Propiedades del Operador Derivada

M en I Jesús Edmundo Ruíz Medina

División de Ciencias Básicas Facultad de Ingeniería UNAM

14 de enero de 2020

Propiedades del Operador Derivada

Primera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Propiedades del Operador Derivada

Primera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Propiedades del Operador Derivada

Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Propiedades del Operador Derivada

Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Cuarta Propiedad

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x+\frac{d}{dD}\right)^n P(D)\right]f(x)$$

Ejemplos de Aplicación de la Primera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Ejemplo 1

$D^2 e^{4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Primera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Ejemplo 1

$D^2 e^{4t} = (4)^2 e^{4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Primera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Ejemplo 1

$D^2 e^{4t} = (4)^2 e^{4t} = 16e^{4t}$

Ejemplos de Aplicación de la Primera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Ejemplo 1

$D^2 e^{4t} = (4)^2 e^{4t} = 16e^{4t}$

Ejemplo 2

$5De^{4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Primera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Ejemplo 1

$D^2 e^{4t} = (4)^2 e^{4t} = 16e^{4t}$

Ejemplo 2

$5De^{4t} = 5(4)e^{4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Primera Propiedad

M en I Jesús Edmundo Ruíz Medina

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Ejemplo 1

$D^2e^{4t} = (4)^2e^{4t} = 16e^{4t}$

Ejemplo 2

$5De^{4t} = 5(4)e^{4t} = 20e^{4t}$

Ejemplos de Aplicación de la Primera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Ejemplo 1

$D^2 e^{4t} = (4)^2 e^{4t} = 16e^{4t}$

Ejemplo 2

$5De^{4t} = 5(4)e^{4t} = 20e^{4t}$

Ejemplo 3

$(D^2 + 5D + 6)e^{4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Primera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x} = P(\pm\alpha)e^{\pm\alpha x}$$

Ejemplo 1

$D^2 e^{4t} = (4)^2 e^{4t} = 16e^{4t}$

Ejemplo 2

$5De^{4t} = 5(4)e^{4t} = 20e^{4t}$

Ejemplo 3

$(D^2 + 5D + 6)e^{4t} = (16 + 20 + 6)e^{4t} = 42e^{4t}$

Ejemplo de Aplicación de la Primera Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{5t}$$

Ejemplo de Aplicación de la Primera Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{5t}$$

Empleando Coeficientes Indeterminados

$$y_p = Ae^{5t}$$

Ejemplo de Aplicación de la Primera Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{5t}$$

Empleando Coeficientes Indeterminados

$$y_p = Ae^{5t} \quad y_p' = 5Ae^{5t}$$

Ejemplo de Aplicación de la Primera Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{5t}$$

Empleando Coeficientes Indeterminados

$$y_p = Ae^{5t} \quad y_p' = 5Ae^{5t} \quad y_p'' = 25Ae^{5t}$$

Ejemplo de Aplicación de la Primera Propiedad

$$y^{''} + 5y^{'} + 6y = 4e^{5t}$$

Empleando Coeficientes Indeterminados

$$y_p = Ae^{5t} \quad y_p^{'} = 5Ae^{5t} \quad y_p^{''} = 25Ae^{5t}$$

Sustituyendo en el la ecuación obtenemos:

$$[25Ae^{5t} + 5(5Ae^{t}) + 6(Ae^{5t})] = 4e^{5t}$$

cuyo resultado es:

$$[25 + 25 + 6]Ae^{5t} = 4e^{5t} \text{ lo que implica } A = \frac{4}{56}$$

por tanto $y_p = \frac{4}{56}e^{5t}$

Ejemplo de Aplicación de la Primera Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{5t}$$

Empleando Coeficientes Indeterminados

$$y_p = Ae^{5t} \quad y_p' = 5Ae^{5t} \quad y_p'' = 25Ae^{5t}$$

Sustituyendo en el la ecuación obtenemos:

$$[25Ae^{5t} + 5(5Ae^{t}) + 6(Ae^{5t})] = 4e^{5t}$$

cuyo resultado es:

$$[25 + 25 + 6]Ae^{5t} = 4e^{5t} \text{ lo que implica } A = \frac{4}{56}$$

por tanto $y_p = \frac{4}{56}e^{5t}$

Ejemplo de Aplicación de la Primera Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{5t}$$

