Cuestionario Previo. Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales en circuitos eléctricos

Instrucciones: Resolver las siguientes preguntas.

1.- Define los siguientes conceptos:

a) Resistencia

b) Capacitancia

c) Inductancia

d) Circuito eléctrico

2.- Como se define un circuito en serie y un circuito en paralelo

3.- Dibuje un ejemplo de ambas configuraciones de la pregunta anterior

4.- ¿Qué es y para qué sirve un osciloscopio?

5.- ¿Qué es y para qué sirve un multímetro?

6.- Dibuje la interconexión y partes de una protoboard

Práctica

Aplicación de las Ecuaciones diferenciales en circuitos eléctricos

1 Objetivos

1 Determinar el valor de la inductancia en un circuito RL.

2 Verificar experimentalmente el valor de la resistencia que se necesita para que un circuito RLC en serie sea críticamente amortiguado, y además corroborar el rango de valores que aquél puede tener para que el sistema tenga una respuesta subamortiguada o sobreamortiguada.

3 Comprobar la respuesta en estado permanente en el circuito RLC en serie con fuente de alimentación sinusoidal.

2 Introducción

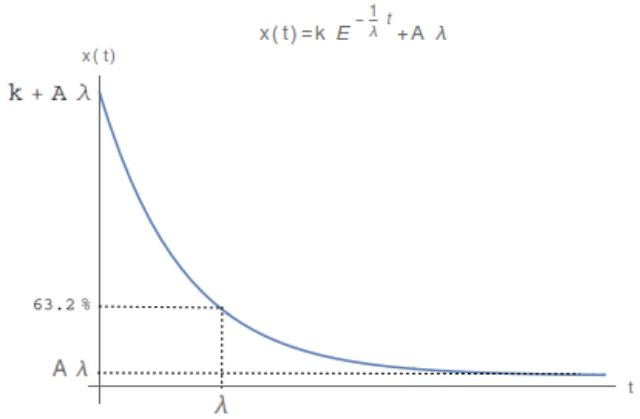
El modelo matemático de un sistema de primer orden es una ecuación diferencial que puede escribirse como:

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t}+\frac{1}{\lambda}\,x(t)=A$$

consideranto a A un valor constante, cuya respuesta estará dada por:

$$x(t)=k\,e^{-\frac{1}{\lambda}t}+A\lambda$$

donde λ es una constante, que determinará el tiempo en el cuál se alcanza el 63.2% de valor final ($A\lambda$) considerando su valor inicial en $k+A\lambda$. Como se puede apreciar en la gráfica.



Para un sistema de segundo orden la ecuación diferencial puede escribirse como:

$$\frac{d^2\,x(t)}{d\,t^2}+2\,\xi\,\omega_0\,\frac{d\,x(t)}{d\,t}+\omega_0^2\,x(t)=\omega_0^2\,f(t)$$

en la cual al parámetro ξ se le denomina factor de amortiguamiento, y al parámetro ω_0 se le conoce como frecuencia angular natural de oscilación. La función $f(t)$ es la entrada o función de excitación del sistema y $x(t)$ es la salida o respuesta del mismo.

La ecuación característica que corresponde al modelo matemático anterior es:

$$s^2+2\,\xi\,\omega_0\,s+\omega_0^2=0$$

y cuyas raíces son los valores característicos:

$$s_{1,2}=-\xi\,\omega_0\pm\omega_0\sqrt{\xi^2-1}\,.$$

Dependiendo del valor de ξ, dichos valores pueden ser reales, imaginarios o complejos, dando los siguientes comportamientos en la respuesta del sistema:

si $\xi = 0$, entonces $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ (valores imaginarios), y el sistema será no amortiguado (caso teórico ideal);

si $0 < \xi < 1$, entonces $s_{1,2} = -\xi\,\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ (valores complejos conjugados), y el sistema será subamortiguado;

si $\xi = 1$, entonces $s_{1,2} = -\xi\,\omega_0$ (valores reales negativos iguales), y el sistema será críticamente amortiguado;

finalmente, si $\xi > 1$, entonces $s_{1,2} = -\xi\,\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2-1}$ (valores reales negativos diferentes), y el sistema será sobreamortiguado.

