto implica la derivación de $\frac{1}{0}$.***

Como las derivadas de mayor orden del operador inverso,resultan más difíciles de obtener cuando en $x^n u(x)$, n aumenta de valor $(n > 1)$; es preferible recurrir al siguiente artificio. Si tuviéramos que obtener:

$$y_p = \left[\frac{1}{D^2 - 2D + 2}\right] x^2$$

La operación es realmente una integral, pero podemos convertirla en una derivación si recordamos que $\frac{d^2}{dx^2}(x^2) = 2$ y que además $\frac{d^3}{dx^3}(x^2) = 0$ de modo que $\frac{1}{D^2-2D+2}$ se puede expresar como una serie infinita de términos en D; en donde el último término que nos interesa es el de orden igual al grado del polinomio en x, es decir:

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2} + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \dots \\
\hline
\underbrace{2 - 2D + D^2}_{\text{En forma ascendente}} & 1 \\
 & -1 + D - \frac{D^2}{2} \\
 & \quad -D + D^2 - \frac{D^3}{2} \\
 & \qquad -\frac{D^2}{2} - \frac{D^3}{2} - \frac{D^4}{4}
\end{array}$$

por lo que:

$$y_p = \left[\frac{1}{D^2 - 2D + 2}\right] x^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \dots\right) x^2$$

recordando que;$D = \frac{d}{dx}$, entonces:

$$D(x^2) = 2x$$
$$D^2(x^2) = 2$$
$$D^3(x^2) = 0$$

tenemos:

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

Tomando en cuenta, esto último, la solución particular del ejemplo anterior también se puede obtener como:

$$y_p = \left[\frac{1}{D^2 - 2D + 2}\right] 8xe^x$$

factorizando el denominador

$$y_p = \left[\frac{1}{D^2 - 2D + 2}\right] 8xe^x = \left[\frac{1}{(D-1)^2 + 1}\right] 8xe^x$$

anteponiendo $8e^x$

$$y_p = 8e^x \left[\frac{1}{[(D+1)-1]^2 + 1}\right] x = 8e^x \left[\frac{1}{D^2 + 1}\right] x$$

Como $D^2(x) = 0$ y D^2 aparece en el denominador del operador, esté término se puede omitir por lo que

$$\left[\frac{1}{D^2 + 1}\right] x = \left[\frac{1}{0 + 1}\right] x = x$$

es decir:

$$y_p = 8e^x \left[\frac{1}{D^2 + 1}\right] x = 8xe^x$$

Otros ejemplos del caso anterior

- $$y_p = \left(\frac{1}{D^2 + 8}\right) 20 = \frac{20}{8}$$
- $$y_p = \left(\frac{1}{D + 2}\right) 10 = \frac{10}{2} = 5$$
- $$y_p = \left(\frac{1}{D^3 + 8D^2 + 2D - 1}\right) 15 = \frac{15}{-1} = -15$$
- $$y_p = \left(\frac{1}{D^3 - 2D^2 + D - 1}\right) x$$

$$\begin{array}{r|l} & -1 - D + \cdots \\ \hline -1 + D & 1 \\ & -1 + D \end{array}$$

$$y_p = (-1 - D)x = -x - 1$$

También es conveniente tomar en cuenta que:

$$D(y) = \frac{d}{dx} y = Q(x)$$

separando en dos igualdades:

$$\frac{d}{dx}y = Q(x) \Rightarrow \; dy = Q(x)dx \text{ por tanto } y = \int Q(x)dx$$
$$D(y) = Q(x) \text{ entonces } y = \left[\frac{1}{D}\right] Q(x) = \int Q(x)dx$$

Del mismo modo:
$$\left[\frac{1}{D^2}\right] Q(x) = \int \left[\int Q(x)dx\right] dx$$

Antes de hacer otro ejemplo veamos los casos de raíces complejas repetidas en el polinomio característico y en el término independiente de una ecuación diferencial.
Realicemos las siguientes observaciones:

$$D(sen(2x)) = \frac{d}{dx}(sen(2x)) = 2cos(2x)$$

Si consideramos a

$$e^{2xi} = \overbrace{cos2x}^{\text{Real}} + i\overbrace{sen(2x)}^{\text{Imaginaria}}$$

Observamos que $sen(2x)$ aparece como coeficiente de i en la forma compleja de e^{2xi}.

Procedamos a derivar ésta exponencial:

$$D(e^{2xi}) = 2ie^{2xi} = 2i(cos(2x) + isen(2x)) = \mathbf{-2sen(2x) + i(2cos(2x))}$$

De acuerdo a lo anterior:
$\frac{d}{dx}(sen(2x))$ corresponde al coeficiente de i en la derivada con respecto a x de e^{2xi} en forma compleja.
Igualmente:
$\frac{d}{dx}(cos(2x))$ corresponde a la parte real de la derivada respecto a x de e^{2xi} en forma compleja.

Esta propiedad se puede aplicar para obtener la solución particular de una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes con raíces complejas repetidas, como a continuación se ejemplifica:

Ejemplo 1.17 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$y^{''} + 9y = 3sen(3x)$$

SOLUCIÓN

`Solución homogénea:`

$$(D^2 + 9)y = 0$$
$$D_1 = 3i\,,\ D_2 = -3i$$

cuyo conjunto solución es:

$$\{cos(3x), sen(3x)\}$$

por lo que la solución se presenta como:

$$y_h = C_1 cos(3x) + C_2 sen(3x)$$

Inmediatamente podemos observar por $\mathbf{Q(x) = 3sen(3x)}$, que se tienen raíces complejas repetidas en toda la ecuación diferencial.

`Solución particular:`

$$y_p = \left[\frac{1}{D^2 + 9}\right] 3sen(3x)$$

Si aplicamos la segunda propiedad, el denominador se anula ya que $D^2 = -9$ y esto confirma la repetición de raíces.
Consideremos que $\mathbf{Q(x) = 3e^{3ix}}$ en lugar de $\mathbf{Q(x) = 3sen(3x)}$, en cuyo caso tendremos una solución particular compleja que designaremos como $\overline{y}_p$; es decir:

$$\overline{y}_p = \left[\frac{1}{D^2 + 9}\right] 3e^{3ix}$$

Aplicando la tercera propiedad se tiene:

$$\overline{y}_p = e^{3ix}\left[\frac{1}{(D+3i)^2+9}\right](3) = e^{3ix}\left[\frac{1}{D^2+6Di-9+9}\right](3)$$
$$\overline{y}_p = e^{3ix}\left[\frac{1}{D^2+6Di}\right](3) = e^{3ix}\left[\left(\frac{1}{D}\right)\frac{1}{D+6i}\right](3)$$
$$\overline{y}_p = e^{3ix}\left(\frac{1}{D}\right)\left(\frac{3}{6i}\right) = e^{3ix}\left(\frac{1}{D}\right)\left(-\frac{i}{2}\right) = -\frac{i}{2}xe^{3ix}$$
$$\overline{y}_p = -\frac{i}{2}x(cos(3x) + isen(3x)) = \frac{1}{2}xsen(3x) + i\left[-\frac{1}{2}xcos(3x)\right]$$

Como $\mathbf{Q(x) = sen(3x)}$ y el seno corresponde al coeficiente de i de $\mathbf{e^{3xi}}$ en forma compleja,tenemos que:

$$y_p = -\frac{1}{2}xcos(3x)$$

por lo que la solución general buscada es

$$\mathbf{y(x) = C_1cos(3x) + C_2sen(3x) - \frac{1}{2}xcos(3x)}$$

Ejemplo 1.18 *Obtener la solución particular de*

$$(D^2 + 4D + 4)y = te^{3t}cos(2t)$$

Empleando la sustitución $e^{\theta i}$ para la función trigonométrica y aplicar la tercera propiedad esto es:

$$\begin{gathered}
y_p = \tfrac{1}{D^2+4D+4}te^{3t}cos(2t)\\
y_p = \tfrac{1}{D^2+4D+4}te^{3t}e^{2it}\\
\overline{y_p} = \tfrac{1}{D^2+4D+4}te^{(3+2i)t}\\
\overline{y_p} = e^{(3+2i)t}\tfrac{1}{(D+3+2i)^2+4(D+3+2i)+4}t\\
\overline{y_p} = e^{(3+2i)t}\tfrac{1}{D^2+(10+4i)D+(21+20i)}t
\end{gathered}$$

Recordemos

$$\begin{array}{r|l}
 & \tfrac{1}{21+20i} - \tfrac{10+4i}{(21+20i)^2}D + \dots \\ \hline
(21+20i) + (10+4i)D + D^2 & 1 \\
 & -1 - \tfrac{10+4i}{21+20i}D - \tfrac{1}{21+20i}D^2 \\
 & \quad \tfrac{10+4i}{21+20i}D + \tfrac{(10+4i)^2}{(21+20i)^2}D^2 + \tfrac{10+4i}{(21+20i)^2}D^3
\end{array}$$

entonces

$$\begin{gathered}
\overline{y_p} = e^{(3+2i)t}\tfrac{1}{D^2+(10+4i)D+(21+20i)}t\\
\overline{y_p} = e^{(3+2i)t}[\tfrac{1}{21+20i} - \tfrac{10+4i}{(21+20i)^2}D]t\\
\overline{y_p} = e^{(3+2i)t}[(\tfrac{21}{841} - \tfrac{20}{841}i) - (\tfrac{130}{24389} - \tfrac{284}{24389}i)D]t\\
\overline{y_p} = e^{(3+2i)t}[(\tfrac{21}{841}t - \tfrac{130}{24389}) + (-\tfrac{20}{841}t + \tfrac{284}{24389})i]\\
\overline{y_p} = e^{3t}[(\tfrac{21}{841}t - \tfrac{130}{24389}) + (-\tfrac{20}{841}t + \tfrac{284}{24389})i](cos(2t) + isen(2t))
\end{gathered}$$

Ya que la solución del problema involucra a la función $cos(2t)$ tomaremos la parte real del producto de la expresión anterior, esto es:

$$y_p = e^{3t}\left[\left(\frac{21}{841}t - \frac{130}{24389}\right)cos(2t) + \left(\frac{20}{841}t - \frac{284}{24389}\right)sen(2t)\right]$$

Nótese que el ejemplo anterior se puede resolver de diferentes maneras, lo cual permite al lector libertad en la elección del método de solución. Ver **ejemplo 1.16**

A continuación se presentan dos ejemplos, en los cuales se puede observar la versatilidad de la aplicación de las propiedades del operador derivada.

Ejemplo 1.19 *Obtener:*

$$\frac{d^3}{dx^3}x^{-\frac{1}{2}x}In(x)$$

Solución

$$\frac{d^3}{dx^3}x^{-\frac{1}{2}x}In(x) = x^{-\frac{1}{2}x}In(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD}\right)^{-\frac{1}{2}} D^3\right] In(x)$$

Como la máxima derivada es de tercer orden, desarrollamos conforme al **binomio de Newton** hasta el cuarto término $\left(x + \frac{d}{dD}\right)^{-\frac{1}{2}}$; es decir:

$$\left[\left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\frac{d}{dD} + \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\frac{d^2}{dD^2} - \frac{5}{16}x^{-\frac{7}{2}}\frac{d^3}{dD^3} + \ldots\right) D^3\right] In(x)$$

Sustituyendo a la expresión anterior

$$\frac{d^3}{dD^3}x^{-\frac{1}{2}}In(x) = x^{-\frac{1}{2}}(D^3)In(x) - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(3D^2)In(x) + \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}(6D)In(x) - \frac{5}{16}x^{-\frac{7}{2}}(6)In(x)$$

$$D(In(x)) = \frac{1}{x}$$

$$D^2(In(x)) = -\frac{1}{x^2}$$

$$D^3(In(x)) = \frac{2}{x^3}$$

Sustituyendo estas tres expresiones en:

$$\left[\left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}3D^2 + \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}6D - \frac{5}{16}x^{-\frac{7}{2}}6\right)\right] In(x)$$

se tendrá:

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}x^{-\frac{1}{2}x}In(x) &= x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x^3}\right) - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(3)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{6}}(6)\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}}In(x) \\
&= 2x^{-\frac{7}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{7}{2}} + \frac{9}{4}x^{-\frac{7}{2}} - \frac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}}In(x) \\
&= \mathbf{\frac{23}{4}x^{-\frac{7}{2}} - \frac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}}In(x)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.20 *Obtener*

$$\int te^{3t}cos(4t)\,dt$$

Solución

Empleando Integración por Partes

$$\int te^{3t}cos(4t)\,dt$$

$$u = t\,,\ dv = e^{3t}cos(4t)dt$$
$$du = dt\,,\ v = \int e^{3t}cos(4t)dt$$

$$\int e^{3t}cos(4t)dt$$
$$u = cos(4t)\,,\ dv = e^{3t}dt$$
$$du = -4sen(4t)\,,\ v = \tfrac{1}{3}e^{3t}$$
$$\int e^{3t}cos(4t)dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}cos(4t) + \tfrac{4}{3}\int e^{3t}sen(4t)dt$$

$$\int e^{3t}sen(4t)dt$$
$$u = sen(4t)\,,\ dv = e^{3t}dt$$
$$du = 4cos(4t)dt\,,\ v = \tfrac{1}{3}e^{3t}$$
$$\int e^{3t}sen(4t)dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}sen(4t) - \tfrac{4}{3}\int e^{3t}cos(4t)dt$$

Donde

$$\int e^{3t}cos(4t)dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}cos(4t) + \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{3}e^{3t}sen(4t) - \tfrac{4}{3}\int e^{3t}cos(4t)dt\right)$$
$$\left(1+\tfrac{16}{9}\right)\int e^{3t}cos(4t)dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}cos(4t) + \tfrac{4}{9}e^{3t}sen(4t)$$
$$\left(\tfrac{25}{9}\right)\int e^{3t}cos(4t)dt = \tfrac{1}{3}e^{3t}cos(4t) + \tfrac{4}{9}e^{3t}sen(4t)$$
$$\int e^{3t}cos(4t)dt = \frac{3}{25}e^{3t}cos(4t) + \frac{4}{25}e^{3t}sen(4t)$$

Del mismo modo

$$\int e^{3t}sen(4t)dt = -\frac{4}{25}e^{3t}cos(4t) + \frac{3}{25}e^{3t}sen(4t)$$

Entonces

$$\int te^{3t}cos(4t)\,dt = t\left(\frac{3}{25}e^{3t}cos(4t) + \frac{4}{25}e^{3t}sen(4t)\right) - \int\left(\frac{3}{25}e^{3t}cos(4t) + \frac{4}{25}e^{3t}sen(4t)\right)dt$$

Desarrollando

$$\tfrac{3}{25}\int e^{3t}cos(4t)dt = \tfrac{9}{625}e^{3t}cos(4t) + \tfrac{12}{625}e^{3t}sen(4t)$$
$$\tfrac{4}{25}\int e^{3t}sen(4t)dt = -\tfrac{16}{25}e^{3t}cos(4t) + \tfrac{12}{625}e^{3t}sen(4t)$$

Agrupando y simplificando

$$\int te^{3t}cos(4t)\,dt = \frac{3}{25}te^{3t}cos(4t) + \frac{4}{25}te^{3t}sen(4t) + \frac{7}{625}e^{3t}cos(4t) - \frac{24}{625}e^{3t}sen(4t)$$

Empleando propiedades del Operador Derivada

a)

$$\int te^{3t}cos(4t)\,dt = \frac{1}{D}te^{3t}cos(4t)$$

Aplicando la cuarta propiedad

$$\left[t + \tfrac{d}{dD}\right]\left(\tfrac{1}{D}\right)e^{3t}cos(4t)$$
$$t\left(\tfrac{1}{D}\right)e^{3t}cos(4t) - \left(\tfrac{1}{D^2}\right)e^{3t}cos(4t)$$

Aplicando la tercera propiedad

$$te^{3t}\left(\tfrac{1}{D+3}\right)cos(4t) - e^{3t}\left(\tfrac{1}{(D+3)^2}\right)cos(4t)$$
$$te^{3t}\left(\tfrac{1}{D+3}\right)cos(4t) - e^{3t}\left(\tfrac{1}{D^2+6D+9}\right)cos(4t)$$

Aplicando la segunda propiedad

$$te^{3t}\left(\tfrac{1}{D+3}\right)cos(4t) - e^{3t}\left(\tfrac{1}{D^2+6D+9}\right)cos(4t)$$
$$te^{3t}\left(\tfrac{1}{D+3}\left(\tfrac{D-3}{D-3}\right)\right)cos(4t) - e^{3t}\left(\tfrac{1}{-16+6D+9}\right)cos(4t)$$
$$te^{3t}\left(\tfrac{1}{D+3}\left(\tfrac{D-3}{D-3}\right)\right)cos(4t) - e^{3t}\left(\tfrac{1}{6D-7}\left(\tfrac{6D+7}{6D+7}\right)\right)cos(4t)$$
$$te^{3t}\left(\tfrac{D-3}{D^2-9}\right)cos(4t) - e^{3t}\left(\tfrac{6D+7}{36D^2-49}\right)cos(4t)$$
$$te^{3t}\left(\tfrac{D-3}{-16-9}\right)cos(4t) - e^{3t}\left(\tfrac{6D+7}{36(-16)-49}\right)cos(4t)$$
$$te^{3t}\tfrac{D-3}{-25}cos(4t) - e^{3t}\tfrac{6D+7}{-625}cos(4t)$$
$$te^{3t}\left(\tfrac{4}{25}sen(4t) + \tfrac{3}{25}cos(4t)\right) - e^{3t}\left(\tfrac{24}{625}sen(4t) - \tfrac{7}{625}cos(4t)\right)$$

Al agrupar y simplificar

$$\int te^{3t}cos(4t)\,dt = \frac{3}{25}te^{3t}cos(4t) + \frac{4}{25}te^{3t}sen(4t) + \frac{7}{625}e^{3t}cos(4t) - \frac{24}{625}e^{3t}sen(4t)$$

b)

Empleando la sustitución $e^{4ti} = cos(4t) + isen(4t)$ se tiene

$$\int te^{3t}cos(4t)\,dt = \frac{1}{D}te^{(3+4i)t}$$

Aplicando la tercera propiedad

$$\frac{1}{D}te^{(3+4i)t}$$
$$e^{(3+4i)t}\frac{1}{D+3+4i}t$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{3+4i} - \frac{1}{(3+4i)^2}D + \ldots \\ \hline (3+4i)+D & 1 \\ & -1 - \frac{1}{3+4i}D \\ & \quad \frac{1}{3+4i}D + \frac{1}{(3+4i)^2}D^2 \end{array}$$

Aplicando álgebra compleja se llega

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{25}$$
$$\frac{1}{(3+4i)^2} = \frac{-7-24i}{625}$$

Por lo que la expresión

$$e^{(3+4i)t}\frac{1}{D+3+4i}t$$

es ahora expresada como

$$e^{(3+4i)t}\left[\frac{3-4i}{25} + \frac{7+24i}{625}D\right]t$$
$$e^{(3+4i)t}\left[\frac{3-4i}{25}t + \frac{7+24i}{625}\right]$$
$$e^{3t}\left[\frac{3-4i}{25}t + \frac{7+24i}{625}\right](cos(4t) + isen(4t))$$

Recordemos que en nuestra expresión existe un término **coseno**, por lo cual solo tomaremos los elementos reales del producto de la expresión anterior, esto es:

$$e^{3t}\left[\frac{3}{25}tcos(4t) + \frac{4}{25}tsen(4t) + \frac{7}{625}cos(4t) - \frac{24}{625}sen(4t)\right]$$

Por tanto

$$\int te^{3t}cos(4t)\,dt = \frac{3}{25}te^{3t}cos(4t) + \frac{4}{25}te^{3t}sen(4t) + \frac{7}{625}e^{3t}cos(4t) - \frac{24}{625}e^{3t}sen(4t)$$

1.5. *Ejercicios Resueltos*

1. Resolver la ecuación diferencial

$$y^{''} + 16y = e^{3x}$$

`Solución homogénea:`

Aplicando operador diferencial

$$(D^2+16)y=0$$
$$D_1=4i, D_2=-4i$$

cuyo conjunto fundamental de solución es:

$$\{cos(4x), sen(4x)\}$$

por lo cual la solución homogénea se plantea como:

$$y_h=C_1cos(4x)+C_2sen(4x)$$

`Solución particular:`

$$(D^2+16)y_p=e^{3x}$$
$$y_p=\left[\tfrac{1}{D^2+16}\right]e^{3x}$$

Aplicando la primera propiedad

$$y_p=\left[\frac{1}{D^2+16}\right]e^{3x}=\left[\frac{1}{(3)^2+16}\right]e^{3x}=\frac{1}{25}e^{3x}$$

por lo cual la solución general de la ecuación es:

$$\mathbf{y(x)=C_1cos(4x)+C_2sen(4x)+\frac{1}{25}e^{3x}}$$

2. Resolver

$$y''+y'+\frac{1}{4}y=3xe^x$$

`Solución homogénea:`

aplicando el polinomio diferencial se tiene

$$(D^2+D+\tfrac{1}{4})y=0$$
$$\left[(D+\tfrac{1}{2})(D+\tfrac{1}{2})\right]y=0$$
$$D_1=-\tfrac{1}{2}, D_2=-\tfrac{1}{2}$$

por lo cual la solución homogénea es:

$$y_h = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

Solución particular:

$$(D^2 + D + \tfrac{1}{4})y_p = 3xe^x$$
$$y_p = \left[\frac{1}{D^2+D+\frac{1}{4}}\right] 3xe^x$$

aplicando la tercera propiedad

$$y_p = 3e^x \left[\frac{1}{(D+1)^2+(D+1)+\frac{1}{4}}\right] x$$
$$y_p = 3e^x \left[\frac{1}{(D^2+2D+1)+(D+1)+\frac{1}{4}}\right] x$$
$$y_p = 3e^x \left[\frac{1}{3D+\frac{9}{4}}\right] x$$

Como $D^2(x) = 0$ en el denominador D^2 no se toma en cuenta, es decir:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{4}{9} - \frac{16}{27}D + \cdots \\ \hline \frac{9}{4} + 3D & 1 \\ & -1 - \frac{4}{3}D \\ & \quad \frac{4}{3}D \end{array}$$

$$y_p = 3e^x \left[\tfrac{4}{9} - \tfrac{16}{27}D\right] x$$
$$y_p = \tfrac{4}{3}xe^x - \tfrac{16}{9}e^x$$

por lo que la solución general es:

$$\mathbf{y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{4}{3}xe^x - \frac{16}{9}e^x}$$

3. Resolver

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$$

Solución homogénea:
aplicando el polinomio diferencial se tiene

$$(D^2 + 6D + 9)y = 0$$
$$[(D+3)(D+3)]\, y = 0$$
$$D_1 = -3, D_2 = -3$$

cuyo conjunto fundamental solución es:

$$\{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$$

por lo que plantearemos la solución homogénea como:

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

`Solución particular:`

$$(D^2 + 6D + 9)y_p = e^{-3x}$$
$$y_p = \left[\frac{1}{D^2+6D+9}\right] e^{-3x}$$

Nota: ***Obsérvese que si aplica uno la primera propiedad se encontrara con una indeterminación ya que el resultado del polinomio es cero, lo que nos indica que existe repetición de raíces.***

Para poder resolver dicho problema aplicaremos la tercera propiedad

$$y_p = e^{-3x}\left[\frac{1}{(D-3)^2+6(D-3)+9}\right](1)$$
$$y_p = e^{-3x}\left[\frac{1}{(D^2-6D+9)+6(D-3)+9}\right](1)$$
$$y_p = e^{-3x}\left[\frac{1}{D^2}\right](1)$$
$$y_p = e^{-3x}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$
$$y_p = \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}$$

Otra forma

$$y_p = \left[\frac{1}{D^2+6D+9}\right] e^{-3x}$$
$$y_p = \left[\frac{1}{(D+3)^2}\right] e^{-3x}$$
$$y_p = e^{-3x}\left[\frac{1}{(D+3-3)^2}\right]$$
$$y_p = e^{-3x}\left[\frac{1}{D^2}\right](1)$$
$$y_p = e^{-3x}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$
$$y_p = \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}$$

por lo que la solución general es:

$$\mathbf{y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-3x}}$$

4. Dada la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - y' - 6y = 2sen(3x)$$

Obtener su solución general.