Ejemplo de Aplicación de la Primera Propiedad

$$y^{''} + 5y^{'} + 6y = 4e^{5t}$$

Empleando Coeficientes Indeterminados ayudados de Operador Derivada

$$[D^2 + 5D + 6]Ae^{5t} = 4e^{5t}$$

Ejemplo de Aplicación de la Primera Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4e^{5t}$$

Empleando Coeficientes Indeterminados ayudados de Operador Derivada

$$[D^2 + 5D + 6]Ae^{5t} = 4e^{5t}$$

Aplicando la **Primera Propiedad** obtenemos:

$$[(5)^2 + 5(5) + 6]Ae^{5t} = 4e^{5t}$$

cuyo resultado es:

$$[25 + 25 + 6]Ae^{5t} = 4e^{5t} \text{ lo que implica } A = \frac{4}{56}$$

por tanto $y_p = \frac{4}{56}e^{5t}$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

$D^2 cos(2x) =$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

$D^2 cos(2x) = -(2)^2 cos(2x) =$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

$$D^2 cos(2x) = -(2)^2 cos(2x) = -4cos(2x)$$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

$D^2 cos(2x) = -(2)^2 cos(2x) = -4cos(2x)$

Ejemplo 2

$5D^2 sen(4x) =$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

$D^2 cos(2x) = -(2)^2 cos(2x) = \ -4cos(2x)$

Ejemplo 2

$5D^2 sen(4x) = 5[-(4)^2] sen(4x) =$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

$D^2 cos(2x) = -(2)^2 cos(2x) = -4cos(2x)$

Ejemplo 2

$5D^2 sen(4x) = 5[-(4)^2] sen(4x) = -80sen(4x)$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

$$D^2 cos(2x) = -(2)^2 cos(2x) = -4cos(2x)$$

Ejemplo 2

$$5D^2 sen(4x) = 5[-(4)^2] sen(4x) = -80 sen(4x)$$

Ejemplo 3

$$(D^2 + 5D + 6) cos(x) =$$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

$D^2 cos(2x) = -(2)^2 cos(2x) = \; -4cos(2x)$

Ejemplo 2

$5D^2 sen(4x) = 5[-(4)^2] sen(4x) = \; -80 sen(4x)$

Ejemplo 3

$(D^2 + 5D + 6) cos(x) = ([-(1)^2 + 5D + 6] cos(x) =$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right. = -(\beta)^2 \left\{ \begin{array}{l} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1

$D^2 cos(2x) = -(2)^2 cos(2x) = \ -4cos(2x)$

Ejemplo 2

$5D^2 sen(4x) = 5[-(4)^2] sen(4x) = \ -80sen(4x)$

Ejemplo 3

$(D^2 + 5D + 6)cos(x) = ([-(1)^2 + 5D + 6]cos(x) =$
$(5D + 5)cos(x) =$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$D^2 \begin{cases} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{cases} = -(\beta)^2 \begin{cases} cos(\beta x) \\ sen(\beta x) \end{cases}$$

Ejemplo 1

$D^2 cos(2x) = -(2)^2 cos(2x) = \ -4cos(2x)$

Ejemplo 2

$5D^2 sen(4x) = 5[-(4)^2] sen(4x) = \ -80sen(4x)$

Ejemplo 3

$(D^2 + 5D + 6)cos(x) = ([-(1)^2 + 5D + 6]cos(x) =$
$(5D + 5)cos(x) = -5sen(x) + 5cos(x)$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$y^{''} + 5y^{'} + 6y = 4cos(3x)$$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4cos(3x)$$

Empleando Coeficientes Indeterminados

$$\begin{aligned} y_p &= Acos(3x) + Bsen(3x) \\ y_p' &= -3Asen(3x) + 3Bcos(3x) \\ y_p'' &= -9Acos(3x) - 9Bsen(3x) \end{aligned}$$

Sustituyendo en el la ecuación obtenemos:

$[-9Acos(3x) - 9Bsen(3x)] + 5[-3Asen(3x) + 3Bcos(3x)]+$
$6[Acos(3x) + Bsen(3x)] = 4cos(3x)$

cuyo resultado es:

$$\begin{aligned} (-3A + 15B)cos(3x) &= 4cos(3x) \\ (-15A - 3B)sen(3x) &= 0sen(3x) \end{aligned}$$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$y^{''} + 5y^{'} + 6y = 4cos(3x)$$

Empleando Coeficientes Indeterminados ayudado de Operador Derivada

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4cos(3x)$$

Empleando Coeficientes Indeterminados ayudado de Operador Derivada

$$(D^2 + 5D + 6)[Acos(3x) + Bsen(3x)] = 4cos(3x)$$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4cos(3x)$$

