Tema 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

Presenta:
Daniel Peña Maciel

Subtema 1.1

Responder:

1) ¿Qué es una ecuación?

2) ¿Tipos de igualdades?

3) ¿Notación funcional en el Cálculo?

Subtema 1.1

Objetivo tema 1:

El alumno identificará las EDs como modelo matemático de fenómenos físicos y resolverá EDs de primer orden.

Definición de ED:

Ecuación que relaciona una o varias funciones <u>desconocidas</u> [variable(s) dependiente(s)] con sus derivadas y su(s) variable(s) independiente(s).

Subtema 1.1

1) $\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + cu = f(t)$

2) $mr^2 + cr + k = 0$

3) $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

4) $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t};\ \ 0 < x < L\,, t > 0$

2) NO es una ED.

Clasificación de EDs: **a) Tipo.** **b) Orden.** **c) Grado.**

Subtema 1.1

a) Tipo de ED:

- Ordinarias: La(s) ED(s) contiene(n) derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una sola variable independiente.

$u(t);\quad y(x)$

EDOs

1) $\dfrac{d^2u}{dt^2} + b\dfrac{du}{dt} + cu = 0$

5) $\dfrac{d^2u}{dx^2} - 2\dfrac{du}{dx} = 2x^2 + 6$

- Parciales: La(s) ED(s) contiene(n) derivadas parciales de 1 o más variables dependientes, con respecto a 2 o más variables independientes.

$u(x,t);\ z(x,y)$

EDPs

4) $k\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t};\quad 0 < x < L\,, t > 0$

6) $\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial v}{\partial t} = 2x^2 + e^t$

b) Orden de una ED: Es el de la derivada de mayor orden contenida en la ecuación.

c) Grado de una ED: Potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden, siempre y cuando la ecuación diferencial esté dada en forma polinomial.

$$7)\ \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^3 + b\frac{du}{dt} + cu = 0$$

$$4)\ k\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{\partial u}{\partial t};\quad 0 < x < L\,, t > 0$$

Recomendación importante: Reescribir la ED

$$y^{(n)} - f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) = 0$$

Coeficiente derivada mayor orden $= 1$

c) Grado de la ED:

1) Lineales (L):

a) Todas las potencias de la(s) variable(s) dependiente(s) y de sus derivadas, son iguales a 1:

$$(y'')^3; \quad y^2; \quad \left[y^{(5)}\right]^2.$$

b) No aparece algún producto de la(s) variable(s) dependiente(s) consigo misma(s) ni con su(s) derivadas:

$$y\,y''; \quad y\,y'; \quad y'''y^{(n)}.$$

c) La(s) variable(s) dependiente(s) o su(s) derivada(s), NO aparecen como argumentos de funciones no lineales:

$$sen(y); \quad e^{y'}; \quad ln|y''|; \quad cos\left(y^{(n)}\right).$$

c) Grado de la ED:

2) No lineales (NL) : Las que no cumplen las 3 propiedades anteriores.

En otras palabras, una ED lineal puede contener:

a) Potencias diferentes a 1 ó, funciones no lineales de la(s) variable(s) independiente(s).