`Solución homogénea:`

Aplicando el concepto de polinomio diferencial se tiene

$$(D^2 - D - 6)y = 0$$

$$(D-3)(D+2)y = 0$$
$$D_1 = 3, D_2 = -2$$

cuyo conjunto fundamental de solución es

$$\{e^{3x}, e^{-2x}\}$$

por lo que la solución homogénea se plantea como:

$$y_h = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$$

`Solución particular:`

$$(D^2 - D - 6)y_p = 2sen(3x)$$
$$y_p = 2\left[\frac{1}{D^2-D-6}\right] sen(3x)$$

Aplicando la segunda propiedad

$$y_p = 2\left[\frac{1}{(-9)-D-6}\right] sen(3x)$$
$$y_p = -2\left[\frac{1}{D+15}\right] sen(3x)$$

multiplicando por $\frac{D-15}{D-15}$

$$y_p = -2\left[\left(\frac{1}{D+15}\right)\left(\frac{D-15}{D-15}\right)\right] sen(3x)$$
$$y_p = -2\left[\frac{D-15}{D^2-225}\right] sen(3x)$$

aplicando la segunda propiedad

$$y_p = -2\left[\tfrac{D-15}{(-9)-225}\right] sen(3x)$$
$$y_p = \tfrac{2}{234}(D-15)sen(3x) = \tfrac{1}{117}(D-15)sen(3x)$$
$$y_p = \tfrac{1}{117}\left[[D(sen(3x)] - 15sen(3x)\right]$$
$$y_p = \tfrac{3}{117}cos(3x) - \tfrac{15}{117}sen(3x)$$
$$y_p = \tfrac{1}{39}cos(3x) - \tfrac{5}{39}sen(3x)$$

por lo que la solución general es:

$$\mathbf{y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{39}cos(3x) - \frac{5}{39}sen(3x)}$$

5. Resolver

$$\left(D^2 + D + 1\right) y = cos(2x)$$

`Solución homogénea:`

$$(D^2 + D + 1)y = 0$$

al resolver por fórmula general se tiene

$$D_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, D_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

por lo que el conjunto fundamental de solución es:

$$\left\{e^{-\frac{1}{2}x}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{-\frac{1}{2}x}sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

donde la solución homogénea será:

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

`Solución particular:`

$$(D^2 + D + 1)y_p = cos(2x)$$
$$y_p = \left[\tfrac{1}{D^2+D+1}\right] cos(2x)$$

aplicando la segunda propiedad

$$y_p = \left[\frac{1}{(-4)+D+1}\right] cos(2x)$$
$$y_p = \left[\frac{1}{D-3}\right] cos(2x)$$

multiplicando por $\frac{D+3}{D+3}$

$$y_p = \left[\left(\frac{1}{D-3}\right)\left(\frac{D+3}{D+3}\right)\right] cos(2x)$$
$$y_p = \left[\frac{D+3}{D^2-9}\right] cos(2x)$$
$$y_p = \left[\frac{D+3}{-13}\right] cos(2x)$$
$$y_p = -\frac{1}{13}\left[D(cos(2x)) + 3cos(2x)\right]$$

$$y_p = -\frac{1}{13}(-2sen(2x) + 3cos(2x))$$
$$y_p = \frac{2}{13}sen(2x) - \frac{3}{13}cos(2x)$$

por lo que la solución es:

$$\mathbf{y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_1 cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] + \frac{2}{13}sen(2x) - \frac{3}{13}cos(2x)}$$

6. Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$\left(D^2 + 9\right) y = 3sen(3x)$$

`Solución homogénea:`
Empleando el concepto de polinomio diferencial

$$(D^2 + 9)y = 0$$
$$D_1 = 3i, D_2 = -3i$$

cuyo conjunto fundamental es

$$\{cos(3x), sen(3x)\}$$

por lo que plantearemos la solución homogénea como:

$$y_h = C_1 cos(3x) + C_2 sen(3x)$$

`Solución particular:`

$$(D^2+9)y_p = 3sen(3x)$$
$$y_p = \left[\frac{1}{D^2+9}\right]3sen(3x)$$

si aplicamos la segunda propiedad

$$y_p = \left[\frac{1}{-9+9}\right]3sen(3x)$$
$$y_p = \left[\frac{1}{0}\right]3sen(3x)$$

en éste caso el denominador se anula, lo cual indica que existe repetición de raíces tanto en la solución homogénea como en la solución particular.
Para resolver éste inconveniente expresaremos a la función $\mathbf{sen(3x)}$ como $\mathbf{e^{3xi}}$.
En éstas condiciones nuestra y_p se considera como una y_p compleja la cual podemos expresar como $\overline{y_p}$

$$\overline{y_p} = \left[\frac{1}{D^2+9}\right]3e^{(3i)x}$$

anteponiendo la exponencial(tercera propiedad)

$$\overline{y_p} = e^{(3i)x}\left[\frac{1}{(D+3i)^2+9}\right]3$$
$$\overline{y_p} = e^{(3i)x}\left[\frac{1}{D^2+6Di-9+9}\right]3$$
$$\overline{y_p} = e^{(3i)x}\left[\frac{1}{D^2+6Di}\right]3$$
$$\overline{y_p} = e^{(3i)x}\left[\frac{1}{D(D+6i)}\right]3$$
$$\overline{y_p} = e^{(3i)x}\left[\frac{1}{D}\right]\left[\frac{1}{D+6i}\right]3$$
$$\overline{y_p} = e^{(3i)x}\left[\frac{1}{D}\right]\left(\frac{3}{6i}\right)$$

recordemos

$$\left(\frac{3}{6i}\right) = \frac{3cis(0°)}{6cis(90°)} = \frac{3}{6}cis(270°) = -\frac{1}{2}i$$

sustituyendo en la expresión anterior

$$\overline{y_p} = e^{(3i)x}\left[\frac{1}{D}\right]\left(-\frac{1}{2}i\right)$$

y como se mencionó antes, el operador $\frac{1}{D}$ representa un proceso de integración

$$\overline{y_p} = e^{(3i)x}\left(-\frac{x}{2}i\right)$$

por lo que nos queda:

$$\overline{y_p} = e^{(3i)x}\left(-\tfrac{x}{2}i\right) = \left(-\tfrac{x}{2}i\right)[cos(3x) + isen(3x)]$$
$$\overline{y_p} = -\tfrac{1}{2}xcos(3x)i + \tfrac{1}{2}xsen(3x)$$

como $sen(3x)$ corresponde a la parte imaginaria de la fórmula de Euler, implica que:

$$y_p = -\frac{1}{2}xcos(3x)$$

por lo que la solución general es:

$$\mathbf{y(x) = C_1cos(3x) + C_2sen(3x) - \frac{1}{2}xcos(3x)}$$

7. Resolver

$$\left(D^2+1\right)y = 4tcos(t)$$

`Solución homogénea:`

$$(D^2+1)y = 0$$
$$D_1 = i, D_2 = -i$$

cuyo conjunto solución es:

$$\{cos(t), sen(t)\}$$

por lo que plantearemos la solución homogénea como:

$$y_h = C_1cos(t) + C_2sen(t)$$

`Solución particular:`

$$(D^2+1)y_p = 4tcos(t)$$
$$y_p = \left[\tfrac{1}{D^2+1}\right]4tcos(t)$$

Obsérvese que se presenta repetición de raíces entre la solución homogénea y la solución particular por lo que sustituiremos la expresión:$\mathbf{cos(t)}$ por $\mathbf{e^{ti}}$, y aplicaremos la tercera propiedad, esto es:

$$\overline{y_p} = \left[\tfrac{1}{D^2+1}\right]4te^{ti}$$
$$\overline{y_p} = 4e^{ti}\left[\tfrac{1}{(D+i)^2+1}\right]t$$
$$\overline{y_p} = 4e^{ti}\left[\tfrac{1}{D^2+2Di-1+1}\right]t$$

$$\overline{y_p} = 4e^{ti}\left[\frac{1}{D^2+2Di-1+1}\right]t$$
$$\overline{y_p} = 4e^{ti}\left[\frac{1}{D^2+2Di}\right]t$$
$$\overline{y_p} = 4e^{ti}\left[\frac{1}{D}\right]\left[\frac{1}{D+2i}\right]t$$

Recordemos:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2i} - \frac{D}{4i^2} + \dots \\ \hline 2i + D & \ 1 \\ & -1 - \frac{D}{2i} \\ & \qquad \frac{D}{2i} + \frac{D^2}{4i^2} \end{array}$$

Realizando las operaciones pertinentes con complejos:

$$\overline{y_p} = 4e^{ti}\left[\frac{1}{D}\right]\left(-\frac{i}{2} + \frac{D}{4}\right)t$$
$$\overline{y_p} = 4e^{ti}\left[\frac{1}{D}\right]\left(-\frac{it}{2} + \frac{D(t)}{4}\right)$$
$$\overline{y_p} = 4e^{ti}\left[\frac{1}{D}\right]\left(-\frac{it}{2} + \frac{1}{4}\right)$$
$$\overline{y_p} = 4e^{ti}\left(-\frac{it^2}{4} + \frac{t}{4}\right)$$
$$\overline{y_p} = e^{ti}\left(-it^2 + t\right)$$
$$\overline{y_p} = \left(cos(t) + isen(t)\right)\left(-it^2 + t\right)$$
$$\overline{y_p} = \left(tcos(t) + t^2 sen(t)\right) + \left(-t^2 cos(t) + tsen(t)\right)i$$

como $\mathbf{Q(t) = 4tcos(t)}$ contiene al término $cos(t)$ entonces nuestra y_p correspondera a la parte real de la expresión anterior

$$y_p = tcos(t) + t^2 sen(t)$$

Por lo que la solución general buscada es:

$$\mathbf{y(t) = C_1 cos(t) + C_2 sen(t) + tcos(t) + t^2 sen(t)}$$

Comprobación:

$$\left[D^2 + 1\right]\left(tcos(t) + t^2 sen(t)\right) = 4tcos(t)$$
$$\left[t + \frac{d}{dD}\right](D^2+1)cos(t) + \left[t + \frac{d}{dD}\right]^2 (D^2+1)sen(t) = 4tcos(t)$$
$$t(D^2+1)cos(t) + \frac{d}{dD}(D^2+1)cos(t) + t^2(D^2+1)sen(t) + 2t\frac{d}{dD}(D^2+1)sen(t) +$$
$$\frac{d^2}{dD^2}(D^2+1)sen(t) = 4tcos(t)$$

$$t(-1+1)cos(t) + 2D(cos(t)) + t^2(-1+1)sen(t) + 2t(2D)sen(t) + 2sen(t) = 4tcos(t)$$
$$t(0)cos(t) - 2sen(t) + t^2(0)sen(t) + 4tcos(t) + 2sen(t) = 4tcos(t)$$
$$\mathbf{4tcos(t) = 4tcos(t)}$$

8. Obtener la solución general de

$$y'' - 2y' + 5y = 8xe^x sen(2x)$$

`Solución homogénea:`

Aplicando polinomio diferencial

$$(D^2 - 2D + 5)y = 0$$
$$D_1 = 1 + 2i, D_2 = 1 - 2i$$

cuyo conjunto fundamental tiene la forma

$$\{e^x cos(2x), e^x sen(2x)\}$$

por lo que la solución homogénea planteada será:

$$y_h = C_1 e^x cos2x + C_2 e^x sen(2x)$$

`Solución particular:`

Observando los términos de y_h y $Q(x)$ podemos deducir que en toda la ecuación diferencial existen 3 parejas de raíces complejas conjugadas repetidas.

Si el $sen(2x)$ que aparece en $Q(x) = 8xe^x sen(2x)$ se expresa en forma compleja es decir: $sen(2x) = e^{2ix}$; entonces

$$\overline{y_p} = \left[\frac{1}{D^2-2D+5}\right] 8xe^x e^{2ix}$$
$$\overline{y_p} = \left[\frac{1}{(D-1)^2+4}\right] 8xe^x e^{2ix}$$

Para simplificar las operaciones, primero antepondremos $8e^x$

$$\overline{y_p} = 8e^x \left[\frac{1}{(D+1-1)^2+4}\right] xe^{2ix} = 8e^x \left[\frac{1}{D^2+4}\right] xe^{2ix}$$

A continuación antepondremos e^{2ix}

$$\overline{y_p} = 8e^x e^{2ix}\left[\frac{1}{(D+2i)^2+4}\right]x = 8e^x e^{2ix}\left[\frac{1}{D^2+4Di}\right]x$$
$$\overline{y_p} = 8e^x e^{2ix}\left(\frac{1}{D}\right)\left[\frac{1}{D+4i}\right]x$$

Recordemos:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{4i} - \frac{1}{(4i)^2}D + \dots \\ \hline 4i + D & \quad 1 \\ & -1 - \frac{1}{4i}D \\ & \qquad \frac{1}{4i}D + \frac{1}{(4i)^2}D^2 \end{array}$$

Aplicando álgebra compleja se tiene

$$\frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i$$
$$\frac{1}{(4i)^2} = -\frac{1}{16}$$

Sustituyendo lo obtenido anteriormente

$$\overline{y_p} = 8e^x e^{2ix}\left(\frac{1}{D}\right)\left[-\frac{i}{4} + \frac{D}{16}\right]x$$
$$\overline{y_p} = 8e^x e^{2ix}\left(\frac{1}{D}\right)\left[-\frac{xi}{4} + \frac{D(x)}{16}\right]$$
$$\overline{y_p} = 8e^x e^{2ix}\left(\frac{1}{D}\right)\left[-\frac{xi}{4} + \frac{1}{16}\right]$$
$$\overline{y_p} = 8e^x e^{2ix}\left[-\frac{x^2 i}{8} + \frac{x}{16}\right]$$
$$\overline{y_p} = \left[-x^2 i + \frac{x}{2}\right]e^x\left(cos(2x) + isen(2x)\right)$$
$$\overline{y_p} = (x^2 e^x sen(2x) + \frac{1}{2}xe^x cos(2x)) + (-x^2 e^x cos(2x) + \frac{x}{2}e^x sen(2x))i$$

Como $Q(x)$ contiene a $sen(2x)$ que en el desarrollo de Euler corresponde a la parte imaginaria se tiene que

$$y_p = -x^2 e^x cos(2x) + \frac{x}{2}e^x sen(2x)$$

por lo que la solución buscada es:

$$\mathbf{y(x) = C_1 e^x cos2x + C_2 e^x sen(2x) - x^2 e^x cos(2x) + \frac{x}{2}e^x sen(2x)}$$

9. Obtener

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 8\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} - 4y$$

donde

$$y = e^{2x} tan(2x)$$

`Solución:`

Aplicando el operador diferencial se tiene

$$\left[D^3 + 8D^2 - 6D - 4\right] e^{2x} tan(2x)$$

Aplicando la tercera propiedad

$$e^{2x}\left[(D+2)^3 + 8(D+2)^2 - 6(D+2) - 4\right] tan(2x)$$

Desarrollando

$$e^{2x}\left[D^3 + 14D^2 - 38D + 24\right] tan(2x)$$

Recordemos

$$D(tan(2x)) = 2sec^2(2x)$$
$$D^2(tan(2x)) = 8sec^2(2x)tan(2x)$$
$$D^3(tan(2x)) = 32sec^2(2x)tan^2(2x) + 8sec^4(2x)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$e^{2x}\left[(32sec^2(2x)tan^2(2x) + 8sec^4(2x)) + 14(8sec^2(2x)tan(2x)) - 38(2sec^2(2x)) + 24tan(2x)\right]$$

Desarrollando el producto anterior se tiene:

$$\begin{aligned}\left[D^3 + 8D^2 - 6D - 4\right] e^{2x} tan(2x) &= \mathbf{32e^{2x}sec^2(2x)tan^2(2x) + 8e^{2x}sec^4(2x)} \\ &\mathbf{+112e^{2x}sec^2(2x)tan(2x) - 76e^{2x}sec^2(2x) + 24e^{2x}tan(2x)}\end{aligned}$$

1.6. *Ejercicios Propuestos*

Obtener la solución general de los siguientes ejercicios

1. $$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2x + sen(2x))$$

2. $$y'' - 3y' + 2y = xe^x$$

3.
$$y^{iv} + y^{''} = x^2 + x$$

4.
$$y^{iv} - 2y^{'''} + 2y^{''} - 2y^{'} + y = 1$$

5.
$$y^{'''} - 3y^{''} + 3y^{'} - y = e^t cos(2t)$$

6.
$$y^{''} + 2y^{'} + y = 1 + 2cos(w) + cos(2w) - e^{3w} + w^3$$

7.
$$y^{iv} - y = 8e^x$$

sujeto a

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y^{'}(0) = 2 \\ y^{''}(0) = 4 \\ y^{'''}(0) = 6 \end{cases}$$

8.
$$y^{''} + 4y = t^2 sen(2t)$$

9.
$$y^{''} + 9y = t^2 cos(3t)$$

10.
$$y^{'''} + 3y^{''} + 3y^{'} + y = x^2 e^{-3x}$$

11.
$$y^{''} - 5y^{'} + 6y = (12x - 5sen(2x))e^{-x}$$

12.
$$y^{''} + 4y^{'} + 5y = 10x^2 e^{-2x} cos(x)$$

13.
$$y^{''} + y^{'} - 2y = x^2 e^{4x}$$

14.
$$y^{iv} - 4y^{'''} + 6y^{''} - 4y^{'} + y = e^{3x}$$

15.
$$y^{iv} + 4y^{''} + 4y = sen(\sqrt{2}t)$$

16.
$$y^{iv} + 2y^{'''} + y^{''} = 7t^2$$

17.
$$y^{''} + 2y^{'} = 4e^{x}(sen(x) + 2cos(x))$$

2

Sistemas de Ecuaciones

De la misma manera con la que hemos tratado las ecuaciones diferenciales es posible hacerlo con los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes aplicando las propiedades del operador diferencial ya vistas anteriormente.

Cabe aclarar que en las aplicaciones siguientes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ serán funciones de $\mathbf{t}$, variable independiente.

Antes de comenzar a resolver sistemas de ecuaciones diferenciales homogéneos o no homogéneos veamos un ejemplo de la aplicación del operador diferencial en forma matricial.

Ejemplo 2.1 *verificar que los siguientes vectores son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales dados a continuación*

$$\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} -e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \text{ y } \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 7e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$$

$$x' = 4x + 7y$$
$$y' = x - 2y$$

expresemos este sistema en términos del operador diferencial y en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} D-4 & -7 \\ -1 & D+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sustituyamos en la expresión anterior el vector $\overline{x}_1$ es decir:

$$\begin{pmatrix} D-4 & -7 \\ -1 & D+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} =$$

realizando el producto matricial y simplificando, conforme a la propiedad del operador diferencial correspondiente se tiene:

$$\begin{pmatrix} (D-4)(-e^{-3t})-7(e^{-3t}) \\ -1(-e^{-3t})+(D+2)(e^{-3t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3-4)(-e^{-3t})-7(e^{-3t}) \\ -1(-e^{-3t})+(-3+2)(e^{-3t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a continuación realicemos lo mismo con $\overline{x}_2$

$$\begin{pmatrix} D-4 & -7 \\ -1 & D+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1. *Solución de Sistemas Homogéneos*

A continuación se presentará un ejemplo empleando el método de la matriz exponencial y el planteamiento por medio del operador derivada.