Empleando Coeficientes Indeterminados ayudado de Operador Derivada

$$(D^2 + 5D + 6)[Acos(3x) + Bsen(3x)] = 4cos(3x)$$

Aplicando la **Segunda Propiedad** se tiene:

$$[-(3)^2 + 5D + 6](Acos(3x) + Bsen(3x)) = 4cos(3x)$$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$y'' + 5y' + 6y = 4cos(3x)$$

Empleando Coeficientes Indeterminados ayudado de Operador Derivada

$$(D^2 + 5D + 6)[Acos(3x) + Bsen(3x)] = 4cos(3x)$$

Aplicando la **Segunda Propiedad** se tiene:

$$[-(3)^2 + 5D + 6](Acos(3x) + Bsen(3x)) = 4cos(3x)$$
$$[-9 + 5D + 6](Acos(3x) + Bsen(3x)) = 4cos(3x)$$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$y^{''} + 5y^{'} + 6y = 4cos(3x)$$

Empleando Coeficientes Indeterminados ayudado de Operador Derivada

$$(D^2 + 5D + 6)[Acos(3x) + Bsen(3x)] = 4cos(3x)$$

Aplicando la **Segunda Propiedad** se tiene:

$$[-(3)^2 + 5D + 6](Acos(3x) + Bsen(3x)) = 4cos(3x)$$
$$[-9 + 5D + 6](Acos(3x) + Bsen(3x)) = 4cos(3x)$$
$$[5D - 3](Acos(3x) + Bsen(3x)) = 4cos(3x)$$

cuyo resultado es:

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

M en I Jesús Edmundo Ruíz Medina

$$-15Asen(3x) - 3Acos(3x)$$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$-15Asen(3x) - 3Acos(3x)$$
$$+15Bcos(3x) - 3Bsen(3x) = 4cos(3x)$$

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$\begin{gathered}-15Asen(3x) - 3Acos(3x)\\ +15Bcos(3x) - 3Bsen(3x) = 4cos(3x)\end{gathered}$$

que al agruparse función seno y función coseno tenemos el sistema:

$$\begin{gathered}(-3A + 15B)cos(3x) = 4cos(3x)\\ (-15A - 3B)sen(3x) = 0sen(3x))\end{gathered}$$

donde:

Ejemplo de Aplicación de la Segunda Propiedad

$$-15Asen(3x) - 3Acos(3x)$$
$$+15Bcos(3x) - 3Bsen(3x) = 4cos(3x)$$

que al agruparse función seno y función coseno tenemos el sistema:

$$(-3A + 15B)cos(3x) = 4cos(3x)$$
$$(-15A - 3B)sen(3x) = 0sen(3x))$$

donde:

$$A = -\frac{12}{234} \quad B = \frac{60}{234}$$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm \alpha x} f(x) = e^{\pm \alpha x} P(D \pm \alpha) f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2t^2e^{4t} = e^{4t}(D+4)^2t^2 =$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Ejemplo 1

$$D^2t^2e^{4t} = e^{4t}(D+4)^2t^2 = e^{4t}(D^2+8D+16)t^2 =$$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D \pm \alpha)f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = e^{4t}(D+4)^2 t^2 = e^{4t}(D^2 + 8D + 16)t^2 =$
$e^{4t}[2 + 8(2t) + 16t^2] =$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2t^2e^{4t} = e^{4t}(D+4)^2t^2 = \; e^{4t}(D^2+8D+16)t^2 =$
$e^{4t}[2+8(2t)+16t^2] = \; 16t^2e^{4t}+16te^{4t}+2e^{4t}$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2t^2e^{4t} = e^{4t}(D+4)^2t^2 = \; e^{4t}(D^2+8D+16)t^2 =$
$e^{4t}[2+8(2t)+16t^2] = \; 16t^2e^{4t}+16te^{4t}+2e^{4t}$

Ejemplo 2

$5Dte^{-4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2t^2e^{4t} = e^{4t}(D+4)^2t^2 = \; e^{4t}(D^2+8D+16)t^2 =$
$e^{4t}[2+8(2t)+16t^2] = \; 16t^2e^{4t}+16te^{4t}+2e^{4t}$