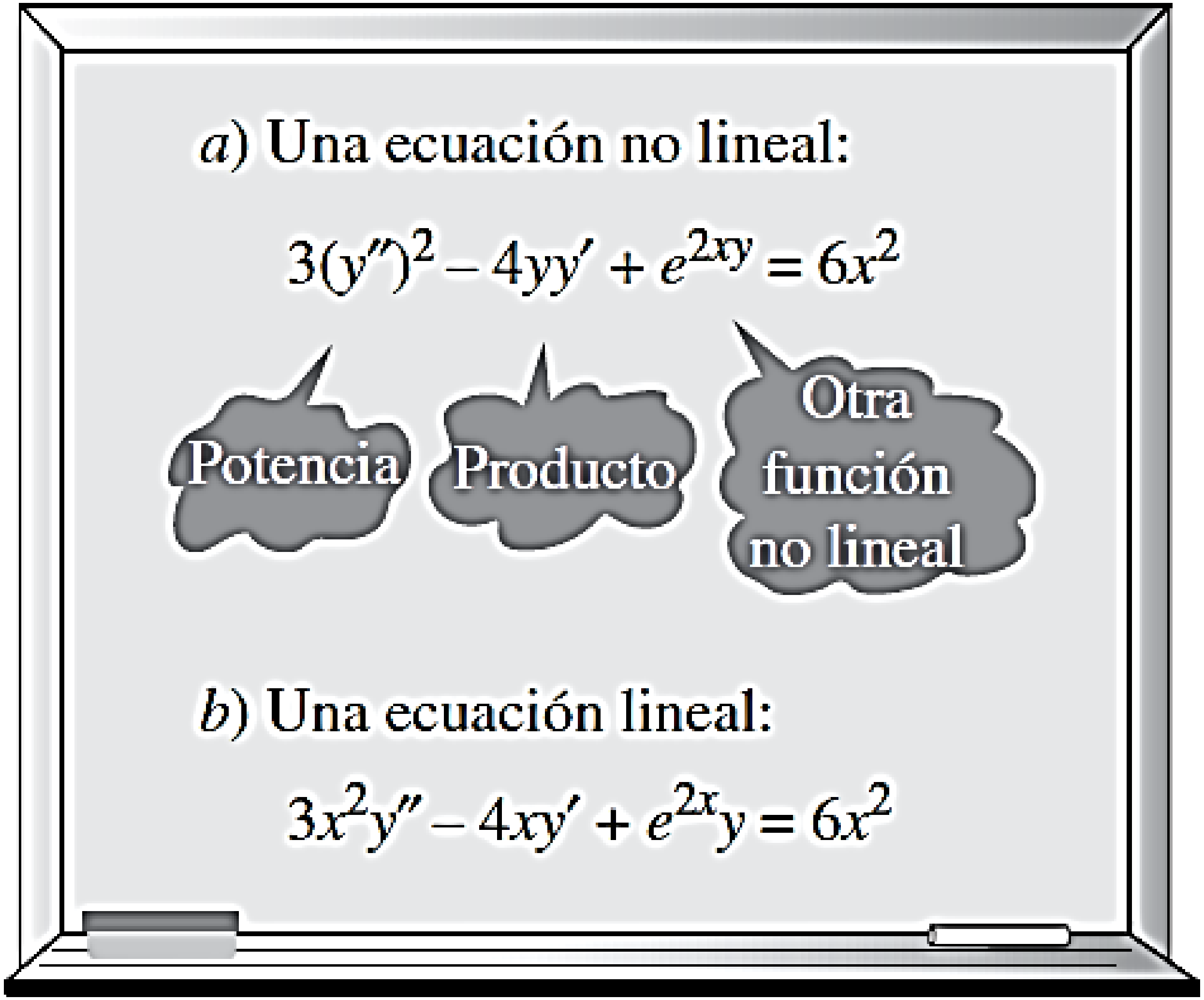
$y = f(x)$
$y = f(t)$

$$x^2 \; ; \quad [cos(x)]^3; \quad e^{x^2}; \quad \left[ln|t|^5\right]^2 .$$

b) Productos de una variable dependiente (o de sus derivadas) y funciones de alguna variable independiente.

$y = f(x)$
$y = f(t)$

$$x^3 y'; \quad t^4 y; \quad e^{-2x} y''; \quad x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$



Çengel & Palm III(2014).