Ejemplo 2.2 *Resolver*

$$x' = 4x + 7y \tag{2.1}$$
$$y' = x - 2y \tag{2.2}$$

sujeto a:

$$\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solución

`Solución homogénea:`

Empleando Matriz Exponencial:

El sistema en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

procedamos a determinar la ecuación característica del sistema y sus raíces correspondientes:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 7 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-2-\lambda) - 7 = -8 - 4\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 7 = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = 5 \text{ y } \lambda_2 = -3$$

Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton tenemos:

$$e^{5t} = \beta_0 + 5\beta_1$$
$$e^{-3t} = \beta_0 - 3\beta_1$$

Al resolver el sistema se tiene que $\beta_0 = \frac{3e^{5t}+5e^{-3t}}{8}$ y $\beta_1 = \frac{e^{5t}-e^{-3t}}{8}$
Sustituyendo en:

$$e^{At} = \beta_0 I + \beta_1 A$$

se tiene

$$e^{At} = \frac{3e^{5t}+5e^{-3t}}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{5t}-e^{-3t}}{8}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

por lo que:

$$e^{At} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7e^{5t}+e^{-3t} & 7e^{5t}-7e^{-3t} \\ e^{5t}-e^{-3t} & e^{5t}+7e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Recordemos:

$$x_h = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

aplicando la expresión anterior considerando $t_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 7e^{5t}+e^{-3t} & 7e^{5t}-7e^{-3t} \\ e^{5t}-e^{-3t} & e^{5t}+7e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7e^{5t}-4e^{-3t} \\ e^{5t}+4e^{-3t} \end{pmatrix}$$

`Solución homogénea:`
Empleando el Operador Derivada
agrupando el sistema:

$$x' - 4x - 7y = 0$$
$$-x + y' + 2y = 0$$

podemos expresarlo por medio del operador diferencial D en forma matricial

$$\begin{pmatrix} D-4 & -7 \\ -1 & D+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Establezcamos el polinomio característico del sistema:

$$\begin{vmatrix} D-4 & -7 \\ -1 & D+2 \end{vmatrix} = D^2 - 2D - 15 = (D+3)(D-5) = 0$$

cuyas raíces características son:

$$D_1 = -3 \text{ y } \; D_2 = 5$$

por lo que el conjunto fundamental de soluciones del sistema resulta ser:

$$\{e^{-3t}, e^{5t}\} \tag{2.3}$$

De la ecuación (2.2) se observa que x tiene coeficiente 1 lo que no sucede con la ecuación (2.1) que tiene coeficiente 4; por lo que es conveniente escoger a y como función solución, pero esto no implica que no se escoja a x.
En estas condiciones:

$$y_h = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{5t} \tag{2.4}$$

de (2.2)

$$x = y^{'} + 2y = (D+2)y \tag{2.5}$$

Sustituyendo (2.4) en (2.5)

$$x = (D+2)y = (D+2)(C_1 e^{-3t} + C_2 e^{5t}) = C_1(D+2)e^{-3t} + C_2(D+2)e^{5t} \tag{2.6}$$

Aplicando la primera propiedad del operador diferencial se obtiene:

$$x = C_1(-3+2)e^{3t} + C_2(5+2)e^{5t}$$

finalmente

$$x_h = -C_1 e^{-3t} + 7C_2 e^{5t}$$

Verificación de la solución

$$\begin{pmatrix} D-4 & -7 \\ -1 & D+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -C_1e^{-3t}+7C_2e^{5t} \\ C_1e^{-3t}+C_2e^{5t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando

$$\begin{pmatrix} (D-4)(-C_1e^{-3t}+7C_2e^{5t})-7(C_1e^{-3t}+C_2e^{5t}) \\ (-1)(-C_1e^{-3t}+7C_2e^{5t})+(D+2)(C_1e^{-3t}+C_2e^{5t}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -C_1(D-4)e^{-3t}+7C_2(D-4)e^{5t}-7C_1e^{-3t}-7C_2e^{5t} \\ C_1e^{-3t}-7C_2e^{5t}+C_1(D+2)e^{-3t}+C_2(D+2)e^{5t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando la primera propiedad del operador diferencial

$$\begin{pmatrix} -C_1(-3-4)e^{-3t}+7C_2(5-4)e^{5t}-7C_1e^{-3t}-7C_2e^{5t} \\ C_1e^{-3t}-7C_2e^{5t}+C_1(-3+2)e^{-3t}+C_2(5+2)e^{5t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comprobado.
apliquemos las condiciones a la expresión

$$x=-C_1e^{-3t}+7C_2e^{5t}$$
$$y=C_1e^{-3t}+C_2e^{5t}$$

dando por resultado el siguiente sistema

$$3=-C_1+7C_2$$
$$5=C_1+C_2$$

cuyas soluciones son $C_1=4$ y $C_2=1$, las cuales al ser sustituidas dan como resultado:

$$x=-4e^{-3t}+7e^{5t}$$
$$y=4e^{-3t}+e^{5t}$$

Una segunda alternativa para resolver un sistema homogéneo es:
consideremos el mismo sistema anterior cuyo conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{3t},e^{5t}\}$$

en estas condiciones podemos considerar a la solución del sistema como:

$$x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{5t}$$
$$y = C_3 e^{-3t} + C_4 e^{5t}$$

Siendo estas funciones soluciones del sistema homogéneo, debe verificar a cualquiera de las ecuaciones diferenciales de dicho sistema, es decir:

$$x' - 4x - 7y = 0$$
$$(D-4)(C_1 e^{-3t} + C_2 e^{5t}) - 7(C_3 e^{3t} + C_4 e^{5t})$$
$$-7(C_1 + C_3)e^{-3t} + (C_2 - 7C_4)e^{5t} = 0$$

como $\mathbf{e^{-3t}}$ y $\mathbf{e^{5t}}$ son funciones linealmente independientes, la igualdad anterior se cumplirá siempre que $C_1 + C_3 = 0$ y $C_2 - 7C_4 = 0$ de donde $C_1 = -C_3$ y $C_2 = 7C_4$ este método tiene la ventaja de que el sistema puede expresarse en función de C_1 y C_2 o bien C_3 y C_4, puesto que la ecuación característica del sistema es de segundo orden y el número total de constantes arbitrarias en las soluciones deben ser únicamente dos es decir

$$x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{5t}$$
$$y = -C_1 e^{-3t} + \tfrac{1}{7} C_2 e^{5t}$$

o también

$$x = -C_3 e^{-3t} + 7C_4 e^{5t}$$
$$y = C_3 e^{-3t} + C_4 e^{5t}$$

Nota: ***Obsérvese que esta solución, es la misma que la obtenida con el primer método, con la única diferencia en los índices, lo cual es correcto puesto que las constantes son arbitrarias***.

Ejemplo 2.3 *Sea el sistema:*

$$x' = y + z$$
$$y' = x + z$$
$$z' = x + y$$

Al expresar este sistema por medio del operador derivada se tiene

$$\begin{pmatrix} D & -1 & -1 \\ -1 & D & -1 \\ -1 & -1 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aplicando el determinante al sistema a fin de obtener el polinomio característico

$$\begin{vmatrix} D & -1 & -1 \\ -1 & D & -1 \\ -1 & -1 & D \end{vmatrix} = D[D^2-1]+1[-D-1]-1[1+D] = D^3-3D-2 = 0$$

cuyos valores característicos son:

$$D_1 = -1, D_2 = -1, D_3 = 2$$

por lo que el conjunto fundamental solución del sistema es:

$$\{e^{-t}, te^{-t}, e^{2t}\}$$

Consideremos a $x(t)$ como la combinación lineal del conjunto fundamental, aunque se pueden tomar a $y(t)$ o a $z(t)$

$$x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3e^{2t} \tag{2.7}$$

si restamos la segunda ecuación a la primera para eliminar la variable z tenemos

$$y' + y = x' + x = (D+1)x \tag{2.8}$$

sustituyendo (2.7) en (2.8)

$$\begin{aligned} y' + y &= (D+1)[C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3e^{2t}] \\ y' + y &= C_1(-1+1)e^{-t} + e^{-t}C_2(D-1+1)t + C_3(2+1)e^{2t} \\ y' + y &= C_2e^{-t} + 3C_3e^{2t} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Mediante propiedades del operador diferencial, de (2.9)

$$y = \left(\tfrac{1}{D+1}\right)C_2e^{-t} + \left(\tfrac{1}{D+1}\right)3C_3e^{2t} + \left(\tfrac{1}{D+1}\right)C_4$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-t}C_2(\frac{1}{D}(1)) + (\frac{1}{2+1})(3C_3e^{2t}) + C_4e^{-t} \\ y &= C_2te^{-t} + C_3e^{2t} + C_4e^{-t} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Debe hacerse notar que el término $\left(\frac{C_4}{D+1}\right)$ no es una integral, sino una constante de integración dividida entre el factor integrante e^t.
Despejando **z** de la primera ecuación, aunque también puede serlo de la tercera ecuación tenemos

$$z = x^{'} - y$$

sustituyendo (2.7) y (2.10) se obtiene:

$$\begin{aligned} z &= D(C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3e^{2t}) - (C_2te^{-t} + C_3e^{2t} + C_4e^{-t}) \\ z &= C_1(D)e^{-t} + e^{-t}C_2(D-1)t + C_3(D)e^{2t} - (C_2te^{-t} + C_3e^{2t} + C_4e^{-t}) \\ z &= C_1(-1)e^{-t} + C_2e^{-t}(1-t) + C_3(2)e^{2t} - C_2te^{-t} - C_3e^{2t} - C_4e^{-t} \\ z &= (-C_1 + C_2 - C_4)e^{-t} - 2C_2te^{-t} + C_3e^{2t} \end{aligned} \tag{2.11}$$

A fin de eliminar una de las cuatro constantes arbitrarias sustituiremos (2.7),(2.10) y (2.11) en la tercera ecuación.

$$z^{'} = x + y$$

esto da

$$\begin{gathered} z^{'} = (D)((-C_1 + C_2 - C_4)e^{-t} - 2C_2te^{-t} + C_3e^{2t}) \\ z^{'} = (-1)(-C_1 + C_2 - C_4)e^{-t} - 2e^{-t}C_2(D-1)t + (2)C_3e^{2t} \\ \mathbf{z^{'} = (C_1 - C_2 + C_4)e^{-t} - 2C_2e^{-t}(1-t) + 2C_3e^{2t}} \end{gathered}$$

De la misma forma

$$\begin{gathered} x + y = (C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3e^{2t}) + (C_2te^{-t} + C_3e^{2t} + C_4e^{-t}) \\ \mathbf{x + y = (C_1 + C_4)e^{-t} + 2C_2te^{-t} + 2C_3e^{2t}} \end{gathered}$$

al igualar ambas expresiones observamos

$$\mathbf{-3C_2e^{-t} = 0}$$

como $\mathbf{-3e^{-t}}$ es diferente de cero entonces la constante $C_2 = 0$.
sustituyendo este valor de C_2 en las ecuaciones $x(t), y(t), z(t)$ se obtiene el siguiente sis-

tema solución:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{-t} + C_3e^{2t} \\ y(t) &= C_3e^{2t} + C_4e^{-t} \\ z(t) &= -C_1e^{-t} + C_3e^{2t} - C_4e^{-t} \end{aligned}$$

el cual al ser expresado de forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{-t} \\ -e^{-t} & e^{2t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

o también

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Podemos generalizar el método de solución a cualquier sistema lineal de cualquier orden que tenga tantas ecuaciones como incógnitas, ejemplo de ello es el siguiente.

Ejemplo 2.4 *Obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden homogéneo*

$$x'' - y' = 0 \tag{2.12}$$

$$x' + 3x + y' + 3y = 0 \tag{2.13}$$

Solución

éste sistema se puede expresar en términos del operador diferencial y en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} D^2 & -D \\ D+3 & D+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

cuyo polinomio diferencial del sistema:

$$\begin{vmatrix} D^2 & -D \\ D+3 & D+3 \end{vmatrix} = D^3 + 4D^2 + 3D = D(D+3)(D+1) = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = 0, D_2 = -3 \text{ y } D_3 = -1$$

por lo que el conjunto fundamental de solución es:

$$\left\{1, e^{-3t}, e^{-t}\right\}$$

Elijamos a $x(t)$ como solución del sistema

$$x(t) = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-3t} \tag{2.15}$$

de (2.12)

$$y' = x'' \qquad \text{ó} \qquad D(y) = D^2(x)$$

integrando la expresión anterior

$$y = \frac{D^2}{D}x + \frac{C_4}{D} = D(x) + \frac{C_4}{e^{0t}} = D(x) + C_4$$

Nota: ***Debe observarse que la constante de integración deberá conservarse siempre que esté multiplicada por cualquiera de las funciones del conjunto fundamental*** $[(1)\mathbf{C_4}]$***, si esto no fuera así dicha constante vale cero.***

Sustituyendo (2.15) en esta última ecuación y considerando que C_4 es una constante de integración y además el factor de integración en este caso es e^{0t}, se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= D(C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-3t}) + C_4 \\ y &= C_2(-1)e^{-t} + C_3(-3)e^{-3t} + C_4 \\ y(t) &= -C_2e^{-t} - 3C_3e^{-3t} + C_4 \end{aligned} \tag{2.16}$$

A fin de eliminar una de las cuatro constantes,sustituiremos (2.15) y (2.16) en la ecuación (2.13):

$$\begin{gathered} x' + 3x + y' + 3y = 0 \\ (D+3)(C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-3t}) + (D+3)(-C_2e^{-t} - 3C_3e^{-3t} + C_4) = 0 \\ 3C_1 + 2C_2e^{-t} - 2C_2e^{-t} + 3C_4 = 0 \\ 3C_1 + 3C_4 = 0 \\ C_4 = -C_1 \end{gathered}$$

De está manera tenemos que la solución del sistema es

$$\mathbf{x(t) = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-3t}}$$
$$\mathbf{y(t) = -C_1 - C_2e^{-t} - 3C_3e^{-3t}}$$

2.2. *Sistemas no Homogéneos*

La forma de solución para este tipo de sistemas es similar en cuanto a la obtención de la homogénea asociada sin embargo en la solución particular emplearemos muchas de las propiedades del operador inverso.

Ejemplo 2.5 *Determinar la solución del sistema*

$$x' = 6x + y + 6t \tag{2.17}$$
$$y' = 4x + 3y - 10t + 4 \tag{2.18}$$

sujeto a $x(0) = 2$, $y(0) = 1$

Solución

El sistema puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} D-6 & -1 \\ -4 & D-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ -10t+4 \end{pmatrix}$$

a) `Solución homogénea:`

$$x' = 6x + y \tag{2.19}$$
$$y' = 4x + 3y \tag{2.20}$$

por lo que el polinomio característico del sistema es

$$\begin{vmatrix} D-6 & -1 \\ -4 & D-3 \end{vmatrix} = D^2 - 9D + 14 = (D-7)(D-2) = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = 7, D_2 = 2$$

por lo que el conjunto fundamental del sistema es:

$$\{e^{7t}, e^{2t}\}$$

De la ecuación (2.19) se observa que si se conoce a $x(t)$ es fácil obtener a $y(t)$ es decir:

$$x(t) = C_1e^{7t} + C_2e^{2t} \tag{2.21}$$

de (2.19)

$$y(t) = (D-6)x(t) \tag{2.22}$$

sustituyendo (2.21) en (2.22) se tiene

$$\begin{gathered} y(t) = (D-6)(C_1e^{7t} + C_2e^{2t}) \\ y(t) = (7-6)C_1e^{7t} + (2-6)C_2e^{2t} \\ y(t) = C_1e^{7t} - 4C_2e^{2t} \end{gathered}$$

b)`Solución particular:`
una forma de obtener la solución particular es mediante la regla de Crammer, esto es:

$$x_p = \frac{1}{D^2-9D+14}\begin{vmatrix} 6t & -1 \\ -10t+4 & D-3 \end{vmatrix} = \frac{D-3}{D^2-9D+14}(6t) + \frac{1}{D^2-9D+14}(-10t+4)$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-9D+14}\begin{vmatrix} D-6 & 6t \\ -4 & -10t+4 \end{vmatrix} = \frac{4}{D^2-9D+14}(6t) + \frac{D-6}{D^2-9D+14}(-10t+4)$$

A fin de garantizar que x_p y y_p verifiquen simultáneamente al sistema, es recomendable (por experiencia) ligar las operaciones integró diferenciales de funciones semejantes, cuando se tengan raíces repetidas, en la ecuación característica y en los términos independientes, como este no es el caso se pueden reducir los términos de cada solución en uno sólo, derivando y después integrando, es decir:

$$\begin{gathered} x_p = \tfrac{D-3}{D^2-9D+14}(6t) + \tfrac{1}{D^2-9D+14}(-10t+4) \\ x_p = \tfrac{1}{D^2-9D+14}(6-18t-10t+4) \\ x_p = \tfrac{1}{D^2-9D+14}(-28t+10) \end{gathered}$$

del mismo modo

$$y_p = \frac{4}{D^2-9D+14}(6t) + \frac{D-6}{D^2-9D+14}(-10t+4)$$
$$y_p = \frac{1}{D^2-9D+14}(24t-10+60t-24)$$
$$y_p = \frac{1}{D^2-9D+14}(84t-34)$$

siendo en este caso la función una polinomial, obtengamos su integral transformando el operador inverso en un operador directo expresándolo como una serie infinita del operador (D) hasta el término primera derivada, ya que las demás derivadas anulan a $-28t+10$ y $84t-34$, es decir:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{14} + \frac{9}{(14)^2}D + \dots \\ \hline 14-9D & 1 \\ & -1 + \frac{9}{14}D \\ & \quad -\frac{9}{14}D + \frac{81}{(14)^2}D^2 \end{array}$$

Aplicando el resultado previamente encontrado

$$x_p = \frac{1}{D^2-9D+14}(-28t+10)$$
$$x_p = \left(\frac{1}{14} + \frac{9}{(14)^2}D\right)(-28t+10)$$
$$x_p = -\frac{28}{14}t + \frac{10}{14} - \frac{(9)(28)}{(14)^2}$$
$$x_p = -2t + \frac{10}{14} - \frac{18}{14}$$
$$\mathbf{x_p = -2t - \frac{4}{7}}$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-9D+14}(84t-34)$$
$$y_p = \left(\frac{1}{14} + \frac{9}{(14)^2}D\right)(84t-34)$$
$$y_p = \frac{84}{14}t - \frac{34}{14} + \frac{(9)(84)}{(14)^2}$$
$$y_p = 6t - \frac{34}{14} + \frac{54}{14}$$
$$\mathbf{y_p = 6t + \frac{10}{7}}$$

verifiquemos si es solución

$$\begin{pmatrix} D-6 & -1 \\ -4 & D-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2t-\frac{4}{7} \\ 6t+\frac{10}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+12t+\frac{24}{7}-6t-\frac{10}{7} \\ 8t+\frac{16}{7}+6-18t-\frac{30}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ -10t+4 \end{pmatrix}$$

cumple.

Siendo finalmente la solución del sistema las siguientes funciones:

$$\mathbf{x(t) = C_1e^{7t} + C_2e^{2t} - 2t - \frac{4}{7}}$$
$$\mathbf{y(t) = C_1e^{7t} - 4C_2e^{2t} + 6t + \frac{10}{7}}$$

c)**Solución particular:**

Otra forma de obtenerla es mediante el operador inverso.

Puesto que la solución particular verifica al sistema se tiene

$$\begin{pmatrix} D-6 & -1 \\ -4 & D-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ -10t+4 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Recordemos:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{det(A)}$$

donde *Adj(A)* es la matriz de cofactores transpuesta de la matriz **A**.

La inversa de:

$$\begin{pmatrix} D-6 & -1 \\ -4 & D-3 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{pmatrix} \frac{D-3}{D^2-9D+14} & \frac{1}{D^2-9D+14} \\ \frac{4}{D^2-9D+14} & \frac{D-6}{D^2-9D+14} \end{pmatrix}$$

Si premultiplicamos a la expresión (2.23) por su inversa tendremos directamente las soluciones buscadas.