Ejemplo 2

$5Dte^{-4t} = 5[e^{-4t}(D-4)t] =$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D \pm \alpha)f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = e^{4t}(D+4)^2 t^2 = e^{4t}(D^2 + 8D + 16)t^2 =$
$e^{4t}[2 + 8(2t) + 16t^2] = 16t^2 e^{4t} + 16te^{4t} + 2e^{4t}$

Ejemplo 2

$5Dte^{-4t} = 5[e^{-4t}(D-4)t] = 5[e^{-4t}(1-4t)] =$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2t^2e^{4t} = e^{4t}(D+4)^2t^2 = e^{4t}(D^2+8D+16)t^2 =$
$e^{4t}[2+8(2t)+16t^2] = 16t^2e^{4t}+16te^{4t}+2e^{4t}$

Ejemplo 2

$5Dte^{-4t} = 5[e^{-4t}(D-4)t] = 5[e^{-4t}(1-4t)] =$
$-20te^{-4t}+5e^{-4t}$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D \pm \alpha)f(x)$$

Ejemplo 3

$(D^2 + 5D + 6)e^t sen(2t) =$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Ejemplo 3

$(D^2+5D+6)e^t sen(2t) = e^t[(D+1)^2+5(D+1)+6]sen(2t) =$
$e^t[D^2+7D+12]sen(2t) =$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm \alpha x} f(x) = e^{\pm \alpha x} P(D \pm \alpha) f(x)$$

Ejemplo 3

$(D^2 + 5D + 6)e^t sen(2t) = e^t[(D+1)^2 + 5(D+1) + 6]sen(2t) =$
$e^t[D^2 + 7D + 12]sen(2t) = \ e^t(7D + 8)sen(2t) =$

Ejemplos de Aplicación de la Tercera Propiedad

$$P(D)e^{\pm\alpha x}f(x) = e^{\pm\alpha x}P(D\pm\alpha)f(x)$$

Ejemplo 3

$(D^2+5D+6)e^t sen(2t) = e^t[(D+1)^2+5(D+1)+6]sen(2t) =$
$e^t[D^2+7D+12]sen(2t) = \; e^t(7D+8)sen(2t) =$
$e^t[14cos(2t)+8sen(2t)]$

Ejemplos de Aplicación de la Cuarta Propiedad

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD}\right)^n P(D)\right] f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Cuarta Propiedad

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD} \right)^n P(D) \right] f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = \left[\left(t + \frac{d}{dD} \right)^2 D^2 \right] e^{4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Cuarta Propiedad

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD}\right)^n P(D)\right] f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = \left[\left(t + \frac{d}{dD}\right)^2 D^2\right] e^{4t} = [(t^2 + 2t\frac{d}{dD} + \frac{d^2}{dD^2})D^2]e^{4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Cuarta Propiedad

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD}\right)^n P(D)\right] f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = \left[\left(t + \frac{d}{dD}\right)^2 D^2\right] e^{4t} = [(t^2 + 2t\frac{d}{dD} + \frac{d^2}{dD^2})D^2]e^{4t} =$
$[t^2 D^2 e^{4t} + 4tDe^{4t} + 2e^{4t}] =$

Ejemplos de Aplicación de la Cuarta Propiedad

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD} \right)^n P(D) \right] f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = \left[\left(t + \frac{d}{dD} \right)^2 D^2 \right] e^{4t} = \; [(t^2 + 2t\frac{d}{dD} + \frac{d^2}{dD^2})D^2]e^{4t} =$
$[t^2 D^2 e^{4t} + 4tDe^{4t} + 2e^{4t}] = \; 16t^2 e^{4t} + 16te^{4t} + 2e^{4t}$

Ejemplos de Aplicación de la Cuarta Propiedad

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD}\right)^n P(D)\right] f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = \left[\left(t + \frac{d}{dD}\right)^2 D^2\right] e^{4t} = [(t^2 + 2t\frac{d}{dD} + \frac{d^2}{dD^2})D^2]e^{4t} = [t^2 D^2 e^{4t} + 4tDe^{4t} + 2e^{4t}] = 16t^2 e^{4t} + 16te^{4t} + 2e^{4t}$

Ejemplo 2

$5Dte^{-4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Cuarta Propiedad

M en I Jesús Edmundo Ruíz Medina

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD}\right)^n P(D)\right] f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = \left[\left(t + \frac{d}{dD}\right)^2 D^2\right] e^{4t} = [(t^2 + 2t\frac{d}{dD} + \frac{d^2}{dD^2})D^2]e^{4t} =$
$[t^2 D^2 e^{4t} + 4tDe^{4t} + 2e^{4t}] = 16t^2 e^{4t} + 16te^{4t} + 2e^{4t}$