Es importante el análisis cualitativo de los diferentes tipos de sistemas de segundo orden, de manera de poder reconocerlos a partir de la gráfica de su respuesta.

Para el caso particular de los sistemas de segundo orden subamortiguados, presentan varios parámetros de interés en su respuesta, como lo son la frecuencia de oscilación, su inverso el periodo de oscilación, el sobrepaso, el tiempo de sobrepaso, el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.

1 Frecuencia de oscilación, f, es el número de oscilaciones que tiene la respuesta del sistema por unidad de tiempo:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

donde $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$.

2 Periodo de oscilación, T, es el tiempo que transcurre en una oscilación completa de la respuesta del sistema:

$$T = \frac{1}{f}\,.$$

3 Sobrepaso, Sp, es el valor máximo de la respuesta, considerando la respuesta permanente unitaria ($v_f = 1$):

$$Sp = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right).$$

4 Tiempo de sobrepaso, tp, es el tiempo necesario para que la respuesta alcance su valor máximo:

$$tp = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}\,.$$

5 Tiempo de levantamiento, tl, es el tiempo necesario para que la respuesta alcance su valor permanente por primera vez:

$$tl = \frac{\pi-\phi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}\,,\ \text{donde}\ \phi = \arccos\xi\,.$$

6 Tiempo de asentamiento, ta, es el tiempo que transcurre para que la respuesta oscile entre el 95% y el 105% de su valor permanente:

$$ta = \frac{3}{\xi\,\omega_0}\,.$$

En la Figura 1 se ilustran los parámetros mencionados en los párrafos anteriores.

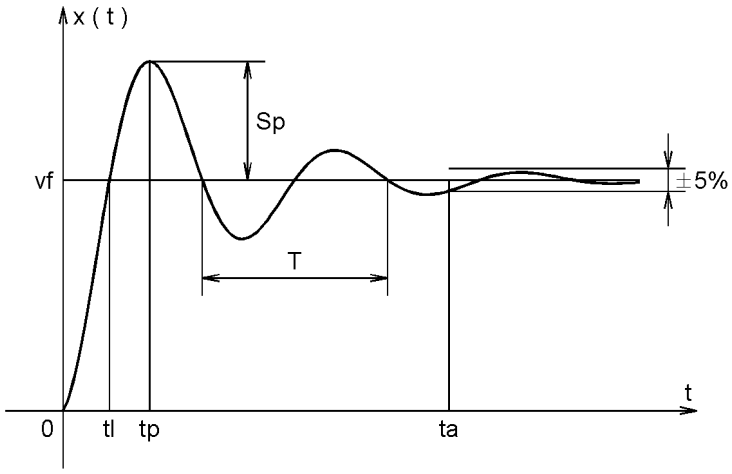


Figura 1 Parámetros de la respuesta de un sistema subamortiguado.

En el diseño de circuitos se presenta con frecuencia el problema de la obtención de los valores de los dispositivos eléctricos, en este caso del resistor, del inductor y del

condensador, de tal forma que, dada la configuración del sistema, se obtenga una salida determinada.

Dado que las cantidades ξ y ω_0 quedan en función de los valores de los dispositivos que conforman al circuito, es posible calcular los valores de estos últimos si se establece que la respuesta del sistema es críticamente amortiguada, o bien, se conocen otros parámetros de diseño, como el periodo para el caso de la respuesta subamortiguada.

3 Equipo y material empleado

Un osciloscopio
un generador de funciones
una fuente de poder
un multímetro
resistores de 68, 180, 820, 1000 y 1800 Ω
un inductor (50 mH aprox.)
un condensador de 0.22 μF
una tableta de experimentación (protoboard).

4 Desarrollo

4.1 Medición de la inductancia

Conecte al inductor las terminales del generador de funciones, con una señal cuadrada de 5 V pico y con una frecuencia de 200 Hz.