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-3}{D^2-9D+14} & \frac{1}{D^2-9D+14} \\ \frac{4}{D^2-9D+14} & \frac{D-6}{D^2-9D+14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6t \\ -10t+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{D^2-9D+14}(-28t+10) \\ \frac{1}{D^2-9D+14}(84t-34) \end{pmatrix}$$

procediendo del modo anterior se llega a la misma solución.

$$x_p = -2t - \tfrac{4}{7}$$
$$y_p = 6t + \tfrac{10}{7}$$

Aplicando las condiciones planteadas al principio, se forma el siguiente sistema:

$$2 = C_1 + C_2 - \tfrac{4}{7}$$
$$1 = C_1 - 4C_2 + \tfrac{10}{7}$$

al resolver el sistema encontramos que $C_1 = \frac{69}{35}$ y $C_2 = \frac{3}{5}$

por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{aligned}\mathbf{x(t)} &= \mathbf{\tfrac{69}{35}e^{7t} + \tfrac{3}{5}e^{2t} - 2t - \tfrac{4}{7}}\\ \mathbf{y(t)} &= \mathbf{\tfrac{69}{35}e^{7t} - \tfrac{12}{5}e^{2t} + 6t + \tfrac{10}{7}}\end{aligned}$$

Ejemplo 2.6 *Resolver el sistema no homogéneo sujeto a las condiciones indicadas*

$$x_1' = 3x_1 + 2x_2 + 2e^{-t} \tag{2.24}$$
$$x_2' = -2x_1 - x_2 + e^{-t} \tag{2.25}$$

sujeto a

$$\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Este sistema en términos de **D** puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} D-3 & -2 \\ 2 & D+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

a)`Solución del sistema homogéneo`

$$x_1' = 3x_1 + 2x_2 \tag{2.26}$$
$$x_2' = -2x_1 - x_2 \tag{2.27}$$

El polinomio característico del sistema

$$\begin{vmatrix} D-3 & -2 \\ 2 & D+1 \end{vmatrix} = D^2 - 2D + 1 = (D-1)(D-1) = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = 1, D_2 = 1$$

por lo que el conjunto fundamental de soluciones del sistema es:

$$\{e^t, te^t\}$$

consideremos las soluciones:

$$x_1 = C_1e^t + C_2te^t$$
$$x_2 = C_3e^t + C_4te^t$$

de (2.26) observamos que

$$
\begin{gathered}
x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\
(D-3)x_1 - 2x_2 = 0 \\
(D-3)(C_1e^t + C_2te^t) - 2(C_3e^t + C_4te^t) = 0 \\
C_1(D-3)e^t + C_2(D-3)te^t - 2C_3e^t - 2C_4te^t = 0 \\
C_1(1-3)e^t + e^tC_2(D-2)t - 2C_3e^t - 2C_4te^t = 0 \\
-2C_1e^t + C_2e^t(1-2t) - 2C_3e^t - 2C_4te^t = 0 \\
(-2C_1 + C_2 - 2C_3)e^t + (-2C_2 - 2C_4)te^t = 0
\end{gathered}
$$

quedando el siguiente sistema:

$$
\begin{gathered}
-2C_1 + C_2 - 2C_3 = 0 \\
-2C_2 - 2C_4 = 0
\end{gathered}
$$

donde $C_4 = -C_2$ ó $C_2 = -C_4$ y $C_3 = \frac{1}{2}(-2C_1 + C_2)$ ó $C_1 = \frac{1}{2}(-C_4 - 2C_3)$ si la solución es puesta en término de C_1 y C_2 la solución del sistema se presenta como:

$$
\begin{gathered}
x_1 = C_1e^t + C_2te^t \\
x_2 = \tfrac{1}{2}(-2C_1 + C_2)e^t - C_2te^t
\end{gathered}
$$

si se pone en términos de C_3 y C_4 la solución tiene la forma:

$$
\begin{gathered}
x_2 = C_3e^t + C_4te^t \\
x_1 = \tfrac{1}{2}(-C_4 - 2C_3)e^t - C_4te^t
\end{gathered}
$$

b)`Solución particular del sistema`

$$
\begin{pmatrix} D-3 & -2 \\ 2 & D+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}
$$

si premultiplicamos la expresión anterior por su inversa se tiene:

$$
\begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D+1}{(D-1)^2}2e^{-t} + \frac{2}{(D-1)^2}e^{-t} \\ \frac{-2}{(D-1)^2}2e^{-t} + \frac{D-3}{(D-1)^2}e^{-t} \end{pmatrix}
$$

Obsérvese que en éste caso los denominadores de los polinomios diferenciales no contienen raíces que generen a e^{-t}; o bien no se repiten raíces $D = -1$ en la expresión anterior, por lo que basta aplicar la primera propiedad del operador derivada para obtener la solución, es decir:

$$\begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1+1}{(-1-1)^2}2e^{-t} + \frac{2}{(-1-1)^2}e^{-t} \\ \frac{-2}{(-1-1)^2}2e^{-t} + \frac{-1-3}{(-1-1)^2}e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} D-3 & -2 \\ 2 & D+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-t}+4e^{-t} \\ e^{-t}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

por lo que la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1} &= \mathbf{C_1e^t + C_2te^t + \tfrac{1}{2}e^{-t}} \\ \mathbf{x_2} &= \mathbf{\tfrac{1}{2}(-2C_1 + C_2)e^t - C_2te^t - 2e^{-t}} \end{aligned}$$

aplicando las condiciones del problema se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{gathered} 2 = C_1 + \tfrac{1}{2} \\ 4 = \tfrac{1}{2}(-2C_1 + C_2) - 2 \end{gathered}$$

al resolver el sistema encontramos que $C_1 = \frac{3}{2}$ y $C_2 = 15$.
por lo que la solución al sistema es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_1(t)} &= \mathbf{\tfrac{3}{2}e^t + 15te^t + \tfrac{1}{2}e^{-t}} \\ \mathbf{x_2(t)} &= \mathbf{6e^t - 15te^t - 2e^{-t}} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7 *Resolver*

$$x' = x - y + e^t cos(t) \quad (2.28)$$

$$y' = x + y + e^t sen(t) \quad (2.29)$$

sujeto a

$$\overline{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución

expresando el sistema de forma matricial empleando el operador diferencial tenemos

$$\begin{pmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t cos(t) \\ e^t sen(t) \end{pmatrix}$$

`Solución del sistema homogéneo`
el sistema a resolver es

$$x' = x - y \quad (2.30)$$
$$y' = x + y \quad (2.31)$$

el polinomio diferencial del sistema

$$\begin{vmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} = D^2 - 2D + 2 = 0$$

cuyas raíces son

$$D_1 = 1 + i, D_2 = 1 - i$$

por lo que el conjunto fundamental de soluciones del sistema es

$$\{e^t cos(t), e^t sen(t)\}$$

Si consideramos a y_h como:

$$y_h = C_1 e^t cos(t) + C_2 e^t sen(t)$$

entonces, de (2.31) tenemos:

$$x = y' - y = (D-1)(C_1 e^t cos(t) + C_2 e^t sen(t))$$
$$x = e^t C_1 D(cos(t)) + e^t C_2 D(sen(t))$$
$$x_h = -C_1 e^t sen(t) + C_2 e^t cos(t)$$

`Solución particular del sistema`
El sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} D-1 & 1 \\ -1 & D-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t cos(t) \\ e^t sen(t) \end{pmatrix}$$

Usando Crammer

$$x_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 2} \begin{vmatrix} e^t cos(t) & 1 \\ e^t sen(t) & D-1 \end{vmatrix} = \frac{D-1}{(D-1)^2+1}(e^t cos(t)) - \frac{1}{(D-1)^2+1}(e^t sen(t))$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-2D+2}\begin{vmatrix} D-1 & e^t cos(t) \\ -1 & e^t sen(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{(D-1)^2+1}(e^t cos(t)) + \frac{D-1}{(D-1)^2+1}(e^t sen(t))$$

En éste caso se observa que las raíces del denominador del operador diferencial, generan términos semejantes a los contenidos en los términos independientes, como puede verse en el conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo.
Aplicando tercera propiedad, las expresiones de x_p y y_p se transforman en:

$$x_p = e^t\left(\tfrac{D}{D^2+1}\right)cos(t) - e^t\left(\tfrac{1}{D^2+1}\right)sen(t)$$
$$y_p = e^t\left(\tfrac{1}{D^2+1}\right)cos(t) + e^t\left(\tfrac{D}{D^2+1}\right)sen(t)$$

A fin de garantizar que x_p y y_p verifiquen al sistema consideremos como integrales base a las expresiones:

$$\frac{1}{D^2+1}cos(t) \text{ y } \frac{1}{D^2+1}sen(t)$$

Estas integrales se pueden obtener recurriendo a la integral de la exponencial compleja e^{ti}; es decir:

$$\tfrac{1}{D^2+1}(e^{ti}) = e^{ti}\left(\tfrac{1}{(D+i)^2+1}\right)(1) = e^{ti}\left(\tfrac{1}{D^2+2Di-1+1}\right)(1) =$$
$$e^{ti}\left(\tfrac{1}{D(D+2i)}\right)(1) = e^{ti}\left(\tfrac{1}{D}\right)\left(\left(\tfrac{1}{D+2i}\right)\right)(1) = e^{ti}\tfrac{1}{D}\left(\tfrac{1}{2i}\right) = e^{ti}\tfrac{1}{D}\left(-\tfrac{i}{2}\right) = \left(-\tfrac{1}{2}ti\right)e^{ti}$$

Usando la fórmula de Euler

$$\frac{1}{D^2+1}e^{ti} = -\frac{1}{2}ti(cos(t)+isen(t)) = \frac{1}{2}tsen(t) - i(\frac{1}{2}tcos(t))$$

De esta última expresión se obtienen:

$$\tfrac{1}{D^2+1}cos(t) = \tfrac{1}{2}tsen(t)$$
$$\tfrac{1}{D^2+1}sen(t) = -\tfrac{1}{2}tcos(t)$$

Considerando estas integrales como base se tendrá que las expresiones de x_p y y_p, se reducen a:

$$x_p = e^t D\left(\tfrac{1}{2}tsen(t)\right) - e^t\left(-\tfrac{1}{2}tcos(t)\right)$$
$$x_p = e^t\left(\tfrac{1}{2}sen(t) + \tfrac{1}{2}tcos(t)\right) + \tfrac{1}{2}te^t cos(t)$$
$$x_p = te^t cos(t) + \tfrac{1}{2}e^t sen(t)$$

Del mismo modo:

$$y_p = e^t D\left(-\tfrac{1}{2}tcos(t)\right) - e^t\left(-\tfrac{1}{2}tsen(t)\right)$$
$$y_p = e^t\left(\tfrac{1}{2}tsen(t) - \tfrac{1}{2}cos(t)\right) + \tfrac{1}{2}te^t sen(t)$$
$$y_p = te^t sen(t) - \tfrac{1}{2}e^t cos(t)$$

la solución general del sistema será entonces:

$$x(t) = -C_1e^t sen(t) + C_2e^t cos(t) + te^t cos(t) + \tfrac{1}{2}e^t sen(t)$$
$$y(t) = C_1e^t cos(t) + C_2e^t sen(t) + te^t sen(t) - \tfrac{1}{2}e^t cos(t)$$

Agrupando términos semejantes

$$x(t) = -(C_1 - \tfrac{1}{2})e^t sen(t) + C_2e^t cos(t) + te^t cos(t)$$
$$y(t) = (C_1 - \tfrac{1}{2})e^t cos(t) + C_2e^t sen(t) + te^t sen(t)$$

Obsérvese que $(C_1 - \frac{1}{2})$ se repite en ambas expresiones, luego se puede sustituir por otra constante por ejemplo $(C_1 - \frac{1}{2}) = C_3$ por lo que las expresiones anteriores quedan:

$$\mathbf{x(t) = -C_3e^t sen(t) + C_2e^t cos(t) + te^t cos(t)}$$
$$\mathbf{y(t) = C_3e^t cos(t) + C_2e^t sen(t) + te^t sen(t)}$$

aplicando las condiciones $x(\pi) = 1$ y $y(\pi) = 1$ nos queda el siguiente sistema

$$1 = -C_2e^{\pi} - \pi e^{\pi}$$
$$1 = -C_3e^{\pi}$$

cuya solución es $C_3 = -e^{-\pi}$ y $C_2 = -e^{-\pi} - \pi$
sustituyendo las constantes en la solución general se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x(t)} &= \mathbf{e^{-\pi}e^t sen(t) + (-e^{-\pi} - \pi)e^t cos(t) + te^t cos(t)}\\ \mathbf{y(t)} &= \mathbf{-e^{-\pi}e^t cos(t) + (-e^{-\pi} - \pi)e^t sen(t) + te^t sen(t)}\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8 *Dado el sistema de ecuaciones de segundo orden no homogéneo, Obtener su solución general*

$$x'' - y' = t \tag{2.32}$$
$$x' + 3x + y' + 3y = 2 \tag{2.33}$$

aplicando operador diferencial tenemos

$$\begin{pmatrix} D^2 & -D \\ D+3 & D+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

cuya ecuación característica

$$\begin{vmatrix} D^2 & -D \\ D+3 & D+3 \end{vmatrix} = D^2(D+3) + D(D+3) = D^3 + 4D^2 + 3D = D(D+1)(D+3) = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = 0, D_2 = -1, D_3 = -3$$

por lo que el conjunto fundamental solución del sistema es:

$$\{1, e^{-t}, e^{-3t}\}$$

a)`Solución homogénea`

El proceso de solución se puede observar en el **ejemplo 2.4**, por lo que la solución del sistema homogéneo es:

$$x = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-3t}$$
$$y = -C_1 - C_2e^{-t} - 3C_3e^{-3t}$$

b)`solución particular`

El sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} D^2 & -D \\ D+3 & D+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

Usando Crammer

$$x_p = \frac{1}{D^3 + 4D^2 + 3D}\begin{vmatrix} t & -D \\ 2 & D+3 \end{vmatrix} = \frac{D+3}{D(D^2+4D+3)}(t) + \frac{D}{D(D^2+4D+3)}(2)$$

$$y_p = \frac{1}{D^3 + 4D^2 + 3D}\begin{vmatrix} D^2 & t \\ D+3 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{D+3}{D(D^2+4D+3)}(t) + \frac{D^2}{D(D^2+4D+3)}(2)$$

En éste caso se tienen raíces repetidas, luego se deben relacionar las operaciones integró diferenciales de términos semejantes, después de simplificar lo mas que sea posible; es decir:

$$x_p = \frac{D+3}{D(D^2+4D+3)}(t) + \frac{D}{D(D^2+4D+3)}(2)$$
$$x_p = \frac{1}{D}\frac{D+3}{(D+3)(D+1)}(t) + \frac{1}{D^2+4D+3}(2)$$
$$x_p = \frac{1}{D}\frac{1}{D+1}(t) + \frac{1}{D^2+4D+3}(2)$$

$$y_p = -\frac{D+3}{D(D^2+4D+3)}(t) + \frac{D^2}{D(D^2+4D+3)}(2)$$
$$y_p = -\frac{1}{D}\frac{D+3}{(D+3)(D+1)}(t) + \frac{D}{D^2+4D+3}(2)$$
$$y_p = -\frac{1}{D}\frac{1}{D+1}(t) + \frac{D}{D^2+4D+3}(2)$$

En este caso se observa que al aplicar las simplificaciones se obtienen expresiones similares, las cuales pueden actuar como nuestras integrales bases, en los casos en que esto no se cumpla, no es recomendable efectuar dichas simplificaciones, esto es:

$$x_p = \frac{1}{D}\frac{1}{D+1}(t) + \frac{1}{D^2+4D+3}(2)$$
$$y_p = -\frac{1}{D}\frac{1}{D+1}(t) + \frac{D}{D^2+4D+3}(2)$$

De las expresiones anteriores se observa que las integrales base son

$$\frac{1}{D}\frac{1}{D+1}(t) \quad \text{y} \quad \frac{1}{D^2+4D+3}(2)$$

Recordemos que:

$$\begin{array}{r|l} & 1 - D + \dots \\ \hline 1+D & 1 \\ & -1 - D \end{array}$$

Entonces:

$$x_p = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{D+1}\right)(t) + \frac{2}{3}$$
$$x_p = \frac{1}{D}(1-D)(t) + \frac{2}{3}$$
$$x_p = \frac{1}{D}(t-1) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{2}{3}$$
$$x_p = \mathbf{\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{2}{3}}$$
$$y_p = -\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D+1}\right)(t) + D\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$y_p = -\frac{1}{D}(1-D)(t)$$
$$y_p = -\frac{1}{D}(t-1) = -\left(\frac{1}{2}t^2 - t\right)$$
$$y_p = \mathbf{-\frac{1}{2}t^2 + t}$$

por lo que la solución al sistema es

$$\mathbf{x(t) = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-3t} + \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{2}{3}}$$
$$\mathbf{y(t) = -C_1 - C_2e^{-t} - 3C_3e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 + t}$$

Ejemplo 2.9 *Resolver*

$$(D-1)x+(D^2+1)y = 1 \tag{2.34}$$
$$(D^2-1)x+(D+1)y = 2 \tag{2.35}$$

cuya representación del sistema es

$$x^{'}-x+y^{''}+y=1$$
$$x^{''}-x+y^{'}+y=2$$

como se puede observar el sistema se puede expresar

$$\begin{pmatrix} D-1 & D^2+1 \\ D^2-1 & D+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} D-1 & D^2+1 \\ D^2-1 & D+1 \end{vmatrix}=(D-1)(D+1)-(D^2-1)(D^2+1)=(D^2-1)-(D^4-1)=D^2-D^4=0$$

por lo que la ecuación característica del sistema es $\lambda^2-\lambda^4=0$, cuyas raíces son

$$\lambda^2-\lambda^4=\lambda^2(1-\lambda^2)=\begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=1 \\ \lambda_4=-1 \end{cases}$$

lo que indica que el conjunto generador es

$$\{1,t,e^t,e^{-t}\}$$

`Solución homogénea:`

$$x^{'}-x+y^{''}+y = 0 \tag{2.36}$$
$$x^{''}-x+y^{'}+y = 0 \tag{2.37}$$

Sea x la solución del sistema homogéneo, vease el conjunto fundamental anterior

$$x_h = C_1 + C_2t + C_3e^t + C_4e^{-t}$$

de (2.37)

$$(D+1)y = (1-D^2)x$$
$$(D+1)y = (1-D^2)(C_1 + C_2t + C_3e^t + C_4e^{-t})$$
$$(D+1)y = C_1 + C_2t + [1-(1^2)]C_3e^t + [1-(1^2)]C_4e^{-t}$$
$$\mathbf{(D+1)y = C_1 + C_2t}$$
$$y = \frac{C_1}{D+1} + \frac{C_2}{D+1}t + C_5e^{-t}$$
$$y = C_1 + C_2(1-D)t + C_5e^{-t}$$
$$y_h = C_1 + C_2t - C_2 + C_5e^{-t}$$

a fin de eliminar una de las cinco constantes arbitrarias, se procede a sustituir el valor de x y de y en (2.36),es decir:

$$x' - x + y'' + y = 0$$
$$(D-1)x + (D^2+1)y = 0$$
$$(D-1)(C_1 + C_2t + C_3e^t + C_4e^{-t}) + (D^2+1)(C_1 + C_2t - C_2 + C_5e^{-t}) = 0$$
$$(C_2 + C_3e^t - C_4e^{-t}) - (C_1 + C_2t + C_3e^t + C_4e^{-t}) + (C_5e^{-t} + C_1 + C_2t - C_2 + C_5e^{-t}) = 0$$
$$(-C_1 + C_2 - C_2t - 2C_4e^{-t}) + (C_1 - C_2 + C_2t + 2C_5e^{-t}) = 0$$
$$-2C_4e^{-t} + 2C_5e^{-t} = 0$$

por lo que $C_5 = C_4$ entonces las soluciones

$$x_h = C_1 + C_2t + C_3e^{-t} + C_4e^t$$
$$y_h = C_1 - C_2 + C_2t + C_4e^{-t}$$

las cuales expresadas de forma matricial son

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & e^{-t} & e^t \\ 1 & (t-1) & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

`Solución particular`

Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} D-1 & D^2+1 \\ D^2-1 & D+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

como las soluciones particulares satisfacen al sistema, premultiplicaremos por la inversa de la matriz operacional, esto es:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{D+1}{D^2(1-D^2)} & \frac{-D^2-1}{D^2(1-D^2)} \\ \frac{-D^2+1}{D^2(1-D^2)} & \frac{D-1}{D^2(1-D^2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nótese que existe repetición de raíces tanto en el conjunto solución como en el término a resolver, por lo cual es aconsejable no simplificar.
Si multiplicamos por -1 a la matriz anterior se tendrá:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{D+1}{-D^2(D^2-1)} & \frac{-D^2-1}{-D^2(D^2-1)} \\ \frac{-D^2+1}{-D^2(D^2-1)} & \frac{D-1}{-D^2(D^2-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la operación integró diferencial que nos permite interrelacionar la solución del sistema es:

$$\frac{1}{D^2(D^2-1)}$$

Aplicando dicha operación obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(D+1)\frac{1}{D^2}(-1)+(D^2+1)\frac{1}{D^2}(-2) \\ -(-D^2+1)\frac{1}{D^2}(-1)-(D-1)\frac{1}{D^2}(-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(D+1)(-\frac{1}{2}t^2)+(D^2+1)(-t^2) \\ -(-D^2+1)(-\frac{1}{2}t^2)-(D-1)(-t^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -(-t-\frac{1}{2}t^2)+(-2-t^2) \\ -(1-\frac{1}{2}t^2)-(-2t+t^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2+t-2 \\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1 \end{pmatrix}$$

por lo que la solución del sistema es:

$$\mathbf{x(t)=C_1+C_2t+C_3e^{-t}+C_4e^{t}-\frac{1}{2}t^2+t-2}$$
$$\mathbf{y(t)=C_1-C_2+C_2t+C_4e^{-t}-\frac{1}{2}t^2+2t-1}$$

Ejemplo 2.10 *Determinar si es posible, un sistema de ecuaciones diferenciales que tenga por solución a las funciones siguientes*

$$x(t) = C_1 + C_2e^{2t} \tag{2.38}$$
$$y(t) = -C_1 + C_2e^{2t} \tag{2.39}$$

Solución
De las ecuaciones anteriores se deduce lo siguiente

1. El sistema debe ser homogéneo

2. Como el número de funciones $x(t)$ y $y(t)$ es igual al número de constantes C_1 y C_2, el sistema es de primer orden en x y y.

3. El sistema es de coeficientes constantes y la ecuación característica de su matriz tiene como raíces o valores característicos a $D_1 = 0$ y $D_2 = 2$.

Las soluciones $x(t)$ y $y(t)$ pueden escribirse también como:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

Este problema se puede resolver de las dos maneras siguientes:
a) Premultiplicando (2.40) por la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

recordemos

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{det(A)}$$

encontramos que la inversa de la matriz es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{e^{-2t}}{2} & \frac{e^{-2t}}{2} \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{e^{-2t}}{2} & \frac{e^{-2t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

al derivar con respecto a t se tiene

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{e^{-2t}}{2} & \frac{e^{-2t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e^{-2t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al simplificar

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x'(t) - \frac{1}{2}y'(t) \\ -e^{-2t}x(t) - e^{-2t}y(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}x'(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al separar la ecuaciones anteriores tenemos

$$x'(t) = y'(t) \tag{2.41}$$

$$x'(t) + y'(t) = 2x(t) + 2y(t) \tag{2.42}$$

Sustituyendo en (2.42) $y'(t)$ por $x'(t)$, (2.42) se reduce a:

$$2x'(t) = 2x(t) + 2y(t)$$

$$x'(t) = x(t) + y(t) \tag{2.43}$$

Del mismo modo x' por y' en (2.42)

$$2y'(t) = 2x(t) + 2y(t)$$

$$y'(t) = x(t) + y(t) \tag{2.44}$$

El sistema buscado es entonces:

$$\begin{matrix} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{matrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

b) Otra forma es determinando la matriz de coeficientes del sistema.
De (2.40)

$$\overline{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

la cual es una matriz fundamental.
Por lo que podemos obtener (e^{At}) a partir de ella; es decir:

$$e^{At} = \overline{\phi}(t)\overline{C}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

si sustituimos $t = 0$ en (α) y aplicamos la propiedad de e^{At} que dice $e^{At}\big|_{t=0} = I$ se tiene

$$I = \overline{\phi}(0)\overline{C}$$

es decir

$$\overline{C} = \left[\overline{\phi}(0)\right]^{-1} \text{...}(\beta)$$

sustituyendo (β) en (α)

$$e^{At} = \overline{\phi}(t)\left[\overline{\phi}(0)\right]^{-1}$$

esto es

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ -1 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$$

sabemos además que

$$A = \frac{d}{dt}\left(e^{At}\right)\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

finalmente sabemos que

$$\overline{x}^{'}(t) = A\overline{x}(t)$$

por lo que el sistema buscado es

$$\begin{pmatrix} x^{'}(t) \\ y^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.11 *Determinar de ser posible, un sistema de ecuaciones diferenciales que tengan por solución a las funciones siguientes:*

$$x(t) = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{-3t} \tag{2.45}$$

$$y(t) = -C_1 - C_2e^{-t} - 3C_3e^{-3t} \tag{2.46}$$

de las ecuaciones anteriores se deduce

1. El sistema que se busca es homogéneo pues las ecuaciones anteriores contienen soluciones fundamentales $\{1, e^{-t}, e^{-3t}\}$ y tres constantes arbitrarias C_1, C_2, C_3.