Ejemplo 2

$5Dte^{-4t} = 5\left[\left(t + \frac{d}{dD}\right) D\right] e^{-4t} =$

Ejemplos de Aplicación de la Cuarta Propiedad

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD}\right)^n P(D)\right] f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = \left[\left(t + \frac{d}{dD}\right)^2 D^2\right] e^{4t} = [(t^2 + 2t\frac{d}{dD} + \frac{d^2}{dD^2})D^2]e^{4t} =$
$[t^2 D^2 e^{4t} + 4tDe^{4t} + 2e^{4t}] = 16t^2 e^{4t} + 16te^{4t} + 2e^{4t}$

Ejemplo 2

$5Dte^{-4t} = 5\left[\left(t + \frac{d}{dD}\right) D\right] e^{-4t} = 5\left[tDe^{-4t} + (1)e^{-4t}\right] =$

Ejemplos de Aplicación de la Cuarta Propiedad

$$P(D)x^n f(x) = \left[\left(x + \frac{d}{dD}\right)^n P(D)\right] f(x)$$

Ejemplo 1

$D^2 t^2 e^{4t} = \left[\left(t + \frac{d}{dD}\right)^2 D^2\right] e^{4t} = [(t^2 + 2t\frac{d}{dD} + \frac{d^2}{dD^2})D^2]e^{4t} =$
$[t^2 D^2 e^{4t} + 4tDe^{4t} + 2e^{4t}] = 16t^2 e^{4t} + 16te^{4t} + 2e^{4t}$

Ejemplo 2

$5Dte^{-4t} = 5\left[\left(t + \frac{d}{dD}\right) D\right] e^{-4t} = 5\left[tDe^{-4t} + (1)e^{-4t}\right] =$
$-20te^{-4t} + 5e^{-4t}$

Problemas Propuestos

Usando el método de Coeficientes Indeterminados ayudado de Operador Derivada resolver los siguientes ejercicios:

1. $y^{''} + 7y^{'} + 10y = e^{-2x} + 5sen(x)$
2. $y^{'''} + 3y^{''} + 3y^{'} + y = wsen(2w)$
3. $y^{''} + 2y^{'} + 5y = e^{-t}cos(2t)$
4. $y^{''} - 2y^{'} + y = \frac{1}{4}cos(t)$
5. $y^{''} + 5y^{'} + 6y = re^{2r} + 5$

$$y'' + 7y' + 10y = e^{-2x} + 5sen(x)$$

Solución:

$$(D^2 + 7D + 10)y = 0$$
$$y_H = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-5x}$$
$$y_p = Axe^{-2x} + Bcos(x) + Csen(x)$$
$$(D^2 + 7D + 10)\{Axe^{-2x} + Bcos(x) + Csen(x)\} = e^{-2x} + 5sen(x)$$
$$(D^2 + 7D + 10)Axe^{-2x} = e^{-2x}$$
$$e^{-2x}[(D-2)^2 + 7(D-2) + 10]Ax = e^{-2x}$$
$$e^{-2x}(D^2 + 3D)Ax = e^{-2x}$$
$$3Ae^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$(D^2+7D+10)\{Bcos(x)+Csen(x)\}=5sen(x)$$
$$(-(1)^2+7D+10)\{Bcos(x)+Csen(x)\}=5sen(x)$$
$$(7D+9)\{Bcos(x)+Csen(x)\}=5sen(x)$$
$$-7Bsen(x)+9Bcos(x)+7Ccos(x)+9Csen(x)=5sen(x)$$

Agrupando se forma el sistema:

$$(9B+7C)cos(x)=0cos(x)$$
$$(-7B+9C)sen(x)=5sen(x)$$

cuya solución es:

$$B=-\frac{35}{130}\quad C=\frac{45}{130}$$

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = wsen(2w)$$

Solución:

$$y_H = C_1e^{-w} + C_2we^{-w} + C_3w^2e^{-w}$$
$$y_p = Acos(2w) + Bsen(2w) + w[Ccos(2w) + Esen(2w)]$$
$$(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)\{Acos(2w) + Bsen(2w) + w[Ccos(2w) + Esen(2w)]\} = wsen(2w)$$
$$(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)\{Acos(2w) + Bsen(2w)\}$$
$$(-(2)^2D + 3[-(2)^2] + 3D + 1)\{Acos(2w) + Bsen(2w)\} = 0$$
$$(-D - 11)\{Acos(2w) + Bsen(2w)\} = 0$$
$$-(D + 11)\{Acos(2w) + Bsen(2w)\} = 0$$