Subtema 1.1

Ejemplos de EDs

ED	Tipo	Orden	Grado	L / NL
$\frac{d^3y}{dx^3} + 2(y')^2 + 3y = 2e^{-x}$				
$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + kx - \frac{\partial y}{\partial s}$				
$x^2yy'' + xyy' + y^2 = 0$				
$yy'' + x^2y = x$				
$y\frac{\partial y}{\partial t} + y\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = yc$				
$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$				

Subtema 1.1

Ejemplos de EDs

ED	Tipo	Orden	Grado	L / NL
$\frac{d^3y}{dx^3} + 2(y')^2 + 3y = 2e^{-x}$	O	3	1	NL
$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + kx - \frac{\partial y}{\partial s}$	P	1	1	L
$x^2y'' + xy' + y = 0$	O	2	1	L
$yy'' + x^2y = x$	O	2	1	NL
$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = c$	P	2	1	L
$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$	O	2	1	L

EDO lineal (forma general) de orden n, no homogénea (NH)

de coeficientes variables (CV)

$y = y(x)$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = \boxed{g(x)}$$

1) Si $g(x) = 0$ → Ecuación homogénea (H)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

2) Si $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$ NO dependen de x :

Ecuación de coeficientes constantes (CC)

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

Forma general (implícita) de una EDO:

Orden n: $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$

Función de n+2 variables

Coeficiente = 1

$y^{(n)} - f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) = 0$

Forma normal de una EDO:

Orden n: $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$

Queda en función de las n+1 variables restantes. La función f es continua y de valores reales.

$4xy' + y = x$ → $y' + \dfrac{y}{4x} = \dfrac{1}{4}$ $\qquad y' = \dfrac{x-y}{4x}$

$y'' - y' + 6y = 0$ → $y'' = y' - 6y$

Subtema 1.2

Tarea principal de la teoría de EDs:

Hallar todas las soluciones de una ED dada e investigar sus propiedades.

Solución de una ED:

Función que no contiene derivadas y que satisface a dicha ecuación; es decir, al sustituir la función y sus derivadas en la ED resulta una identidad.

Demostrar que las funciones siguientes, son soluciones de las EDs respectivas.

a) $y = e^{-x} + 100$

a) $y' = -e^{-x}$

Subtema 1.2

Demostrar que las funciones siguientes, son soluciones de las EDs respectivas.

b) $y = sen(x)$

b) $y = sen(x) + 3$

b) $y = -sen(x) - \frac{4}{5}$

b) $y' - cos(x) = 0$

c) $y = 3x^2 + c_1x + c_2$

c) $y'' = 6$

d) $u = 2xy^2 + 3x^2 + g(y) + f(x)$

d) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 4y$

Intervalo de definición de una solución:

Intervalo de: existencia, validez. Dominio de la solución.

(a, b); $[a, b]$; (a, ∞), etc.

Verifique si la función dada, es una solución de la ED siguiente en el I: (- ∞,∞).

$$y = xe^x$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$y' = xe^x + e^x$$

$$y'' = xe^x + 2e^x$$

Solución trivial de una ED en un I:

$$y = 0$$

Familia n-paramétrica de funciones: Función que contiene una o más constantes arbitrarias (obtenidas de las sucesivas integraciones).

$$G(x, y, c_1, c_2 \dots, c_n) = 0$$

Constantes o parámetros: $c_i \; ; \; i = 1 \dots, n$

b) $y' - cos(x) = 0$

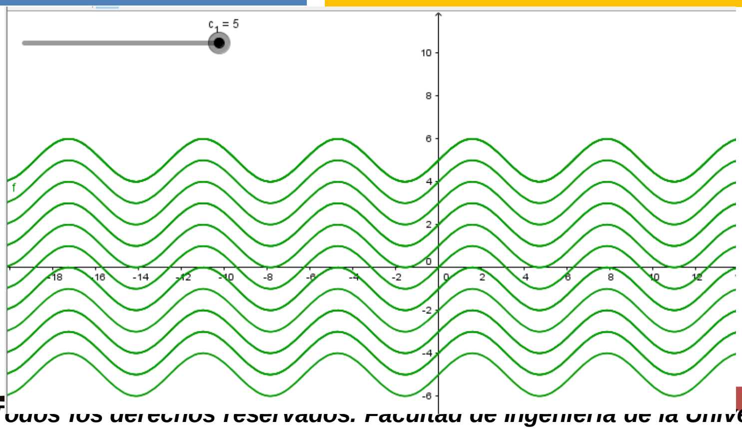
$y = sen(x) + c_1$

$c_1 = 0; \;\; c_1 = 3; \;\; c_1 = -\frac{1}{2}$

c) $y'' = 6$

c) $y = 3x^2 + c_1 x + c_2$

$c_1 = -1; \;\; c_1 = 3; \;\; c_1 = 0$
$c_2 = 0; \;\; c_2 = -\frac{1}{2}; \;\; c_2 = 3$



Elaboración propia.