2. El sistema es de coeficientes constantes, ya que la ecuación característica tiene como valores propios a $\lambda_1 = 0, \lambda_1 = -1$ y $\lambda_3 = -3$.

3. La suma del orden de las derivadas en x y en y es tres y el sistema tiene únicamente dos funciones de x y y por lo que el sistema puede ser:

- De segundo orden en x y primer orden en y

- De segundo orden en y y primer orden en x

Considérese el primer caso; para ello generaremos una tercera ecuación diferencial derivando (2.45) respecto al tiempo para tener un sistema con tres constantes arbitrarias y tres funciones

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-3t} & (2.47)\\ x^{'}(t) &= -C_2 e^{-t} - 3C_3 e^{-3t} & (2.48)\\ y(t) &= C_1 - C_2 e^{-t} - 3C_3 e^{-3t} & (2.49) \end{aligned}$$

escribiendo en forma matricial este sistema se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ x^{'} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-t} & e^{-3t} \\ 0 & -e^{-t} & -3e^{-3t} \\ -1 & -e^{-t} & -3e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

al multiplicar toda la expresión por la matriz inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-t} & e^{-3t} \\ 0 & -e^{-t} & -3e^{-3t} \\ -1 & -e^{-t} & -3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

se obtiene lo siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2}e^{t} & -e^{t} & \frac{3}{2}e^{t} \\ -\frac{1}{2}e^{3t} & 0 & -\frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^{'} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

al derivar la expresión anterior con respecto de t se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2}e^{t} & -e^{t} & \frac{3}{2}e^{t} \\ -\frac{1}{2}e^{3t} & 0 & -\frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ x^{''} \\ y^{'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}e^{t} & -e^{t} & \frac{3}{2}e^{t} \\ -\frac{3}{2}e^{3t} & 0 & -\frac{3}{2}e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^{'} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

al desarrollar las multiplicaciones y sumas respectivas nos encontramos con

$$x'' - y' = 0 \tag{2.50}$$
$$3x + x' - 2x'' + 3y' + 3y = 0 \tag{2.51}$$
$$x' + 3x + y' + 3y = 0 \tag{2.52}$$

El sistema de ecuaciones requerido es finalmente.

$$x'' - y' = 0 \tag{2.53}$$
$$x' + 3x + y' + 3y = 0 \tag{2.54}$$

ya que la ecuación (2.51) se reduce a la ecuación (2.52) al sustituir x'' por y'.
Si las soluciones fueran tales que el sistema no fuera homogéneo, se procede de la siguiente manera.

Ejemplo 2.12 *Determinar el sistema de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son:*

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 - t \tag{2.55}$$
$$y(t) = -C_1 - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{2}{3} \tag{2.56}$$

Separando las soluciones del sistema homogéneo asociado al sistema no homogéneo se procede como en el caso anterior para obtener el sistema homogéneo.
Por otro lado sabemos

$$\begin{cases} x_p = \frac{1}{2}t^2 - t \\ y_p = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{2}{3} \end{cases} \tag{2.57}$$

verifican al sistema no homogéneo; obteniéndose de este modo los términos independientes de cada ecuación del sistema es decir:

$$\overline{x}_p' = A\overline{x}_p + \overline{b}(t) \Longrightarrow \overline{b}(t) = \overline{x}_p' - A\overline{x}_p$$

de (2.53) sabemos

$$b_1(t) = x_p'' - y_p'$$

y sustituyendo (2.57) se obtiene que:

$$b_1(t) = (1) - (-t+1) = 1 + t - 1 = t$$

de (2.54)

$$b_2(t) = x_p^{'} + 3x_p + y_p^{'} + 3y_p$$

al sustituir (2.57) se tiene que:

$$\begin{gathered} b_2(t) = (t-1) + (\tfrac{3}{2}t^2 - 3t) + (-t+1) + (-\tfrac{3}{2}t^2 + 3t + 2) \\ b_2(t) = 2 \end{gathered}$$

luego el sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\left\{ \begin{array}{c} x^{''} - y^{'} = t \\ x^{'} + 3x + y^{'} + 3y = 2 \end{array} \right.$$

Ver **ejemplo 2.8**.

2.3. *Ejercicios Resueltos*

A continuación se presentan algunos ejercicios para reforzar lo aprendido con anterioridad.

1. Obtener la solución general de

$$\begin{aligned} x^{'} &= x + y - t - 1 && (2.58) \\ y^{'} &= 4x + y - 4t - 2 && (2.59) \end{aligned}$$

`Solución:`
Este sistema puede escribirse en términos de $D = \frac{d}{dt}$ como:

$$\begin{pmatrix} D-1 & -1 \\ -4 & D-1 \end{pmatrix} \overline{x} = \begin{pmatrix} -t-1 \\ -4t-2 \end{pmatrix}$$

`solución homogénea:`

$$\begin{aligned} x^{'} &= x + y && (2.60) \\ y^{'} &= 4x + y && (2.61) \end{aligned}$$

El sistema homogéneo se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} D-1 & -1 \\ -4 & D-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el polinomio característico del sistema es:

$$\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -4 & D-1 \end{vmatrix} = (D-1)^2 - 4 = D^2 - 2D - 3 = (D-3)(D+1) = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = 3 \text{ y } D_2 = -1$$

por lo que el conjunto fundamental de solución es:

$$\{e^{3t}, e^{-t}\}$$

se plantearan las soluciones del sistema como:

$$\begin{aligned} x &= C_1e^{3t} + C_2e^{-t} \\ y &= C_3e^{3t} + C_4e^{-t} \end{aligned}$$

sustituyendo las expresiones anteriores en cualquier ecuación de (2.60) se tiene:

$$\begin{gathered} (D-1)x - y = 0 \\ (D-1)(C_1e^{3t} + C_2e^{-t}) - (C_3e^{3t} + C_4e^{-t}) = 0 \\ (3-1)C_1e^{3t} + (-1-1)C_2e^{-t} - C_3e^{3t} - C_4e^{-t} = 0 \\ (\mathbf{2C_1} - \mathbf{C_3})e^{3t} + (-\mathbf{2C_2} - \mathbf{C_4})e^{-t} = 0 \end{gathered}$$

se encuentra que $C_3 = 2C_1$ y que $C_4 = -2C_2$ dando como resultado

$$\begin{aligned} x_h &= C_1e^{3t} + C_2e^{-t} \\ y_h &= 2C_1e^{3t} - 2C_2e^{-t} \end{aligned}$$

`solución particular:`
como la solución particular satisface al sistema tenemos:

$$\begin{pmatrix} D-1 & -1 \\ -4 & D-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-1 \\ -4t-2 \end{pmatrix}$$

premultiplicando por la inversa del sistema obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-1}{D^2-2D-3} & \frac{1}{D^2-2D-3} \\ \frac{4}{D^2-2D-3} & \frac{D-1}{D^2-2D-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t-1 \\ -4t-2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-1}{D^2-2D-3}(-t-1) + \frac{1}{D^2-2D-3}(-4t-2) \\ \frac{4}{D^2-2D-3}(-t-1) + \frac{D-1}{D^2-2D-3}(-4t-2) \end{pmatrix}$$

Nótese que no existe repetición de raíces entre la solución homogénea y la particular por lo cual procederemos a simplificar, esto es:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{D^2-2D-3}(-1+t+1-4t-2) \\ \frac{1}{D^2-2D-3}(-4t-4-4+4t+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{D^2-2D-3}(-3t-2) \\ \frac{1}{D^2-2D-3}(-6) \end{pmatrix}$$

recordemos

$$\begin{array}{r|l} & -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}D + \ldots \\ \hline -3-2D & 1 \\ & -1 - \frac{2}{3}D \\ & \qquad \frac{2}{3}D + \frac{4}{9}D^2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\frac{1}{3} + \frac{2}{9}D)(-3t-2) \\ (-\frac{1}{3} + \frac{2}{9}D)(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{2}{3} - \frac{6}{9} \\ 2 \end{pmatrix}$$

al desarrollar se encuentra

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

por lo que la solución general del sistema es:

$$\mathbf{x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t} + t}$$
$$\mathbf{y(t) = 2C_1e^{3t} - 2C_2e^{-t} + 2}$$

ó bien:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Resolver

$$x' = -x + 3y \tag{2.62}$$
$$y' = -2x + 4y \tag{2.63}$$

sujeto a

$$\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución

El sistema se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} D+1 & -3 \\ 2 & D-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el polinomio característico del sistema

$$\begin{vmatrix} D+1 & -3 \\ 2 & D-4 \end{vmatrix} = (D+1)(D-4) + 6 = D^2 - 3D + 2 = (D-1)(D-2) = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = 1 \text{ y } D_2 = 2$$

por lo que el conjunto fundamental del sistema es:

$$\{e^t, e^{2t}\}$$

plantearemos la solución:

$$\mathbf{x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}}$$

De la ecuación (2.62)

$$(D+1)x - 3y = 0$$
$$y = \tfrac{1}{3}(D+1)[C_1 e^t + C_2 e^{2t}]$$
$$\mathbf{y = \tfrac{2}{3} C_1 e^t + C_2 e^{2t}}$$

Aplicando las condiciones se forma el siguiente sistema:

$$2 = C_1 + C_2$$
$$1 = \tfrac{2}{3} C_1 + C_2$$

cuya solución es $C_1 = 3$ y $C_2 = -1$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores se tiene:

$$\mathbf{x(t) = 3e^t - e^{2t}}$$
$$\mathbf{y(t) = 2e^t - e^{2t}}$$

3. Resolver

$$x'' + y' + x + 3y = t$$
$$2x'' + 2y' + 2x + 7y = 3$$

Solución

Al aplicar el operador derivada el sistema se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} D^2+1 & D+3 \\ 2D^2+2 & 2D+7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}$$

`Solución homogénea:`

el sistema a resolver es:

$$x'' + y' + x + 3y = 0 \quad (2.64)$$
$$2x'' + 2y' + 2x + 7y = 0 \quad (2.65)$$

cuya representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} D^2+1 & D+3 \\ 2D^2+2 & 2D+7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que tiene como polinomio característico a

$$\begin{vmatrix} D^2+1 & D+3 \\ 2D^2+2 & 2D+7 \end{vmatrix} = (D^2+1)(2D+7) - (2D^2+2)(D+3) = D^2+1 = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = i \text{ y } D_2 = -i$$

por lo que el conjunto fundamental de solución es:

$$\{cos(t), sen(t)\}$$

Sea

$$x_h = C_1 cos(t) + C_2 sen(t)$$

de la ecuación(2.64)

$$\begin{gathered}(D+3)y=-(D^2+1)x\\(D+3)y=-(D^2+1)[C_1cos(t)+C_2sen(t)]\\(D+3)y=-(-1+1)[C_1cos(t)+C_2sen(t)]\\(D+3)y=0\\y_h=\frac{0}{D+3}+\frac{C_3}{e^{3t}}=C_3e^{-3t}\end{gathered}$$

Como $\mathbf{e^{-3t}}$ no aparece en el conjunto fundamental de soluciones se concluye que $C_3=0$, por lo que:

$$y_h=0$$

`Solución particular:`

El sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix}D^2+1 & D+3\\2D^2+2 & 2D+7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_p\\y_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\3\end{pmatrix}$$

premultiplicando por la inversa del sistema

$$\begin{pmatrix}x_p\\y_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2D+7}{D^2+1} & -\frac{D+3}{D^2+1}\\-\frac{2D^2+2}{D^2+1} & \frac{D^2+1}{D^2+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\3\end{pmatrix}$$

Se observa que no existen raíces repetidas y por lo tanto:

$$\begin{pmatrix}x_p\\y_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2D+7}{D^2+1}(t)-\frac{D+3}{D^2+1}(3)\\-\frac{2D^2+2}{D^2+1}(t)+\frac{D^2+1}{D^2+1}(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{D^2+1}(7t-7)\\\frac{1}{D^2+1}(-2t+3)\end{pmatrix}$$

esto implica que:

$$\begin{pmatrix}x_p\\y_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7t-7\\-2t+3\end{pmatrix}$$

sumando las soluciones homogénea y particular se encuentra uno con:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x(t)=C_1cos(t)+C_2sen(t)+7t-7}\\&\mathbf{y(t)=-2t+3}\end{aligned}$$

Este último resultado ($y(t)$) se obtiene si de la segunda ecuación se resta el doble de la primera.

4. Resolver

$$x' + 2x + 3y = t$$
$$-x + y' - 2y = 3$$

sujeto a

$$\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución

El sistema se puede representar de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} D+2 & 3 \\ -1 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución homogénea:

El sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} x' + 2x + 3y &= 0 \quad (2.66) \\ -x + y' - 2y &= 0 \quad (2.67) \end{aligned}$$

cuya representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} D+2 & 3 \\ -1 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el polinomio característico del sistema es:

$$\begin{vmatrix} D+2 & 3 \\ -1 & D-2 \end{vmatrix} = (D+2)(D-2) + 3 = D^2 - 1 = (D+1)(D-1) = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = -1 \text{ y } D_2 = 1$$

por lo que el conjunto fundamental solución es:

$$\{e^t, e^{-t}\}$$

Para este caso propondremos:

$$y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}$$

de la ecuación (2.67)

$$\begin{gathered} -x + (D-2)y = 0 \\ x = (D-2)y \\ x = (D-2)[C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}] \\ x = (-1-2)C_1 e^{-t} + (1-2)C_2 e^{t} \end{gathered}$$

por lo que

$$x_h = -3C_1 e^{-t} - C_2 e^{t}$$

`Solución particular:`

El sistema a resolver es

$$\begin{pmatrix} D+2 & 3 \\ -1 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aplicando Crammer se tiene

$$x_p = \frac{1}{D^2-1} \begin{vmatrix} t & 3 \\ 3 & D-2 \end{vmatrix} = \frac{D-2}{D^2-1} t - \frac{3}{D^2-1} 3$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-1} \begin{vmatrix} D+2 & t \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2-1} t + \frac{D+2}{D^2-1} 3$$

Nótese que no existe repetición de raíces, por lo tanto:

$$\begin{gathered} x_p = \tfrac{1}{D^2-1}(1-2t-9) = \tfrac{1}{D^2-1}(-2t-8) \\ y_p = \tfrac{1}{D^2-1}(t+6) \end{gathered}$$

Al desarrollar

$$\begin{gathered} x_p = 2t + 8 \\ y_p = -t - 6 \end{gathered}$$

por lo que la solución buscada es:

$$\begin{gathered} x(t) = -3C_1 e^{-t} - C_2 e^{t} + 2t + 8 \\ y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - t - 6 \end{gathered}$$

Sustituyendo las condiciones en la solución general se forma el siguiente sistema:

$$6 = -3C_1 - C_2 + 8$$
$$-5 = C_1 + C_2 - 6$$

Al resolver el sistema se encuentra que $C_1 = \frac{1}{2}$ y $C_2 = \frac{1}{2}$.
por lo que la solución es:

$$\mathbf{x(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t} + 2t + 8}$$
$$\mathbf{y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t} - t - 6}$$

5. Resolver

$$x' - 2x + y - z = 1$$
$$-2x + y' + y - 2z = 0$$
$$-x + y + z' - 2z = 2$$

este sistema puede ser representado en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} D-2 & 1 & -1 \\ -2 & D+1 & -2 \\ -1 & 1 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución
cuyo polinomio característico es:

$$\begin{vmatrix} D-2 & 1 & -1 \\ -2 & D+1 & -2 \\ -1 & 1 & D-2 \end{vmatrix} = D^3 - 3D^2 + 3D - 1 = (D-1)^3 = 0$$

`Solución homogénea:`
El sistema a resolver es:

$$x' - 2x + y - z = 0 \tag{2.68}$$
$$-2x + y' + y - 2z = 0 \tag{2.69}$$
$$-x + y + z' - 2z = 0 \tag{2.70}$$

cuya representación matricial en términos del operador derivada es:

$$\begin{pmatrix} D-2 & 1 & -1 \\ -2 & D+1 & -2 \\ -1 & 1 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las raíces del polinomio característico son:

$$D_1 = D_2 = D_3 = 1$$

por lo que el conjunto fundamental de solución del sistema es:

$$\{e^t, te^t, t^2e^t\}$$

De las funciones soluciones se propone a x como la combinación lineal de éste conjunto fundamental; es decir:

$$x_h = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t$$

A fin de resolver el sistema homogéneo lo primero que se tiene que hacer es eliminar una de las variables de dicho sistema, que en este caso será z.
Si multiplicamos a (2.68) por menos dos y la sumamos a (2.69) tendremos:

$$\begin{gathered} (-2)(x' - 2x + y - z = 0) + (-2x + y' + y - 2z = 0) \\ (-2x' + 4x - 2y + 2z = 0) + (-2x + y' + y - 2z = 0) \\ -2x' + 2x + y' - y = 0 \\ -(2D-2)x + (D-1)y = 0 \end{gathered}$$

Al desarrollar

$$\begin{gathered} (D-1)y = 2(D-1)x \\ (D-1)y = 2(D-1)[C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t] \\ (D-1)y = 2(1-1)C_1e^t + 2e^tC_2Dt + 2e^tC_3Dt^2 \\ (D-1)y = 2C_2e^t + 4C_3te^t \\ y = \tfrac{2C_2}{D-1}e^t + \tfrac{4C_3}{D-1}te^t + C_4e^t \\ y = e^t(2C_2)\tfrac{1}{D}(1) + e^t(4C_3)\tfrac{1}{D}(t) + C_4e^t \\ y_h = 2C_2te^t + 2C_3t^2e^t + C_4e^t \end{gathered}$$

Finalmente de la ecuación (2.68) se obtiene z

$$
\begin{gathered}
(D-2)x+y-z=0\\
z=(D-2)x+y\\
z=(D-2)[C_1e^t+C_2te^t+C_3t^2e^t]+[2C_2te^t+2C_3t^2e^t+C_4e^t]\\
z=(1-2)C_1e^t+e^tC_2(D-1)t+e^tC_3(D-1)t^2+2C_2te^t+2C_3t^2e^t+C_4e^t\\
z=-C_1e^t+C_2e^t-C_2te^t+2C_3te^t-C_3t^2e^t+2C_2te^t+2C_3t^2e^t+C_4e^t\\
z_h=-C_1e^t+(1+t)C_2e^t+(2t+t^2)C_3e^t+C_4e^t
\end{gathered}
$$

A fin de eliminar una de las constantes se sustituyen las expresiones de $[x_h, y_h, z_h]$ en la ecuación (2.70):

$$-x+y+(D-2)z=0$$

Desarrollando:

$$
\begin{gathered}
-x+y\\
-(C_1e^t+C_2te^t+C_3t^2e^t)+(2C_2te^t+2C_3t^2e^t+C_4e^t)\\
-C_1e^t-C_2te^t-C_3t^2e^t+2C_2te^t+2C_3t^2e^t+C_4e^t\\
-C_1e^t+C_2te^t+C_3t^2e^t+C_4e^t
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(D-2)z\\
(D-2)(-C_1e^t+(1+t)C_2e^t+(2t+t^2)C_3e^t+C_4e^t)\\
(1-2)(-C_1e^t)+e^tC_2(D-1)(1+t)+e^tC_3(D-1)(2t+t^2)+(1-2)C_4e^t\\
C_1e^t+e^tC_2(1-1-t)+e^tC_3(2+2t-2t-t^2)-C_4e^t\\
C_1e^t-C_2te^t+2C_3e^t-C_3t^2e^t-C_4e^t
\end{gathered}
$$

Realizando la operación planteada:

$$
\begin{gathered}
-x+y+(D-2)z=0\\
(-C_1e^t+C_2te^t+C_3t^2e^t+C_4e^t)+(C_1e^t-C_2te^t+2C_3e^t-C_3t^2e^t-C_4e^t)=0\\
\mathbf{2C_3e^t=0}
\end{gathered}
$$

como $2e^t$ es diferente de cero, esto implica que $C_3=0$.
Por lo que la solución homogénea del sistema es:

$$
\begin{aligned}
x_h&=C_1e^t+C_2te^t\\
y_h&=2C_2te^t+C_4e^t\\
z_h&=(-C_1+C_4)e^t+(1+t)C_2e^t
\end{aligned}
$$

`Solución particular`

El sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} D-2 & 1 & -1 \\ -2 & D+1 & -2 \\ -1 & 1 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Empleando Crammer se tiene

$$x_p = \frac{1}{(D-1)^3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & D+1 & -2 \\ 2 & 1 & D-2 \end{vmatrix} = \frac{D^2-D}{(D-1)^3}(1) + \frac{D-1}{(D-1)^3}(2)$$

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^3} \begin{vmatrix} D-2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & D-2 \end{vmatrix} = \frac{2D-2}{(D-1)^3}(1) - \frac{2}{(D-1)^3}(2)$$

$$z_p = \frac{1}{(D-1)^3} \begin{vmatrix} D-2 & 1 & 1 \\ -2 & D+1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{D-1}{(D-1)^3}(1) + \frac{D^2-D}{(D-1)^3}(2)$$

Nótese que no existe repetición de raíces, lo que nos permite simplificar las expresiones anteriores a:

$$x_p = \tfrac{1}{(D-1)^3}(-2) = 2$$
$$y_p = \tfrac{1}{(D-1)^3}(-6) = 6$$
$$z_p = \tfrac{1}{(D-1)^3}(-1) = 1$$

por lo que la solución del sistema es:

$$\mathbf{x(t) = C_1e^t + C_2te^t + 2}$$
$$\mathbf{y(t) = 2C_2te^t + C_4e^t + 6}$$
$$\mathbf{z(t) = (-C_1 + C_4)e^t + (1+t)C_2e^t + 1}$$

6. Dado el siguiente sistema

$$x'' + 2x' + x - 3y' - 3y = 0$$
$$2x + y' - 4y = 0$$

sujeto a

$$\{y(0) = 0, y^{'}(0) = 0, y^{''}(0) = 1\}$$

Obtener las condiciones faltantes.