$$-[-2Asen(2w) + 11Acos(2w) + 2Bcos(2w) + 11Bsen(2w)] = 0$$

Agrupando se obtiene el sistema:

$$(-11A - 2B)cos(2w) = 0cos(2w)$$
$$(2A - 11B)sen(2w) = 0sen(2w)$$

$$(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)\{w[Ccos(2w) + Esen(2w)]\} = wsen(2w)$$
$$\left[\left(w + \frac{d}{dD}\right)(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)\right]\{Ccos(2w) + Esen(2w)\} = wsen(2w)$$
$$w(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)\{Ccos(2w) + Esen(2w)\} + (3D^2 + 6D + 3)\{Ccos(2w) + Esen(2w)\} = wsen2(w)$$

$$-w(D+11)\{Ccos(2w)+Esen(2w)\}+(3[-(2)^2]+6D+3)\{Ccos(2w)+Esen(2w)\}=wsen(2w)$$

$$-w(D+11)\{Ccos(2w)+Esen(2w)\}+(6D-9)\{Ccos(2w)+Esen(2w)\}=wsen(2w)$$

Desarrollando:

$$-w[(11C+2E)cos(2w)+(-2C+11E)sen(2w)]+(-12Csen(2w)-9Ccos(2w)+12Ecos(2w)-9Esen(2w))=wsen(2w)$$

Agrupando se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(-11C - 2E)wcos(2w) = 0wcos(2w)$$
$$(2C - 11E)wsen(2w) = wsen(2w)$$
$$(-11A - 2B - 9C + 12E)cos(2w) = 0cos(2w)$$
$$(2A - 11B - 12C - 9E)sen(2w) = 0sen(2w)$$

Resolviendo:

$$C = \frac{2}{125} \quad E = -\frac{11}{125} \quad A = -\frac{1500}{15625} \quad B = -\frac{1125}{15625}$$

$$y^{''} + 2y^{'} + 5y = e^{-t}cos(2t)$$

Solución:

$$y_H = e^{-t}[C_1 cos(2t) + C_2 sen(2t)$$
$$y_p = te^{-t}[Acos(2t) + Bsen(2t)]$$
$$(D^2 + 2D + 5)te^{-t}[Acos(2t) + Bsen(2t)] = e^{-t}cos(2t)$$
$$\left[\left(t + \frac{d}{dD}\right) D^2 + 2D + 5\right] \{e^{-t}[Acos(2t) + Bsen(2t)]\} =$$
$$e^{-t}cos(2t)$$
$$t(D^2 + 2D + 5)\{e^{-t}[Acos(2t) + Bsen(2t)]\}$$
$$+(2D + 2)\{e^{-t}[Acos(2t) + Bsen(2t)]\} = e^{-t}cos(2t)$$

$e^{-t}t[(D-1)^2+2(D-1)+5]\{Acos(2t)+Bsen(2t)\}+$
$e^{-t}[2(D-1)+2]\{Acos(2t)+Bsen(2t)\}=e^{-t}cos(2t)$
$te^{-t}[D^2+4]\{Acos(2t)+Bsen(2t)\}+e^{-t}[2D]\{Acos(2t)+$
$Bsen(2t)\}=e^{-t}cos(2t)$
Formándose el sistema:

$$-4Ae^{-t}sen(2t)=0e^{-t}sen(2t)$$
$$4Be^{-t}cos(2t)=1e^{-t}cos(2t)$$

Obteniéndose:

$$A=0 \quad B=\frac{1}{4}$$

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{4}cos(t)$$

Solución:

$$\begin{gathered} y_H = C_1 e^t + C_2 t e^t \\ y_p = Acos(t) + Bsen(t) \\ (D^2 - 2D + 1)[Acos(t) + Bsen(t)] = \tfrac{1}{4}cos(t) \\ [-2D](Acos(t) + Bsen(t) = \tfrac{1}{4}cos(t)) \\ 2Asen(t) - 2Bcos(t) = \tfrac{1}{4}cos(t) \end{gathered}$$

donde:

$$A = 0 \quad B = -\tfrac{1}{8}$$