Subtema 1.2

Tipos de soluciones de EDOs, si existen parámetros o ctes. arbitrarias en ellas:

a) **General.**
b) **Particular.**
c) **Singular.**

Solución general de una EDO:

Si en un intervalo I, toda solución de la EDO de orden n, se obtiene de una familia n-paramétrica de funciones, entonces, dicha familia es la solución general de la ED. En sentido práctico, sólo aplica para EDOs lineales.

b) $y' - cos(x) = 0$

$y = sen(x) + c_1$

EDO de orden n:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Subtema 1.2

Solución particular de una ED:

Función que satisface a dicha ecuación, y cuyas constantes no son arbitrarias, toman un valor específico.

b) $y' - cos(x) = 0$

$y = sen(x) + c_1$

b) $y = sen(x)$

b) $y = sen(x) + 3$

b) $y = sen(x) - \frac{4}{5}$

Demostrar que las funciones dadas, son soluciones de las EDs respectivas.

e) $y = e^x[3\,cos(2x) + 1\,sen(2x)]$

$y'' - 2y' + 5y = 0$

f) $x^2 + y = c$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$$

Subtema 1.2

Solución singular de una EDO:

Función que no puede obtenerse a partir de la solución general, al asignar un valor específico a las constantes arbitrarias.

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$

$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$$

$$y = \frac{1}{16}x^4$$

$$y = 0$$

Subtema 1.2

Tipos de soluciones de EDOs, si la variable dependiente puede despejarse:

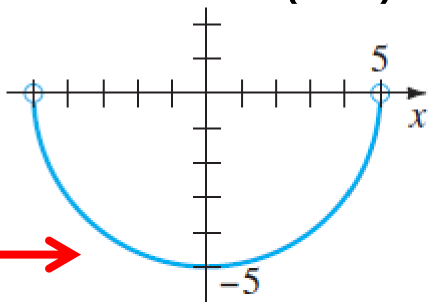
a) **Explícita** $y = f(x)$ $y = xe^{x}$

b) **Implícita** $G(x, y) = 0$

Ejemplo: $x^2 + y^2 = 25$ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ $I: (-5,5)$

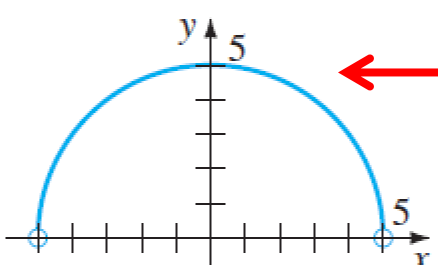
$2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ $y \neq 0$

Zill & Cullen (2009).



$y_1 = \sqrt{25 - x^2}$

$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$



Zill & Cullen (2009).

Relación entre una solución particular y la solución general: Problema de valor inicial

PVI

Tema 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

Presenta:
Daniel Peña Maciel

Subtema 1.3

Considere el problema geométrico siguiente: encontrar la curva en el plano xy cuya pendiente en cualquier punto (x,y), es igual a 2x.