Solución

Determinación de las condiciones restantes:

De la ecuación

$$2x + y^{'} - 4y = 0$$

sustituyendo las condiciones se tiene

$$\begin{gathered} 2x(0) + y^{'}(0) - 4y(0) = 0 \\ 2x(0) + 0 - 4(0) = 0 \\ 2x(0) = 0 \\ \mathbf{x(0) = 0} \end{gathered}$$

Derivando la ecuación anterior se tiene:

$$2x^{'} + y^{''} - 4y^{'} = 0$$

sustituyendo las condiciones

$$\begin{gathered} 2x^{'}(0) + y^{''}(0) - 4y^{'}(0) = 0 \\ 2x^{'}(0) + 1 - 0 = 0 \\ \mathbf{x^{'}(0) = -\frac{1}{2}} \end{gathered}$$

De la ecuación

$$x^{''} + 2x^{'} + x - 3y^{'} - 3y = 0$$

Sustituyendo las condiciones

$$\begin{gathered} x^{''}(0) + 2x^{'}(0) + x(0) - 3y^{'}(0) - 3y(0) = 0 \\ x^{''}(0) - 1 + 0 - 0 - 0 = 0 \\ \mathbf{x^{''}(0) = 1} \end{gathered}$$

7. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x^{'} &= x + 3y - 3e^{2t} \\ y^{'} &= 4x + 2y - 4e^{t} \end{aligned}$$

Este sistema se puede expresar en términos del operador derivada como:

$$\begin{pmatrix} D-1 & -3 \\ -4 & D-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{2t} \\ -4e^{t} \end{pmatrix}$$

Solución

`Solución homogénea:`

El sistema a resolver es:

$$x' = x + 3y \qquad (2.71)$$

$$y' = 4x + 2y \qquad (2.72)$$

cuya representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} D-1 & -3 \\ -4 & D-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

siendo el polinomio característico del sistema:

$$\begin{vmatrix} D-1 & -3 \\ -4 & D-2 \end{vmatrix} = (D-1)(D-2) - 12 = D^2 - 3D - 10 = (D-5)(D+2) = 0$$

`Solución homogénea:`

Del polinomio característico se observa que las raíces son:

$$D_1 = 5 \text{ y } D_2 = -2$$

por lo que tomaremos a:

$$x_h = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-2t}$$

empleando la ecuación (2.71)

$$(D-1)x - 3y = 0$$
$$y = \tfrac{1}{3}(D-1)[C_1 e^{5t} + C_2 e^{-2t}]$$
$$y = \tfrac{1}{3}C_1(5-1)e^{5t} + \tfrac{1}{3}C_2(-2-1)e^{-2t}$$
$$y_h = \tfrac{4}{3}C_1 e^{5t} - C_2 e^{-2t}$$

`Solución particular:`

$$\begin{pmatrix} D-1 & -3 \\ -4 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{2t} \\ -4e^{t} \end{pmatrix}$$

premultiplicando por la inversa se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-2}{D^2-3D-10} & \frac{3}{D^2-3D-10} \\ \frac{4}{D^2-3D-10} & \frac{D-1}{D^2-3D-10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3e^{2t} \\ -4e^{t} \end{pmatrix}$$

Comparando los términos independientes con los del sistema homogéneo se observa que no existe repetición de raíces, por lo que:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-2}{D^2-3D-10}(-3e^{2t}) + \frac{3}{D^2-3D-10}(-4e^{t}) \\ \frac{4}{D^2-3D-10}(-3e^{2t}) + \frac{D-1}{D^2-3D-10}(-4e^{t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{D^2-3D-10}(-12e^{t}) \\ \frac{1}{D^2-3D-10}(-12e^{2t}) \end{pmatrix}$$

Aplicando la primera propiedad del operador derivada

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1)^2-3(1)-10}(-12e^{t}) \\ \frac{1}{(2)^2-3(2)-10}(-12e^{2t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12}{-12}e^{t} \\ \frac{-12}{-12}e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Finalmente la solución del sistema es:

$$\begin{cases} \mathbf{x(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{-2t} + e^{t}} \\ \mathbf{y(t) = \frac{4}{3}C_1e^{5t} - C_2e^{-2t} + e^{2t}} \end{cases}$$

8. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Esta ecuación puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} D-2 & -1 \\ 4 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

`Solución homogénea:`

El sistema a resolver es:

$$x^{'} = 2x + y \tag{2.73}$$
$$y^{'} = -4x + 2y \tag{2.74}$$

cuya representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} D-2 & -1 \\ 4 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde el polinomio característico del sistema es:

$$\begin{vmatrix} D-2 & -1 \\ 4 & D-2 \end{vmatrix} = (D-2)^2 + 4 = D^2 - 4D + 8 = 0$$

siendo las raíces:

$$D_1 = 2 + 2i \text{ y } D_2 = 2 - 2i$$

Siendo el conjunto fundamental solución del sistema

$$\{e^{2t}cos(2t), e^{2t}sen(2t)\}$$

por lo que plantearemos la solución:

$$x_h = C_1e^{2t}cos(2t) + C_2e^{2t}sen(2t)$$

de la expresión (2.73)

$$(D-2)x - y = 0$$

podemos encontrar la solución de y_h esto es:

$$y = (D-2)x$$
$$y = (D-2)[C_1e^{2t}cos(2t) + C_2e^{2t}sen(2t)]$$
$$y = e^{2t}D[C_1cos(2t) + C_2sen(2t)]$$
$$y_h = -2C_1e^{2t}sen(2t) + 2C_2e^{2t}cos(2t)$$

`Solución particular:`

El sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} D-2 & -1 \\ 4 & D-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

si premultiplicamos ambos lados por la inversa de la matriz operacional se tendrá:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-2}{D^2-4D+8} & \frac{1}{D^2-4D+8} \\ \frac{-4}{D^2-4D+8} & \frac{D-2}{D^2-4D+8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-2}{D^2-4D+8}te^{2t} + \frac{1}{D^2-4D+8}e^{2t} \\ \frac{-4}{D^2-4D+8}te^{2t} + \frac{D-2}{D^2-4D+8}e^{2t} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que no se tiene repetición de raíces, por lo que:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{D^2-4D+8}(2e^{2t}) \\ \frac{1}{D^2-4D+8}(-4te^{2t}) \end{pmatrix}$$

Aplicando la primera y tercera propiedad

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(2)^2-4(2)+8}(2e^{2t}) \\ -4e^{2t}\frac{1}{(D+2)^2-4(D+2)+8}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4}e^{2t} \\ -4e^{2t}\frac{1}{D^2+4}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$x(t) = C_1e^{2t}cos(2t) + C_2e^{2t}sen(2t) + \tfrac{1}{2}e^{2t}$$
$$y(t) = -2C_1e^{2t}sen(2t) + 2C_2e^{2t}cos(2t) - te^{2t}$$

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene el siguiente sistema:

$$2 = C_1 + \tfrac{1}{2}$$
$$2 = 2C_2$$

cuya solución es $C_1 = \frac{3}{2}$ y $C_2 = 1$,sustituyendo los valores encontrados se tiene:

$$\mathbf{x(t) = \tfrac{3}{2}e^{2t}cos(2t) + e^{2t}sen(2t) + \tfrac{1}{2}e^{2t}}$$
$$\mathbf{y(t) = -3e^{2t}sen(2t) + 2e^{2t}cos(2t) - te^{2t}}$$

9. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x'' + 3x' + y'' = tsen(t)$$
$$x' + 3x + y'' + y' = t^2$$

Solución

`Solución homogénea:`

El sistema a resolver es:

$$x'' + 3x' + y'' = 0 \quad (2.75)$$
$$x' + 3x + y'' + y' = 0 \quad (2.76)$$

Este sistema se puede representar de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} D^2+3D & D^2 \\ D+3 & D^2+D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico del sistema

$$\begin{vmatrix} D^2+3D & D^2 \\ D+3 & D^2+D \end{vmatrix} = (D^2+3D)(D^2+D) - (D+3)(D^2) = D^3(D+3) = 0$$

donde sus raíces son:

$$D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 0, D_4 = -3$$

Por lo que el conjunto fundamental solución es:

$$\{1, t, t^2, e^{-3t}\}$$

Consideremos la solución:

$$y_h = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 e^{-3t}$$

De la expresión (2.76)

$$(D+3)x + (D^2+D)y = 0$$
$$(D+3)x = -(D^2+D)[C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4e^{-3t}]$$
$$(D+3)x = -C_2 - 2C_3 - 2C_3t - 6C_4e^{-3t}$$
$$x = -\tfrac{C_2}{D+3} - \tfrac{2C_3}{D+3} - \tfrac{2C_3}{D+3}t - \tfrac{6C_4}{D+3}e^{-3t} + C_5e^{-3t}$$

$$\begin{array}{r|l} & \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9}D + \dots \\ \hline 3+D & \quad 1 \\ & -1 - \tfrac{1}{3}D \\ & \qquad \tfrac{1}{3}D + \tfrac{1}{9}D^2 \end{array}$$

$$x = -\tfrac{1}{3}C_2 - \tfrac{2}{3}C_3 - 2C_3(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9}D)t - 6C_4e^{-3t}\tfrac{1}{D}(1) + C_5e^{-3t}$$
$$x_h = -\tfrac{1}{3}C_2 - \tfrac{4}{9}C_3 - \tfrac{2}{3}C_3t - 6C_4te^{-3t} + C_5e^{-3t}$$

A fin de eliminar una de las cinco constantes sustituiremos en la ecuación (2.75)

$$(D^2+3D)x + D^2y = 0$$
$$(D^2+3D)[-\tfrac{1}{3}C_2 - \tfrac{4}{9}C_3 - \tfrac{2}{3}C_3t - 6C_4te^{-3t} + C_5e^{-3t}] + D^2[C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4e^{-3t}] = 0$$
$$-2C_3 - 6C_4e^{-3t}D(D-3)t + 2C_3 + 9C_4e^{-3t} = 0$$
$$27C_4e^{-3t} = 0$$

esto implica que $\mathbf{C_4 = 0}$, por lo que al sustituir se tiene

$$x_h = -\tfrac{1}{3}C_2 - \tfrac{4}{9}C_3 - \tfrac{2}{3}C_3t + C_5e^{-3t}$$
$$y_h = C_1 + C_2t + C_3t^2$$

`Solución particular`

El sistema a resolver es

$$\begin{pmatrix} D^2+3D & D^2 \\ D+3 & D^2+D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tsen(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Empleando Crammer se tiene

$$x_p = \frac{1}{D^3(D+3)} \begin{vmatrix} tsen(t) & D^2 \\ t^2 & D^2+D \end{vmatrix} = \frac{D^2+D}{D^3(D+3)}tsen(t) - \frac{D^2}{D^3(D+3)}t^2$$

$$y_p = \frac{1}{D^3(D+3)} \begin{vmatrix} D^2+3D & tsen(t) \\ D+3 & t^2 \end{vmatrix} = -\frac{D+3}{D^3(D+3)}tsen(t) + \frac{D^2+3D}{D^3(D+3)}t^2$$

Simplificando

$$x_p = \frac{D+1}{D^2(D+3)}tsen(t) - \frac{1}{D(D+3)}t^2$$
$$y_p = -\frac{1}{D^3}tsen(t) + \frac{D+3}{D^2(D+3)}t^2$$

Obsérvese en este caso que los primeros términos de x_p y y_p no contienen raíces repetidas, por lo que pueden integrarse separadamente y simplificando lo más que sea posible cada término, pudiéndose emplear la cuarta propiedad del operador diferencial.

En el caso de los segundos términos tenemos raíces repetidas, por lo que las operaciones integródiferenciables deben interrelacionarse; es decir

$$x_p = \frac{D+1}{D^2(D+3)}tsen(t) - \frac{1}{D(D+3)}t^2$$

para la expresión

$$\frac{D+1}{D^2(D+3)}tsen(t)$$

si aplicamos la cuarta propiedad se tendrá

$$\frac{D+1}{D^2(D+3)}tsen(t)$$
$$\left(t + \frac{d}{dD}\right)\frac{D+1}{D^2(D+3)}sen(t)$$
$$t\frac{D+1}{D^2(D+3)}sen(t) + \frac{D^2(D+3)-(D+1)(3D^2+6D)}{D^4(D+3)^2}sen(t)$$
$$t\frac{D+1}{D^2(D+3)}sen(t) + \frac{-2D^3-6D^2-6D}{D^4(D^2+6D+9)}sen(t)$$

Aplicando segunda propiedad a la expresión anterior

$$-t\frac{D+1}{D+3}sen(t) + \frac{2(-2D+3)}{2(3D+4)}sen(t)$$
$$-t\frac{D+1}{D+3}\frac{D-3}{D-3}sen(t) + \frac{-2D+3}{3D+4}\frac{3D-4}{3D-4}sen(t)$$
$$-t\frac{D^2-2D-3}{D^2-9}sen(t) + \frac{-6D^2+17D-12}{9D^2-16}sen(t)$$
$$\frac{1}{10}t(-2D-4)sen(t) - \frac{1}{25}(17D-6)sen(t)$$

por lo que la expresión

$$\frac{D+1}{D^2(D+3)}tsen(t) = -\frac{1}{5}tcos(t) - \frac{2}{5}tsen(t) - \frac{17}{25}cos(t) + \frac{6}{25}sen(t)$$

Para el caso de la expresión

$$\frac{1}{D+3}t^2$$

Recordemos

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{3}-\frac{1}{9}D+\frac{1}{27}D^2+\ldots \\ \hline 3+D & \;1 \\ & -1-\frac{1}{3}D \\ & \qquad \frac{1}{3}D+\frac{1}{9}D^2 \end{array}$$

Sustituyendo el resultado anterior se tiene

$$\begin{gathered} \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{9}D+\tfrac{1}{27}D^2\right)t^2 \\ \tfrac{1}{3}t^2-\tfrac{2}{9}t+\tfrac{2}{27} \end{gathered}$$

por lo que la expresión

$$\frac{1}{D+3}t^2=\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t+\frac{2}{27}$$

Con los resultados previamente encontrados se tiene

$$\begin{gathered} x_p=\tfrac{D+1}{D^2(D+3)}tsen(t)-\tfrac{1}{D(D+3)}t^2 \\ x_p=-\tfrac{1}{5}tcos(t)-\tfrac{2}{5}tsen(t)-\tfrac{17}{25}cos(t)+\tfrac{6}{25}sen(t)-\tfrac{1}{D}\left(\tfrac{1}{3}t^2-\tfrac{2}{9}t+\tfrac{2}{27}\right) \\ x_p=-\tfrac{1}{5}tcos(t)-\tfrac{2}{5}tsen(t)-\tfrac{17}{25}cos(t)+\tfrac{6}{25}sen(t)-\tfrac{1}{9}t^3+\tfrac{1}{9}t^2-\tfrac{2}{27}t \end{gathered}$$

Del mismo modo

$$\begin{gathered} y_p=-\tfrac{1}{D^3}tsen(t)+\tfrac{D+3}{D^2(D+3)}t^2 \\ y_p=-\left(t+\tfrac{d}{dD}\right)(\tfrac{1}{D^3})sen(t)+(D+3)\left(\tfrac{1}{D^2}\right)\left(\tfrac{1}{3}t^2-\tfrac{2}{9}t+\tfrac{2}{27}\right) \\ y_p=-t\left(\tfrac{1}{D^3}\right)sen(t)-\left(-\tfrac{3}{D^4}\right)sen(t)+(D+3)\left(\tfrac{1}{36}t^4-\tfrac{1}{27}t^3+\tfrac{1}{27}t^2\right) \\ y_p=t\left(\tfrac{1}{D}\right)sen(t)+3sen(t)+\tfrac{4}{36}t^3-\tfrac{3}{27}t^2+\tfrac{2}{27}t+\tfrac{3}{36}t^4-\tfrac{3}{27}t^3+\tfrac{3}{27}t^2 \\ y_p=-tcos(t)+3sen(t)+\tfrac{1}{12}t^4+\tfrac{2}{27}t \end{gathered}$$

Otra manera de obtener el resultado es:

$$\begin{gathered} x_p=\tfrac{D+1}{D^2(D+3)}tsen(t)-\tfrac{1}{D(D+3)}t^2 \\ y_p=-\tfrac{D+3}{D^3(D+3)}tsen(t)+\tfrac{D+3}{D^2(D+3)}t^2 \end{gathered}$$

Empleando la sustitución $sen(t)=e^{ti}$ y aplicando la tercera propiedad se tiene

$$\begin{gathered} x_p=\tfrac{D+1}{D^2(D+3)}tsen(t)-\tfrac{1}{D(D+3)}t^2 \\ x_p=\tfrac{D+1}{D^2(D+3)}te^{ti}-\tfrac{1}{D(D+3)}t^2 \\ x_p=e^{ti}\tfrac{(D+i)+1}{(D+i)^2[(D+i)+3]}t-\tfrac{1}{D(D+3)}t^2 \\ x_p=e^{ti}\tfrac{D+(1+i)}{D^3+(3+3i)D^2+(-3+6i)D-(3+i)}t-\tfrac{1}{D(D+3)}t^2 \end{gathered}$$

$$\begin{array}{r|l} & -\frac{1}{3+i}-\frac{-3+6i}{(3+i)^2}D+\dots \\ \hline -(3+i)+(-3+6i)D & 1 \\ & -1+\frac{-3+6i}{3+i}D \\ & \quad -\frac{-3+6i}{3+i}D+\frac{(-3+6i)^2}{(3+i)^2}D^2 \end{array}$$

Aplicando álgebra compleja se tiene:

$$\frac{1}{3+i}=\frac{1}{3+i}\frac{3-i}{3-i}=\frac{3-i}{10}$$
$$\frac{-3+6i}{(3+i)^2}=\frac{-3+6i}{8+6i}=\frac{-3+6i}{8+6i}\frac{8-6i}{8-6i}=\frac{12+66i}{100}$$

por lo que la expresión

$$\frac{D+1}{D^2(D+3)}tsen(t)=e^{ti}(D+(1+i))\left[-\frac{3-i}{10}-\frac{12+66i}{100}D\right]t$$

Del mismo modo

$$\frac{1}{D+3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}D+\frac{1}{27}D^2$$

Sustituyendo se tiene

$$x_p=e^{ti}(D+(1+i))\left[-\frac{3-i}{10}t-\frac{12+66i}{100}\right]-\frac{1}{D}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{9}D+\frac{1}{27}D^2\right]t^2$$
$$x_p=e^{ti}\left[-\frac{3-i}{10}-\frac{4+2i}{10}t-\frac{-54+78i}{100}\right]-\frac{1}{D}\left[\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t+\frac{2}{27}\right]$$
$$x_p=e^{ti}\left[\left(-\frac{3}{10}+\frac{27}{50}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{39}{50}\right)i-\frac{4+2i}{10}t\right]-\left[\frac{1}{9}t^3-\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{27}t\right]$$
$$x_p=(cos(t)+isen(t))\left[\frac{12}{50}-\frac{34}{50}i-\frac{4}{10}t-\frac{2}{10}ti\right]-\left[\frac{1}{9}t^3-\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{27}t\right]$$

Debido a que en la solución existe la función **seno** , emplearemos la parte imaginaria del producto como nuestra solución, esto es:

$$x_p=-\frac{17}{25}cos(t)-\frac{1}{5}tcos(t)+\frac{6}{25}sen(t)-\frac{2}{5}tsen(t)-\frac{1}{9}t^3+\frac{1}{9}t^2-\frac{2}{27}t$$

Realizando el mismo procedimiento para y_p se tiene:

$$y_p=-\frac{D+3}{D^3(D+3)}tsen(t)+\frac{D+3}{D^2(D+3)}t^2$$
$$y_p=-\frac{1}{D^3}te^{ti}+\frac{D+3}{D^2(D+3)}t^2$$
$$y_p=-e^{ti}\frac{1}{(D+i)^3}t+\frac{D+3}{D^2(D+3)}t^2$$
$$y_p=-e^{ti}\frac{1}{D^3+3D^2i-3D-i}t+\frac{D+3}{D^2(D+3)}t^2$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & -\frac{1}{i}+\frac{3}{(i)^2}D+\dots \\ \hline
-i-3D & 1 \\
 & -1-\frac{3}{i}D \\
 & \quad \frac{3}{i}D+\frac{9}{(i)^2}D^2
\end{array}
$$

Por lo que la expresión de y_p es:

$$y_p = -e^{ti}(i-3D)t + \frac{D+3}{D^2(D+3)}t^2$$

Al desarrollar se tiene:

$$
\begin{gathered}
y_p = -e^{ti}(ti-3) + (D+3)\frac{1}{D^2}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{9}D+\frac{1}{27}D^2\right]t^2 \\
y_p = -(cos(t)+isen(t))(ti-3) + (D+3)\frac{1}{D^2}\left[\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{9}t+\frac{2}{27}\right] \\
y_p = -tcos(t)i + 3cos(t) + tsen(t) + 3sen(t)i + (D+3)\left[\frac{1}{36}t^4-\frac{1}{27}t^3+\frac{1}{27}t^2\right] \\
y_p = (3cos(t)+tsen(t)) + (3sen(t)-tcos(t))i + \frac{1}{12}t^4+\frac{2}{27}t
\end{gathered}
$$

Agrupando términos finalmente se tiene:

$$y_p = 3sen(t) - tcos(t) + \frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{27}t$$

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x(t)} &= \mathbf{-\tfrac{1}{3}C_2-\tfrac{4}{9}C_3-\tfrac{2}{3}C_3t+C_5e^{-3t}-\tfrac{17}{25}cos(t)+\tfrac{6}{25}sen(t)} \\
&\quad \mathbf{-\tfrac{1}{5}tcos(t)-\tfrac{2}{5}tsen(t)-\tfrac{1}{9}t^3+\tfrac{1}{9}t^2-\tfrac{2}{27}t} \\
\mathbf{y(t)} &= \mathbf{C_1+C_2t+C_3t^2+3sen(t)-tcos(t)+\tfrac{1}{12}t^4+\tfrac{2}{27}t}
\end{aligned}
$$

10. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$
\begin{gathered}
x' = 2x+2y-4cos(t) \\
y' = 2x+2y-sen(t)
\end{gathered}
$$

`Solución`

El sistema lo podemos expresar de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} D-2 & -2 \\ -2 & D-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4cos(t) \\ -sen(t) \end{pmatrix}$$