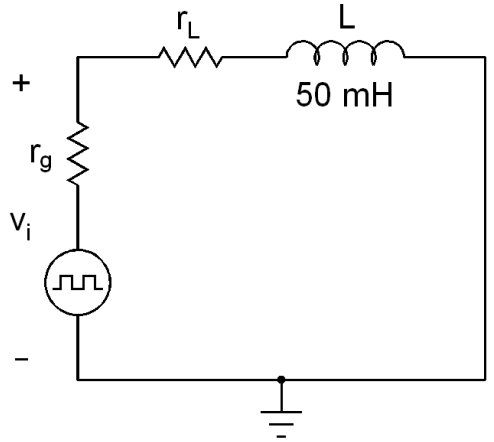


Figura 2 Circuito RL en serie.

La ecuación diferencial que modela el comportamiento del circuito es:

$$\frac{d\,i_L(t)}{d\,t}+\frac{R}{L}\,i_L(t)=\frac{V_i(t)}{L}$$

Verifique con el osciloscopio la señal de voltaje de dicho inductor, y determine el tiempo en que se obtiene una variación del 63.2% de la diferencia del valor final y el valor inicial. Dicho valor es la constante de tiempo del circuito RL, la cual debe ser igual a:

$$\tau=\frac{L}{R}\ .$$

Dado que se conoce R, el cual es la suma de las resistencias internas del generador de funciones y del inductor, es posible determinar el valor de la inductancia L.

4.2 Circuito RLC serie, respuesta transitoria

Arme el circuito mostrado en la Figura 3 con un resistor con un valor de resistencia de R = 68 Ω. Note que las resistencias r_g y r_L son las resistencias internas del generador de funciones y del inductor, respectivamente. Aplique una señal cuadrada con una amplitud de 5 V pico y una frecuencia de 200 Hz.

Observe en el osciloscopio la señal de salida del circuito, v_C, y verifique el tipo de sistema al que corresponda (subamortiguado, sobreamortiguado, críticamente amortiguado).

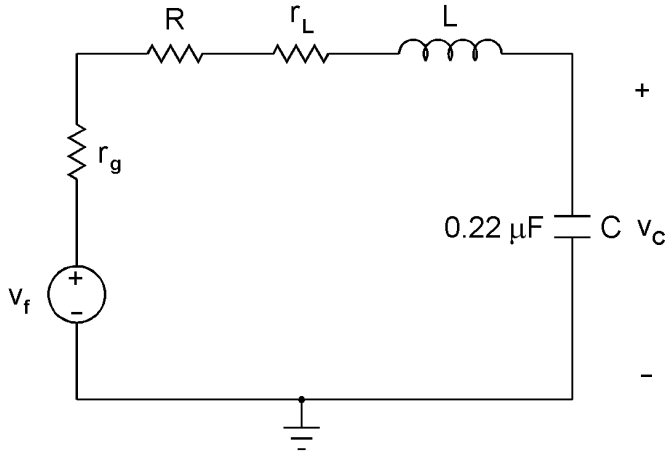


Figura 3 Circuito RLC en serie.

La ecuación diferencial que modela el comportamiento del circuito es:

$$\frac{d^2 V_c(t)}{d t^2}+\frac{R}{L}\frac{d V_c(t)}{d t}+\frac{1}{LC} V_c(t)=\frac{V_f(t)}{LC}$$

Posteriormente cambie el resistor por uno que tenga una resistencia de R = 820 Ω, y de igual manera verifique el tipo de sistema al que corresponde su respuesta.

Finalmente realice la misma operación, pero para un resistor con una resistencia de R = 1.8 kΩ.

Para el circuito cuya respuesta corresponda a un sistema subamortiguado, mida el periodo del transitorio, T, el tiempo de sobrepaso, tp, el tiempo de levantamiento, tl, y el tiempo de asentamiento, ta.

4.5 Circuito RLC serie, respuesta permanente con fuente sinusoidal.

Para el circuito del experimento anterior, cambie el tipo de señal por una sinusoidal, conecte en el segundo canal del osciloscopio la señal de entrada y anote la amplitud, frecuencia de ambas señales, así como el desfase entre ellas.