$y(x)$ → Función desconocida

$m = 2x$

$\frac{dy}{dx} = 2x$ → EDO

Del Cálculo integral:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

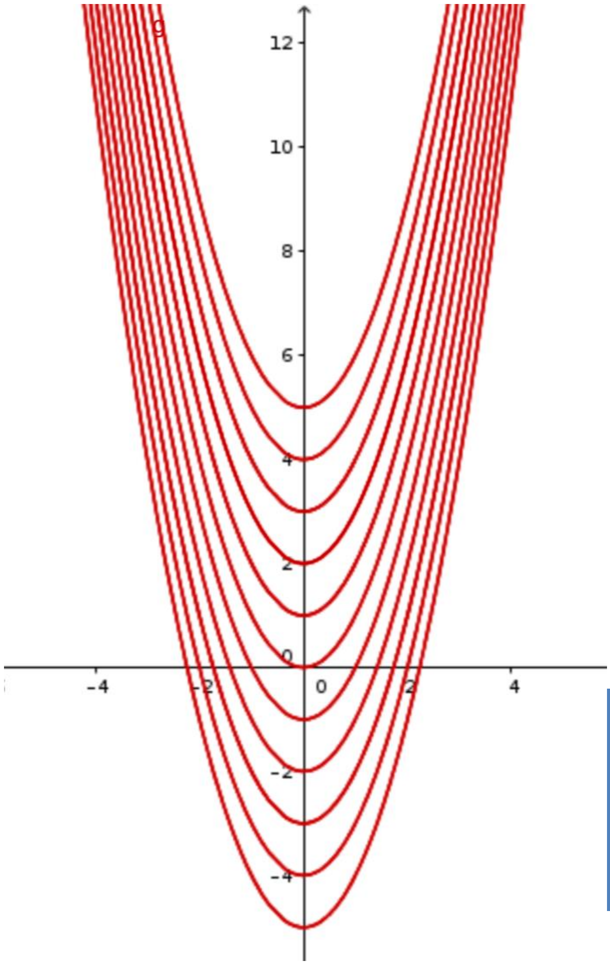
$\Rightarrow$ $F'(x) = f(x)$

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int 2xdx + c$$

$$y = \int 2xdx + c$$

$$y(x) = x^2 + c$$

Subtema 1.3



Elaboración propia.

$$y(x) = x^2 + c$$

Otro enfoque:

$$F'(x) = \boxed{\frac{dF}{dx} = f(x)}$$

$$dF = f(x)dx \quad \xrightarrow{\text{Int.}}$$

$$\int dF = \boxed{\int f(x)dx} \rightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\int dF(x) = F(x) + c \leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$dy = 2xdx$$

$$y(x) = x^2 + c$$

Subtema 1.3

En la mayoría de casos prácticos de ingeniería, se requiere una única solución para un problema particular.

Solución general $\xrightarrow{\text{CI}}$ Solución particular

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

EDO

$$y(x_0) = y_0$$

$$y(-1) = 2$$

CI

PVI

$$y(x) = x^2 + c$$

Sol. gral.

$$c = 1$$

Sol. part.

$$y(x) = x^2 + 1$$

Hallar una única solución para un problema específico, refiere resolver un problema de valor(es) inicial(es) [PVI].

PVI:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

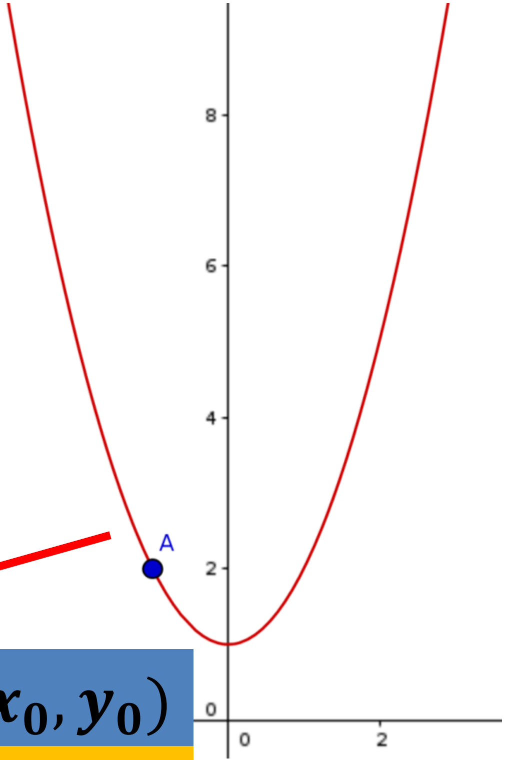
$$y(-1) = 2$$

$$y(x) = x^2 + c$$

$$c = 1$$

$$y(x) = x^2 + 1$$

Sol. particular



$$(x_0, y_0)$$

$$(-1, 2)$$

Elaboración propia.