`Solución homogénea:`

Sea el sistema

$$x' = 2x + 2y \tag{2.77}$$
$$y' = 2x + 2y \tag{2.78}$$

el cual, de forma matricial se representa:

$$\begin{pmatrix} D-2 & -2 \\ -2 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} D-2 & -2 \\ -2 & D-2 \end{vmatrix} = (D-2)^2 - 4 = D^2 - 4D = D(D-4) = 0$$

donde sus raíces son

$$D_1 = 0 \text{ y } D_2 = 4$$

esto nos dice que el conjunto fundamental de solución del sistema es:

$$\{1, e^{4t}\}$$

Haciendo

$$x_h = C_1 + C_2 e^{4t}$$

y sustituyendo en la ecuación (2.77)

$$(D-2)x - 2y = 0$$
$$y = \tfrac{1}{2}(D-2)x$$

$$y = \tfrac{1}{2}(D-2)(C_1 + C_2 e^{4t})$$
$$y = \tfrac{1}{2}(-2C_1 + 2C_2 e^{4t})$$
$$y_h = -C_1 + C_2 e^{4t}$$

`Solución particular:`

$$\begin{pmatrix} D-2 & -2 \\ -2 & D-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4cos(t) \\ -sen(t) \end{pmatrix}$$

empleando Crammer se tiene

$$x_p = \frac{1}{D^2-4D}\begin{vmatrix} -4cos(t) & -2 \\ -sen(t) & D-2 \end{vmatrix} = -\frac{D-2}{D^2-4D}(4cos(t)) - \frac{2}{D^2-4D}(sen(t))$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-4D}\begin{vmatrix} D-2 & -4cos(t) \\ -2 & -sen(t) \end{vmatrix} = -\frac{2}{D^2-4D}(4cos(t)) - \frac{D-2}{D^2-4D}(sen(t))$$

Nuevamente obsérvese que no se tienen raíces repetidas, por lo cual

$$x_p = \tfrac{1}{D^2-4D}(2sen(t) + 8cos(t))$$
$$y_p = \tfrac{1}{D^2-4D}(-9cos(t) + 2sen(t))$$

Como ambos términos tienen el mismo argumento, se puede obtener un operador común

$$\frac{1}{D^2-4D}$$

Aplicando segunda propiedad

$$\left.\frac{1}{D^2-4D}\right]_{D^2=-1} = \frac{1}{-4D-1}\frac{-4D+1}{-4D+1} = \frac{1}{17}(4D-1)$$

Sustituyendo la expresión anterior se tiene

$$x_p = \tfrac{1}{17}(4D-1)(2sen(t) + 8cos(t))$$
$$y_p = \tfrac{1}{17}(4D-1)(-9cos(t) + 2sen(t))$$

Desarrollando

$$x_p = \tfrac{1}{17}(4D-1)(2sen(t) + 8cos(t))$$
$$x_p = \tfrac{1}{17}\left[8cos(t) - 32sen(t) - 2sen(t) - 8cos(t)\right]$$
$$x_p = -\tfrac{34}{17}sen(t) = -2sen(t)$$

Del mismo modo

$$y_p = \tfrac{1}{17}(4D-1)(-9cos(t) + 2sen(t))$$
$$y_p = \tfrac{1}{17}\left[36sen(t) + 8cos(t) + 9cos(t) - 2sen(t)\right]$$
$$y_p = \tfrac{1}{17}\left(17cos(t) + 34sen(t)\right) = cos(t) + 2sen(t)$$

Finalmente

$$\mathbf{x(t) = C_1 + C_2 e^{4t} - 2sen(t)}$$
$$\mathbf{y(t) = -C_1 + C_2 e^{4t} + 2sen(t) + cos(t)}$$

11. Resolver

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sen(t) \\ -cos(t) \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Esta ecuación puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} D-3 & 2 \\ -4 & D+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen(t) \\ -cos(t) \end{pmatrix}$$

`Solución homogénea:`

El sistema homogéneo a resolver es:

$$x' = 3x - 2y \tag{2.79}$$
$$y' = 4x - y \tag{2.80}$$

el cual matricialmente es representado como:

$$\begin{pmatrix} D-3 & 2 \\ -4 & D+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es:

$$\begin{vmatrix} D-3 & 2 \\ -4 & D+1 \end{vmatrix} = (D-3)(D+1) + 8 = D^2 - 2D + 5 = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = 1 + 2i \text{ y } D_2 = 1 - 2i$$

por lo que el conjunto fundamental de solución es:

$$\{e^t cos(2t), e^t sen(2t)\}$$

se plantearan las siguientes soluciones

$$x = C_1e^t cos(2t) + C_2e^t sen(2t)$$
$$y = C_3e^t cos(2t) + C_4e^t sen(2t)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.79)

$$\begin{gathered}(D-3)x + 2y = 0\\ (D-3)[C_1e^t cos(2t) + C_2e^t sen(2t)] + 2[C_3e^t cos(2t) + C_4e^t sen(2t)] = 0\\ e^t(D-2)[C_1 cos(2t) + C_2 sen(2t)] + 2[C_3e^t cos(2t) + C_4e^t sen(2t)] = 0\\ e^t[-2C_1 sen(2t) + 2C_2 cos(2t)] - 2e^t[C_1 cos(2t) + C_2 sen(2t)] + 2[C_3e^t cos(2t) + C_4e^t sen(2t)] = 0\\ (-2C_1 + 2C_2)e^t cos(2t) + (-2C_1 - 2C_2)e^t sen(2t) + 2C_3e^t cos(2t) + 2C_4e^t sen(2t) = 0\\ -2(C_1 - C_2)e^t cos(2t) = -2C_3e^t cos(2t)\\ -2(C_1 + C_2)e^t sen(2t) = -2C_4e^t sen(2t)\end{gathered}$$

por lo que $C_3 = C_1 - C_2$ y $C_4 = C_1 + C_2$
las cuales al ser sustituidas se tiene que:

$$x_h = C_1e^t cos(2t) + C_2e^t sen(2t)$$
$$y_h = (C_1 - C_2)e^t cos(2t) + (C_1 + C_2)e^t sen(2t)$$

`Solución particular:`

$$\begin{pmatrix} D-3 & 2 \\ -4 & D+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen(t) \\ -cos(t) \end{pmatrix}$$

empleando Crammer se tiene

$$x_p = \frac{1}{D^2-2D+5}\begin{vmatrix} sen(t) & 2 \\ -cos(t) & D+1 \end{vmatrix} = \frac{D+1}{D^2-2D+5}(sen(t)) + \frac{2}{D^2-2D+5}(cos(t))$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-2D+5}\begin{vmatrix} D-3 & sen(t) \\ -4 & -cos(t) \end{vmatrix} = \frac{4}{D^2-2D+5}(sen(t)) - \frac{D-3}{D^2-2D+5}(cos(t))$$

Como no hay raíces repetidas, se puede reducir a un solo operador:

$$x_p = \tfrac{1}{D^2-2D+5}(sen(t) + 3cos(t))$$
$$y_p = \tfrac{1}{D^2-2D+5}(5sen(t) + 3cos(t))$$

Aplicando la segunda propiedad

$$\left.\frac{1}{D^2-2D+5}\right]_{D^2=-1} = \frac{1}{-2D+4}\frac{-2D-4}{-2D-4} = \frac{1}{10}(D+2)$$

Realizando las operaciones

$$\begin{aligned} x_p &= \tfrac{1}{10}(D+2)(sen(t)+3cos(t)) \\ x_p &= \tfrac{1}{10}(cos(t)-3sen(t)+2sen(t)+6cos(t)) \\ x_p &= \tfrac{7}{10}cos(t)-\tfrac{1}{10}sen(t) \\ y_p &= \tfrac{1}{10}(D+2)(5sen(t)+3cos(t)) \\ y_p &= \tfrac{1}{10}(5cos(t)-3sen(t)+10sen(t)+6cos(t)) \\ y_p &= \tfrac{11}{10}cos(t)+\tfrac{7}{10}sen(t) \end{aligned}$$

Siendo el resultado buscado:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x(t) = C_1 e^t cos(2t) + C_2 e^t sen(2t) + \tfrac{7}{10}cos(t) - \tfrac{1}{10}sen(t)} \\ &\mathbf{y(t) = (C_1 - C_2) e^t cos(2t) + (C_1 + C_2) e^t sen(2t) + \tfrac{11}{10}cos(t) + \tfrac{7}{10}sen(t)} \end{aligned}$$

12. Resolver

$$\begin{aligned} x' - 2x + y &= t^2 e^{3t} sen(t) \\ -2x + y' - 4y &= te^{2t} \end{aligned}$$

Solución

`Solución homogénea:`

El sistema a resolver

$$x' - 2x + y = 0 \tag{2.81}$$

$$-2x + y' - 4y = 0 \tag{2.82}$$

cuya representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} D-2 & 1 \\ -2 & D-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico del sistema

$$\begin{vmatrix} D-2 & 1 \\ -2 & D-4 \end{vmatrix} = (D-2)(D-4)+2 = D^2-6D+10 = 0$$

cuyas raíces son:

$$D_1 = 3 + i \text{ y } D_2 = 3 - i$$

por lo que el conjunto fundamental de solución del sistema es:

$$\{e^{3t}cos(t), e^{3t}sen(t)\}$$

Si planteamos como solución la expresión:

$$x_h = C_1e^{3t}cos(t) + C_2e^{3t}sen(t)$$

De la ecuación (2.81)

$$\begin{gathered}
(D-2)x + y = 0 \\
y = -(D-2)x \\
y = -(D-2)[C_1e^{3t}cos(t) + C_2e^{3t}sen(t)] \\
y = -[e^{3t}C_1(D+1)cos(t) + e^{3t}C_2(D+1)sen(t)] \\
y = -[e^{3t}C_1[-sen(t) + cos(t)] + e^{3t}C_2[cos(t) + sen(t)]] \\
y_h = C_1e^{3t}(sen(t) - cos(t)) - C_2e^{3t}(cos(t) + sen(t))
\end{gathered}$$

`Solución particular:`
El sistema a resolver

$$\begin{pmatrix} D-2 & 1 \\ -2 & D-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2e^{3t}sen(t) \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

Premultiplicando por la inversa del sistema se tiene:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-4}{D^2-6D+10} & -\frac{1}{D^2-6D+10} \\ \frac{2}{D^2-6D+10} & \frac{D-2}{D^2-6D+10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2e^{3t}sen(t) \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D-4}{D^2-6D+10}t^2e^{3t}sen(t) - \frac{1}{D^2-6D+10}te^{2t} \\ \frac{2}{D^2-6D+10}t^2e^{3t}sen(t) + \frac{D-2}{D^2-6D+10}te^{2t} \end{pmatrix}$$

Nótese que existe repetición de raíces en los primeros términos de la solución, mientras que en los segundos términos no se presenta repetición.

Desarrollando por separado:

Es conveniente primero anteponer e^{3t}.

$$\frac{1}{D^2-6D+10}t^2e^{3t}sen(t)$$
$$\frac{1}{(D-3)^2+1}t^2e^{3t}sen(t)$$
$$e^{3t}\frac{1}{(D-3+3)^2+1}t^2sen(t)$$
$$e^{3t}\frac{1}{(D)^2+1}t^2sen(t)$$

Haciendo la sustitución $sen(t) = e^{ti}$ y aplicando tercera propiedad

$$e^{3t}\frac{1}{D^2+1}t^2sen(t)$$
$$e^{3t}\frac{1}{D^2+1}t^2e^{ti}$$
$$e^{3t}e^{ti}\frac{1}{(D+i)^2+1}t^2$$
$$e^{(3+i)t}\frac{1}{D^2+2Di}t^2$$
$$e^{(3+i)t}\frac{1}{D}\frac{1}{D+2i}t^2$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2i} - \frac{1}{(2i)^2}D - \frac{1}{8i}D^2 + \dots \\ \hline 2i + D & \ 1 \\ & -1 - \frac{1}{2i}D \\ & \quad \frac{1}{2i}D + \frac{1}{(2i)^2}D^2 \end{array}$$

por lo que la expresión

$$\frac{1}{D^2-6D+10}t^2e^{3t}sen(t) = e^{(3+i)t}\frac{1}{D}\left[-\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}D + \frac{1}{8}D^2i\right]t^2$$

desarrollando se tiene:

$$e^{(3+i)t}\frac{1}{D}\left[-\frac{1}{2}i + \frac{1}{4}D + \frac{1}{8}D^2i\right]t^2$$
$$e^{(3+i)t}\frac{1}{D}\left[-\frac{i}{2}t^2 + \frac{1}{4}D(t^2) + \frac{i}{8}D^2(t^2)\right]$$
$$e^{(3+i)t}\left[-\frac{i}{2}\left(\frac{t^3}{3}\right) + \frac{1}{4}t^2 + \frac{i}{8}(2t)\right]$$
$$e^{(3+i)t}\left[-\frac{t^3}{6}i + \frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{4}i\right]$$
$$e^{3t}\left[-\frac{t^3}{6}i + \frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{4}i\right](cos(t) + isen(t))$$

Debido a que en nuestra expresión se encuentra el término $\mathbf{sen(x)}$ se empleara solo los términos imaginarios de la expresión anterior, esto es:

$$\frac{1}{D^2-6D+10}t^2e^{3t}sen(t) = e^{3t}\left[-\frac{1}{6}t^3cos(t)+\frac{1}{4}t^2sen(t)+\frac{1}{4}tcos(t)\right]$$

por otro lado

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{D^2-6D+10}te^{2t}\\ \tfrac{1}{(D-3)^2+1}te^{2t}\\ e^{2t}\tfrac{1}{(D-3+2)^2+1}t\\ e^{2t}\tfrac{1}{(D-1)^2+1}t\\ e^{2t}\tfrac{1}{D^2-2D+2}t\end{gathered}$$

Recordemos

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}D+\dots \\ \cline{2-2} 2-2D & 1 \\ & -1+D \\ & \quad -D+D^2 \end{array}$$

por lo que la expresión

$$\frac{1}{D^2-6D+10}te^{2t} = e^{2t}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}D\right]t = e^{2t}\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)$$

Sustituyendo en la expresión solución se tiene

$$\begin{gathered}x_p = (D-4)\left(e^{3t}\left[-\tfrac{1}{6}t^3cos(t)+\tfrac{1}{4}t^2sen(t)+\tfrac{1}{4}tcos(t)\right]\right)-e^{2t}\left(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}\right)\\ x_p = e^{3t}(D-1)\left[-\tfrac{1}{6}t^3cos(t)+\tfrac{1}{4}t^2sen(t)+\tfrac{1}{4}tcos(t)\right]-e^{2t}\left(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}\right)\end{gathered}$$

Aplicando la cuarta propiedad

$$\begin{gathered}e^{3t}(D-1)\left[-\tfrac{1}{6}t^3cos(t)+\tfrac{1}{4}t^2sen(t)+\tfrac{1}{4}tcos(t)\right]\\ e^{3t}\left[-\tfrac{1}{6}\left(t+\tfrac{d}{dD}\right)^3(D-1)cos(t)+\tfrac{1}{4}\left(t+\tfrac{d}{dD}\right)^2(D-1)sen(t)+\tfrac{1}{4}\left(t+\tfrac{d}{dD}\right)(D-1)cos(t)\right]\\ e^{3t}\left[-\tfrac{1}{6}\left(t^3+3t^2\tfrac{d}{dD}+..\right)(D-1)cos(t)+\tfrac{1}{4}\left(t^2+2t\tfrac{d}{dD}+..\right)(D-1)sen(t)\right.\\ \left.+\tfrac{1}{4}\left(t+\tfrac{d}{dD}\right)(D-1)cos(t)\right]\end{gathered}$$

Desarrollando

$$-\tfrac{1}{6}t^3e^{3t}(D-1)cos(t)-\tfrac{3}{6}t^2e^{3t}cos(t)+\tfrac{1}{4}t^2e^{3t}(D-1)sen(t)+\tfrac{2}{4}te^{3t}sen(t)$$
$$+\tfrac{1}{4}te^{3t}(D-1)cos(t)+\tfrac{1}{4}e^{3t}cos(t)$$
$$-\tfrac{1}{6}t^3e^{3t}[-sen(t)-cos(t)]-\tfrac{1}{2}t^2e^{3t}cos(t)+\tfrac{1}{4}t^2e^{3t}[cos(t)-sen(t)]+\tfrac{1}{2}te^{3t}sen(t)$$
$$+\tfrac{1}{4}te^{3t}[-sen(t)-cos(t)]+\tfrac{1}{4}e^{3t}cos(t)$$
$$\left(\tfrac{1}{6}t^3-\tfrac{1}{4}t^2-\tfrac{1}{4}t+\tfrac{1}{4}\right)e^{3t}cos(t)+\left(\tfrac{1}{6}t^3-\tfrac{1}{4}t^2+\tfrac{1}{4}t\right)e^{3t}sen(t)$$

por lo que

$$x_p=\left(\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\right)e^{3t}cos(t)+\left(\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t\right)e^{3t}sen(t)-e^{2t}\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)$$

Del mismo modo

$$y_p=2\left(e^{(3+i)t}\tfrac{1}{D}\left[-\tfrac{1}{2}i+\tfrac{1}{4}D+\tfrac{1}{8}D^2i\right]t^2\right)+(D-2)\left(e^{2t}\left(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}\right)\right)$$
$$y_p=2e^{(3+i)t}\left(\tfrac{1}{D}\left(-\tfrac{1}{2}t^2i+\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{4}i\right)\right)+e^{2t}D\left(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$y_p=2e^{(3+i)t}\left(-\tfrac{1}{6}t^3i+\tfrac{1}{4}t^2+\tfrac{1}{4}ti\right)+\tfrac{1}{2}e^{2t}$$
$$y_p=2e^{3t}(cos(t)+isen(t))\left(-\tfrac{1}{6}t^3i+\tfrac{1}{4}t^2+\tfrac{1}{4}ti\right)+\tfrac{1}{2}e^{2t}$$

Como tenemos el término $\mathbf{sen(x)}$ emplearemos solo la parte imaginaria del producto, esto es:

$$y_p=2e^{3t}\left(-\frac{1}{6}t^3cos(t)+\frac{1}{4}t^2sen(t)+\frac{1}{4}tcos(t)\right)+\frac{1}{2}e^{2t}$$

Por lo que la solución del sistema buscada es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x(t)} &= \mathbf{C_1e^{3t}cos(t)+C_2e^{3t}sen(t)+\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}t+\tfrac{1}{4}t^2+\tfrac{1}{6}t^3\right)e^{3t}cos(t)+} \\
&\quad \mathbf{\left(\tfrac{1}{4}t-\tfrac{1}{4}t^2+\tfrac{1}{6}t^3\right)e^{3t}sen(t)-\tfrac{1}{2}te^{2t}-\tfrac{1}{2}e^{2t}} \\
\mathbf{y(t)} &= \mathbf{C_1e^{3t}(sen(t)-cos(t))-C_2e^{3t}(cos(t)+sen(t))+\left(-\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{2}t\right)e^{3t}cos(t)+} \\
&\quad \mathbf{\tfrac{1}{2}t^2e^{3t}sen(t)+\tfrac{1}{2}e^{2t}}
\end{aligned}$$

13. Obtener la solución general del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} D^2+2 & -D-1 \\ -D+1 & D^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Solución

`Solución homogénea:`

El sistema propuesto es:

$$x'' + 2x - y' - y = 0 \tag{2.83}$$

$$-x' + x + y'' - y = 0 \tag{2.84}$$

cuya representación matricial es

$$\begin{pmatrix} D^2+2 & -D-1 \\ -D+1 & D^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico buscado

$$\begin{vmatrix} D^2+2 & -D-1 \\ -D+1 & D^2-1 \end{vmatrix} = (D^2+2)(D^2-1)+(-D+1)(D+1) = D^4-1 = (D-1)(D+1)(D^2+1) = 0$$

Las raíces del polinomio característico son:

$$D_1 = 1, D_2 = -1, D_3 = i, D_4 = -i$$

lo que nos conduce al conjunto fundamental de solución del sistema sea:

$$\{e^t, e^{-t}, cos(t), sen(t)\}$$

La combinación lineal de las funciones linealmente independientes es solución del sistema homogéneo, y es opcional asignarles el nombre más conveniente $x(t)$ ó $y(t)$, según nos facilite el cálculo de la otra solución.

- Si elegimos a $x(t)$ y sustituimos en la ecuación $x'' + 2x - y' - y = 0$, se tendrá una ecuación de primer orden en y, fácil de resolver; pero si sustituimos en la ecuación $-x' + x + y'' - y = 0$, se tendrá una ecuación diferencial de segundo grado en y más difícil de resolver.

- Si elegimos a $y(t)$, y sustituimos en $-x' + x + y'' - y = 0$, resulta una ecuación de primer orden en x.
  Si sustituimos en $x'' + 2x - y' - y = 0$, nos conduce a una ecuación de segundo orden en x.