5 Informe

5.1 Resuelva la ecuación diferencial que modela el comportamiento del circuito RL de la figura 2, considerando que Vi=5 V, la solución queda en término de iL, obtenga la expresión del voltaje del inductor si se sabe que: $V_L(t)=L\frac{d i_L(t)}{d t}$

Dibuje la gráfica de VL y comparela con la señal que obtuvo en el osciloscopio para el cálculo de la inductancia, acotando los valores máximo y mínimo del voltaje en el inductor, así como el tiempo y su respectivo valor de voltaje en el punto en que se midió el 63.2% de la diferencia de los valores final e inicial.

Obtenga el valor de la inductancia medida.

5.2 Escriba la ecuación diferencial que modela al sistema eléctrico de la Figura 2, para los valores teóricos de R utilizados, obtenga la solución de dicha ecuación, considere la Vf como constante igual a 5. Indique para cuales el circuito tiene las respuestas:

1 subamortiguada, con $\xi = 0.2$;

2 críticamente amortiguada;

3 sobreamortiguada, con $\xi = 2$.

5.3 Para el caso del circuito con respuesta subamortiguada, obtenga los valores teóricos del periodo del transitorio, T, el tiempo de sobrepaso, tp, el tiempo de levantamiento, tl, y el tiempo de asentamiento, ta, y compárelos con los valores medidos experimentalmente. Haga los comentarios que considere pertinentes.

5.4 Para el circuito RLC Considerando una fuente de alimentación de Vf=5 cos 400πt V, determine la respuesta en estado permanente del voltaje en el contensador, escriba la expresión en términos de una sola función sinusoidal utilizando las relaciones matemáticas pertinentes, y compárela con la obtenida en el osciloscopio. Verificar que se cumple el desfasamiento de la señal de salida con respecto a la señal de entrada.

$$\frac{d^2 V_c(t)}{d t^2}+\frac{R}{L}\frac{d V_c(t)}{d t}+\frac{1}{LC} V_c(t)=\frac{V_f(t)}{LC}$$

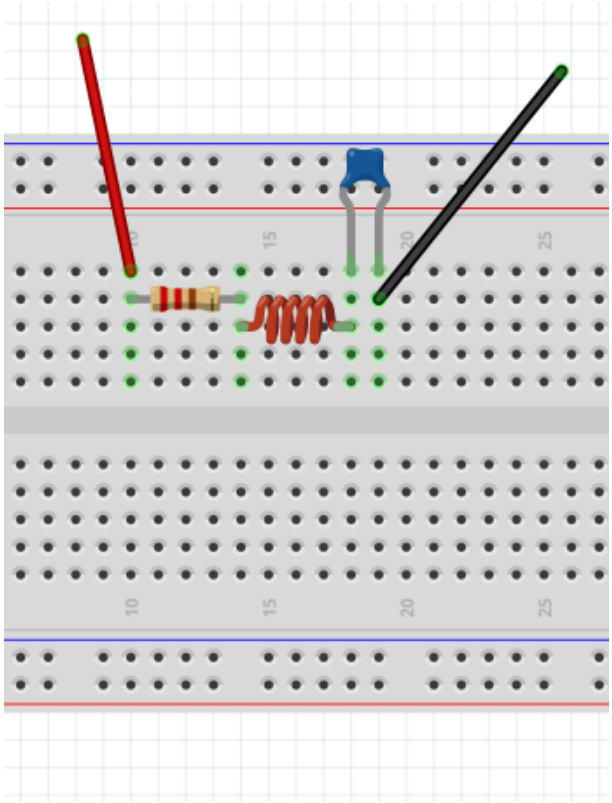
6 Conclusiones, sugerencias y comentarios

7 Bibliografía

Dorf, Svoboda, *Circuitos eléctricos*, Quinta edición, Alfaomega, México, 2003.

Desoer, Kuh, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill, EUA, 1969.

Ogata, *Dinámica de Sistemas*, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1987.

Minami Yukihiro. *Prácticas 8 y 9 del laboratorio de Análisis de Circuitos, DIMEI* octubre de 2010.

Propuesta de conexión del circuito RLC en la tarjeta protoboard