Escojamos como solución a $x(t)$ esto es:

$$x_h = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3cos(t) + C_4sen(t)$$

sustituyendo en (2.83)

$$x^{''} + 2x - y^{'} - y = 0$$
$$y^{'} + y = x^{''} + 2x$$
$$(D+1)y = (D^2+2)x$$

$$(D+1)y = (D^2+2)[C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3cos(t) + C_4sen(t)]$$
$$(D+1)y = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3cos(t) + C_4sen(t)$$
$$y = 3\frac{C_1}{D+1}e^t + 3\frac{C_2}{D+1}e^{-t} + \frac{C_3}{D+1}cos(t) + \frac{C_4}{D+1}sen(t) + C_5e^{-t}$$
$$y_h = \frac{3}{2}C_1e^t + 3C_2te^{-t} + \frac{1}{2}(C_3 - C_4)cos(t) + \frac{1}{2}(C_3 + C_4)sen(t)$$

A fin de eliminar una de las constantes sustituiremos las soluciones homogéneas obtenidas en la ecuación diferencial restante (2.84), es decir:

$$-x^{'} + x + y^{''} - y = 0$$
$$-(D-1)x + (D^2-1)y = 0$$
$$(D^2-1)y = (D-1)x$$

Al realizar las operaciones pertinentes se tiene que:

$$-4C_2e^{-t} = 0$$

lo que implica que la variable $C_2 = 0$.
Por lo que la solución homogénea resulta ser:

$$x_h = C_1e^t + C_3cos(t) + C_4sen(t)$$
$$y_h = \frac{3}{2}C_1e^t + \frac{1}{2}(C_3 - C_4)cos(t) + \frac{1}{2}(C_3 + C_4)sen(t) + C_5e^{-t}$$

Para la solución particular se planteara el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} D^2+2 & -D-1 \\ -D+1 & D^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

premultiplicando el sistema por la inversa del sistema

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D^2-1}{D^4-1}t^2 + \frac{D+1}{D^4-1}t \\ \frac{D-1}{D^4-1}t^2 + \frac{D^2+2}{D^4-1}t \end{pmatrix}$$

Obsérvese que no existe repetición de raíces por lo cual

$$\begin{aligned} x_p &= \tfrac{1}{D^4-1}(2 - t^2 + 1 + t) = \tfrac{1}{D^4-1}(-t^2 + t + 3) \\ y_p &= \tfrac{1}{D^4-1}(2t - t^2 + 2t) = \tfrac{1}{D^4-1}(-t^2 + 4t) \end{aligned}$$

por lo que nuestra solución particular es:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - t - 3 \\ t^2 - 4t \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución buscada es:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x(t) = C_1e^t + C_3cos(t) + C_4sen(t) + t^2 - t - 3} \\ &\mathbf{y(t) = \tfrac{3}{2}C_1e^t + \tfrac{1}{2}(C_3 - C_4)cos(t) + \tfrac{1}{2}(C_3 + C_4)sen(t) + C_5e^{-t} + t^2 - 4t} \end{aligned}$$

Problema de aplicación

Dos vagones de ferrocarril (#2 y #3) se encuentran estacionados, cuando un tercero, que viaja con una velocidad v_0 en el instante de hacer contacto con el resorte K_1; se impacta contra los estacionados.

Determinar

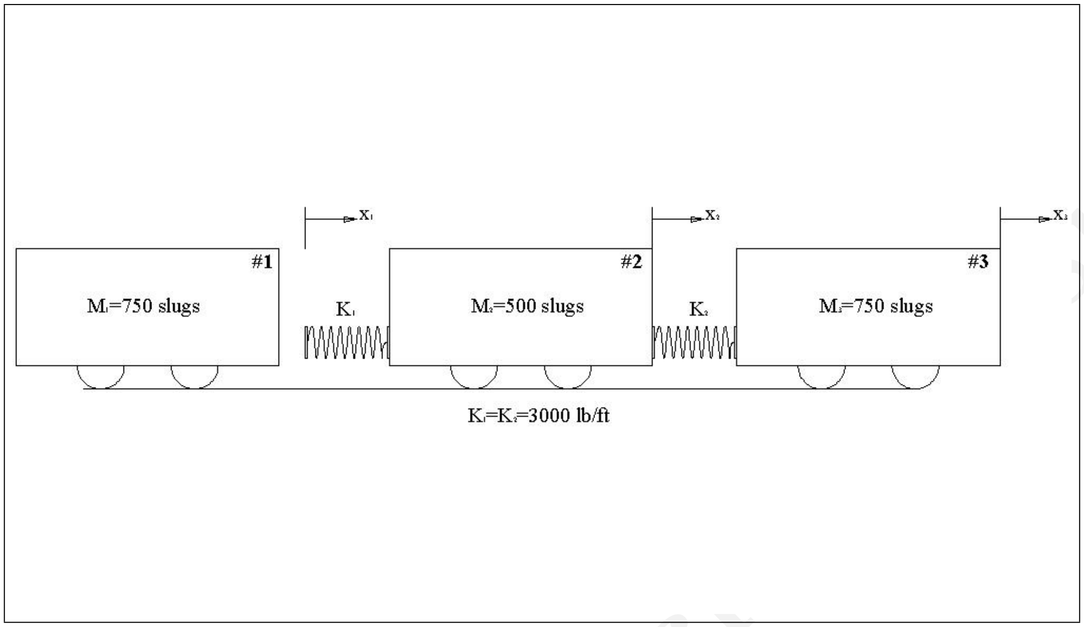
a) La posición de cada vagón después del impacto, sabiendo que los resortes se desenganchan en lugar de estirarse.

b) El instante en que se desenganchan los vagones.

c) La velocidad de cada vagón en el momento del desenganche.

Datos:

$$M_1 = M_3 = 750 slugs$$
$$M_2 = 500 slugs$$
$$K_1 = K_2 = 3000\tfrac{lb}{ft}$$



Condiciones del sistema:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$$
$$x_1'(0) = v_0 \text{ y } x_2'(0) = x_3'(0) = 0$$

El sistema de ecuaciones que representa el comportamiento de los vagones

$$\begin{aligned} M_1 x_1'' &= K_1(x_2 - x_1) \\ M_2 x_2'' &= K_2(x_3 - x_2) - K_1(x_2 - x_1) \\ M_3 x_3'' &= -K_2(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

Sustituyendo valores y ordenando se tiene:

$$x_1'' + 4x_1 - 4x_2 = 0 \tag{2.85}$$
$$-6x_1 + x_2'' + 12x_2 - 6x_3 = 0 \tag{2.86}$$
$$-4x_2 + x_3'' + 4x_3 = 0 \tag{2.87}$$

cuya representación matricial es:

$$\begin{pmatrix} D^2+4 & -4 & 0 \\ -6 & D^2+12 & -6 \\ 0 & -4 & D^2+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica del sistema es:

$$D^2(D^2+4)(D^2+16)=0$$

Por lo que el conjunto fundamental solución del sistema se representa como:

$$\{1, t, cos(2t), sen(2t), cos(4t), sen(4t)\}$$

Consideremos a $x_1(t)$ como la combinación lineal de este conjunto de soluciones:

$$x_1(t)=C_1+C_2t+C_3cos(2t)+C_4sen(2t)+C_5cos(4t)+C_6sen(4t) \tag{2.88}$$

de la ecuación (2.85)

$$\begin{gathered} x_1''+4x_1-4x_2=0 \\ x_2=\tfrac{1}{4}(D^2+4)x_1 \\ x_2=\tfrac{1}{4}(D^2+4)(C_1+C_2t+C_3cos(2t)+C_4sen(2t)+C_5cos(4t)+C_6sen(4t)) \\ x_2=\tfrac{1}{4}\left[4C_1+4C_2t-12C_5cos(4t)-12C_6sen(4t)\right] \end{gathered}$$

$$x_2(t)=C_1+C_2t-3C_5cos(4t)-3C_6sen(4t) \tag{2.89}$$

de la ecuación (2.86)

$$\begin{gathered} -6x_1+x_2''+12x_2-6x_3=0 \\ 6x_3=-6x_1+x_2''+12x_2 \\ x_3=-x_1+\tfrac{1}{6}(D^2+12)x_2 \end{gathered}$$

Desarrollando

$$x_3(t)=C_1+C_2t-C_3cos(2t)-C_4sen(2t)+C_5cos(4t)+C_6sen(4t) \tag{2.90}$$

A fin de valuar las seis constantes arbitrarias, determinaremos mas condiciones en $t=0$; a partir de las condiciones dadas.
De (2.85)

$$\begin{gathered} x_1''+4x_1-4x_2=0 \\ x_1''(0)+4x_1(0)-4x_2(0)=0 \\ x_1''(0)+4(0)-4(0)=0 \\ \mathbf{x_1''(0)=0} \end{gathered}$$

Esto significa que la aceleración del vagón#1 en el momento del impacto es **cero**.
Derivando la ecuación (2.85) con respecto de t y evaluando en $t = 0$.

$$x_1^{'''} + 4x_1^{'} - 4x_2^{'} = 0$$
$$x_1^{'''}(0) + 4x_1^{'}(0) - 4x_2^{'}(0) = 0$$
$$x_1^{'''}(0) + 4v_0 - 4(0) = 0$$
$$\mathbf{x_1^{'''}(0) = -4v_0}$$

De la ecuación (2.86)

$$-6x_1 + x_2^{''} + 12x_2 - 6x_3 = 0$$
$$-6x_1(0) + x_2^{''}(0) + 12x_2(0) - 6x_3(0) = 0$$
$$-6(0) + x_2^{''}(0) + 12(0) - 6(0) = 0$$
$$\mathbf{x_2^{''}(0) = 0}$$

Derivando (2.86) con respecto de t y evaluando en $t = 0$.

$$-6x_1 + x_2^{''} + 12x_2 - 6x_3 = 0$$
$$-6x_1^{'} + x_2^{'''} + 12x_2^{'} - 6x_3^{'} = 0$$
$$-6x_1^{'}(0) + x_2^{'''}(0) + 12x_2^{'}(0) - 6x_3^{'}(0) = 0$$
$$-6v_0 + x_2^{'''}(0) + 12(0) - 6(0) = 0$$
$$\mathbf{x_2^{'''}(0) = 6v_0}$$

Sustituyendo $t = 0$ en la ecuación (2.89)

$$x_2(t) = C_1 + C_2t - 3C_5cos(4t) - 3C_6sen(4t)$$
$$x_2(0) = C_1 + C_2(0) - 3C_5cos(0) - 3C_6sen(0)$$
$$x_2(0) = C_1 - 3C_5$$
$$\mathbf{C_1 = 3C_5}$$

Derivando la ecuación (2.89) con respecto de t y evaluando en $t = 0$.

$$x_2(t) = C_1 + C_2t - 3C_5cos(4t) - 3C_6sen(4t)$$
$$x_2^{'}(t) = C_2 + 12C_5sen(4t) - 12C_6cos(4t)$$
$$x_2^{'}(0) = C_2 + 12C_5sen(0) - 12C_6cos(0)$$
$$0 = C_2 - 12C_6$$
$$\mathbf{C_2 = 12C_6}$$

Derivando con respecto de t la expresión anterior y evaluando en $t = 0$.

$$x_2'(t) = C_2 + 12C_5sen(4t) - 12C_6cos(4t)$$
$$x_2''(t) = 48C_5cos(4t) + 48C_6sen(4t)$$
$$x_2''(0) = 48C_5cos(0) + 48C_6sen(0)$$
$$0 = 48C_5$$
$$\mathbf{C_5 = 0}$$

Derivando con respecto de t la expresión anterior y evaluando en $t = 0$.

$$x_2''(t) = 48C_5cos(4t) + 48C_6sen(4t)$$
$$x_2'''(t) = -(4)(48)C_5sen(4t) + (4)(48)C_6cos(4t)$$
$$x_2'''(0) = -(4)(48)C_5sen(0) + (4)(48)C_6cos(0)$$
$$6v_0 = (4)(48)C_6$$
$$\mathbf{C_6 = \frac{6}{(4)(48)}v_0 = \frac{1}{32}v_0}$$

Agrupando las ecuaciones de las constantes obtenidas, se tiene:

$$C_1 = 3C_5$$
$$C_2 = 12C_6$$
$$C_5 = 0$$
$$C_6 = \frac{1}{32}v_0$$

De aquí se observa que $C_1 = 0, C_2 = \frac{3}{8}v_0$.
Si sustituimos el valor de las constantes encontradas en la ecuación (2.88), y evaluamos en $t = 0$.

$$x_1(t) = C_1 + C_2t + C_3cos(2t) + C_4sen(2t) + C_5cos(4t) + C_6sen(4t)$$
$$x_1(t) = C_2t + C_3cos(2t) + C_4sen(2t) + C_6sen(4t)$$
$$x_1(t) = \frac{3}{8}v_0t + C_3cos(2t) + \frac{1}{32}v_0sen(4t)$$
$$x_1(0) = \frac{3}{8}v_0(0) + C_3cos(0) + \frac{1}{32}v_0sen(0)$$
$$0 = C_3$$
$$\mathbf{C_3 = 0}$$

Derivando (2.88) con respecto de t, y evaluando en $t = 0$.

$$
\begin{gathered}
x_1(t) = C_2 t + C_4 sen(2t) + C_6 sen(4t) \\
x_1^{'}(t) = C_2 + 2C_4 cos(2t) + 4C_6 cos(4t) \\
x_1^{'}(0) = \tfrac{3}{8}v_0 + 2C_4 cos(0) + \tfrac{4}{32}v_0 \\
v_0 = \tfrac{3}{8}v_0 + 2C_4 cos(0) + \tfrac{1}{8}v_0 \\
C_4 = \tfrac{1}{2}\left(v_0 - \tfrac{4}{8}v_0\right) \\
\mathbf{C_4 = \tfrac{1}{4}v_0}
\end{gathered}
$$

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{3}{8}v_0 t + \frac{1}{4}v_0 sen(2t) + \frac{1}{32}v_0 sen(4t) && (2.91) \\
x_2(t) &= \frac{3}{8}v_0 t - \frac{3}{32}v_0 sen(4t) && (2.92) \\
x_3(t) &= \frac{3}{8}v_0 t - \frac{1}{4}v_0 sen(2t) + \frac{1}{32}v_0 sen(4t) && (2.93)
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones serán válidas únicamente mientras los dos resortes amortiguadores permanezcan comprimidos, esto es, mientras

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &< 0 \\
x_3 - x_2 &< 0
\end{aligned}
$$

Veamos que significa esto respecto al tiempo:

$$x_2 - x_1 = -\frac{1}{32}v_0\left(8sen(2t) + 4sen(4t)\right) < 0$$

Considerando que

$$sen(4t) = 2sen(2t)cos(2t)$$

se tiene

$$
\begin{gathered}
x_2 - x_1 = -\tfrac{1}{32}v_0\left(8sen(2t) + 8sen(2t)cos(2t)\right) < 0 \\
x_2 - x_1 = -\tfrac{8}{32}v_0 sen(2t)(1 + cos(2t)) < 0 \\
x_2 - x_1 = -\tfrac{1}{4}v_0 sen(2t)(1 + cos(2t)) < 0
\end{gathered}
$$

Igualmente

$$x_3 - x_2 = -\frac{1}{4}v_0 sen(2t)(1 - cos(2t)) < 0$$

Se deduce que $x_2 - x_1 < 0$ y $x_3 - x_2 < 0$, hasta que $sen(2t) = 0$, condición para que los resortes se desenganchen; Y esto sucede en el instante $2t = \pi$ o bien $t = \frac{\pi}{2}$ =**1.57seg**,

respecto de su posición inicial.
La posición de los vagones en el instante $t = \frac{\pi}{2}$, respecto a su posición inicial

$$\begin{aligned} x_1(\tfrac{\pi}{2}) &= \mathbf{\tfrac{3\pi}{16} v_0} \\ x_2(\tfrac{\pi}{2}) &= \mathbf{\tfrac{3\pi}{16} v_0} \\ x_3(\tfrac{\pi}{2}) &= \mathbf{\tfrac{3\pi}{16} v_0} \end{aligned}$$

La velocidad de los vagones en el instante $t = \frac{\pi}{2}$seg,es decir cuando se desenganchan es Derivando la ecuaciones (2.91),(2.92) y (2.93) con respecto de t

$$x_1'(t) = \tfrac{3}{8}v_0 + \tfrac{1}{2}v_0 cos(2t) + \tfrac{1}{8}v_0 cos(4t)$$
$$x_2'(t) = \tfrac{3}{8}v_0 - \tfrac{3}{8}v_0 cos(4t)$$
$$x_3'(t) = \tfrac{3}{8}v_0 - \tfrac{1}{2}v_0 cos(2t) + \tfrac{1}{8}v_0 cos(4t)$$

evaluando en $t = \frac{\pi}{2}$ seg

$$x_1'(\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{3}{8}v_0 - \tfrac{1}{2}v_0 + \tfrac{1}{8}v_0 = \mathbf{0}$$
$$x_2'(\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{3}{8}v_0 - \tfrac{3}{8}v_0 = \mathbf{0}$$
$$x_3'(\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{3}{8}v_0 + \tfrac{1}{2}v_0 + \tfrac{1}{8}v_0 = \mathbf{v_0}$$

2.4. *Ejercicios propuestos*

1. Resolver

$$x' + x - y' - y = e^t$$
$$x' - x + 2y' + y = 5$$

2. Resolver

$$x' + y' + 2y = 0$$
$$-x + y' + 2y = 0$$

3. Resolver

$$x' + x + y'' = sen(t)$$
$$x + y' + y = 0$$

4. Obtener la solución particular del sistema

$$x' = x + y + e^t$$
$$y' = x + y - e^{-t}$$

5. Obtener la solución particular del sistema

$$\begin{pmatrix} D-1 & -3 \\ -1 & D+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$$

6. Obtener la solución particular del sistema

$$x^{'} = 2x + y + sen(t)$$
$$y^{'} = x + 2y + 3cos(t)$$

7. obtener la solución particular del sistema

$$\begin{pmatrix} D-1 & -5 \\ 1 & D+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tsen(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}$$

8. Resolver

$$x^{'} = 4x - 2y + t^2e^{2t}$$
$$y^{'} = 4x - 2y - e^t$$

9. Resolver

$$x^{'} = -x - y + e^{-t}cos(t)$$
$$y^{'} = x - y + cos(t)$$

10. Resolver

$$x^{'} = x - y + sen(2t)$$
$$y^{'} = 5x - y - 3$$

11. Resolver

$$x^{'} = 2x + 4y + t^2$$
$$y^{'} = x - 2y + t - 1$$

Apéndice I

Respuesta de los ejercicios propuestos del capítulo 1.

1.
$$y(x) = e^{-x}(C_1cos(2x) + C_2sen(2x)) + \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}xe^{-x}cos(2x)$$

2.
$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x - xe^x - \frac{1}{2}x^2e^x$$

3.
$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3cos(x) + C_4sen(x) - x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4$$

4.
$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3cos(x) + C_4sen(x) + 1$$

5.
$$y(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t - \frac{1}{8}e^tsen(2t)$$

6.
$$y(w) = C_1e^{-w} + C_2we^{-w} + sen(w) - \frac{3}{25}cos(2w) + \frac{4}{25}sen(2w) - \frac{1}{16}e^{3w} - 23 + 18w - 6w^2 + w^3$$

7.
$$y(x) = 2xe^x$$

8.
$$y(t) = C_1cos(2t) + C_2sen(2t) + \frac{6}{192}tcos(2t) + \frac{1}{16}t^2sen(2t) - \frac{16}{192}t^3sen(2t)$$

9.

$$y(t) = C_1cos(3t) + C_2sen(3t) - \frac{1}{108}tsen(3t) + \frac{1}{36}t^2cos(3t) + \frac{6}{108}t^3sen(3t)$$

10.

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} - \frac{3}{8}e^{-3x} - \frac{3}{8}xe^{-3x} - \frac{1}{8}x^2e^{-3x}$$

11.

$$y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + \frac{7}{12}e^{-x} + xe^{-x} - \frac{7}{26}e^{-x}cos(2x) - \frac{2}{13}e^{-x}sen(2x)$$

12.

$$y(x) = e^{-2x}\left[C_1cos(x) + C_2sen(x)\right] + e^{-2x}\left[-\frac{5}{2}xsen(x) + \frac{5}{2}x^2cos(x) + \frac{5}{3}x^3sen(x)\right]$$

13.

$$y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} + \frac{7}{324}e^{4x} - \frac{1}{18}xe^{4x} + \frac{1}{18}x^2e^{4x}$$

14.

$$y(x) = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + C_3x^2e^{x} + C_4x^3e^{x} + \frac{1}{16}e^{3x}$$

15.

$$y(t) = C_1cos(\sqrt{2}t) + C_2sen(\sqrt{2}t) + C_3tcos(\sqrt{2}t) + C_4tsen(\sqrt{2}t) - \frac{1}{16}t^2sen(\sqrt{2}t)$$

16.

$$y(t) = C_1 + C_2t + C_3e^{-t} + C_4te^{-t} + 21t^2 - \frac{14}{3}t^3 + \frac{7}{12}t^4$$

17.

$$y(x) = C_1 + C_2e^{-2x} + 2e^{x}sen(x)$$

Apéndice II

Respuesta de los ejercicios propuestos del capítulo 2

1.
$$x(t) = C_1 - \frac{1}{2}C_2e^{-t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{5}{3}t$$
$$y(t) = C_1 + C_2e^{-t} + \frac{5}{3}t$$

2.
$$x(t) = C_1e^{-t}$$
$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

3.
$$x(t) = sen(t) - cos(t)$$
$$y(t) = sen(t)$$

4.
$$x_p = -\frac{1}{3}e^{-t}$$
$$y_p = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-t}$$

5.
$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}t + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

6.
$$x_p = -sen(t)$$
$$y_p = sen(t) - cos(t)$$

7.
$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2cos(t) + \frac{1}{4}t^2sen(t) - \frac{1}{4}tcos(t) + 3tsen(t) + \frac{1}{4}sen(t) \\ \frac{1}{4}t^2cos(t) + \frac{1}{2}tcos(t) - \frac{5}{4}tsen(t) + \frac{1}{2}sen(t) \end{pmatrix}$$

8.
$$x_G = C_1 + C_2e^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}t^2e^{2t} + \frac{2}{3}t^3e^{2t} - 2e^t$$
$$y_G = 2C_1 + C_2e^{2t} + te^{2t} - t^2e^{2t} + \frac{2}{3}t^3e^{2t} - 3e^t$$

9.

$$x_G = -C_1e^{-t}sen(t) + C_2e^{-t}cos(t) - \frac{1}{5}cos(t) - \frac{2}{5}sen(t) + \frac{1}{2}te^{-t}cos(t) + \frac{1}{2}e^{-t}sen(t)$$
$$y_G = C_1e^{-t}cos(t) + C_2e^{-t}sen(t) + \frac{3}{5}cos(t) + \frac{1}{5}sen(t) + \frac{1}{2}te^{-t}sen(t)$$

10.

$$x_G = C_1cos(2t) + C_2sen(2t) - \frac{1}{4}cos(2t) - \frac{1}{4}tcos(2t) + \frac{1}{2}tsen(2t) + \frac{3}{4}$$
$$y_G = C_1(cos(2t) + 2sen(2t)) + C_2(-2cos(2t) + sen(2t)) - \frac{5}{4}tcos(2t) + \frac{3}{4}$$

11.

$$x_G = C_1 + C_2(1+t) + \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t^2$$
$$y_G = C_1 + C_2t + \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - t$$