Problema de valores iniciales (PVI): Aquel en el que la solución $y(x)$ cumple ciertas **condiciones** impuestas sobre ésta o sus derivadas, en algún intervalo **I** que contiene al punto x_0 .

PVI 1er orden: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ **Sujeta a:** $y(x_0) = y_0$ Condición inicial (**CI**)

Valor de $y(x)$ en el punto x_0 .

PVI 2do orden: $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$ **Sujeta a:** $y(x_0) = y_0;$ $y'(x_0) = y_1$ Condiciones iniciales (**CI**)

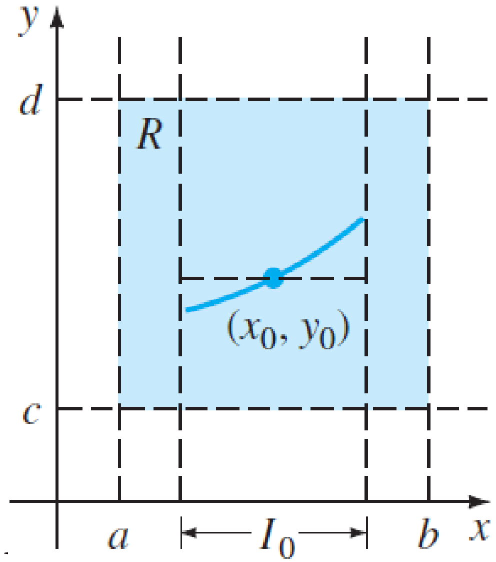
Valores de $y(x)$ y su primera derivada en el punto x_0 .

Subtema 1.4

Teorema de existencia y unicidad para un PVI

Considerando el PVI: $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ **EDO** $y(x_0) = y_0$ **CI**

Sean $f(x, y)$ $\partial f/\partial y$ **funciones continuas en una región R (rectangular) definida por: a≤x≤b, c≤y≤d, que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior.**



Entonces, existe algún intervalo I_0: $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, contenido en [a,b], y una única función $y(x)$ definida en I_0, que es una solución del PVI.

Zill & Cullen (2009).

Subtema 1.4

Teorema de existencia y unicidad para un PVI

Ejemplo 1). Para el PVI:

$$3\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3 \quad ; \quad y(1) = 6$$

El teorema de existencia y unicidad, ¿implica la existencia de una única solución?

Ejemplo 2). Para el PVI:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \quad ; \quad y(2) = 0$$

El teorema de existencia y unicidad, ¿implica la existencia de una única solución?

$$y(2) = 1$$

Subtema 1.5

EDOs, 1er orden (L ó NL): Métodos de solución

1) **EDs de variables separables.**
2) **EDs con coeficientes homogéneos.**
3) **EDs exactas.**
4) **EDs no exactas, factor integrante.**

EDOLs, 1er orden → 5) **EDs lineales, factor integrante.**

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Si $f(x,y)$ → tiene forma arbitraria, no siempre es posible expresar la solución de la EDO mediante funciones elementales.

Integrando:

$$y(x) = \int f(x, y(x))\,dx + c$$

→ **No se logra mucho, ya que**

$y(x)$ → es una función desconocida.

Entonces, se usan → Métodos: numéricos y/o cualitativos.

Subtema 1.5

1) Método de variables separables

Criterio

Si $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ puede expresarse como: $\dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y).$

Dicha ED es separable, o tiene variables separables.

La EDO puede resolverse de 2 formas:

a) Se divide la EDO por **h(y)**, se integra respecto a **x** y se usa la **regla** de la **cadena**, considerando: $dy = y'dx$.

b) Las variables se separan considerando las diferenciales:

Subtema 1.5

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + c$$

EDOs separables o de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

Como $h(y) \neq 0$ **para cada valor de** y **entonces:**

$y = cte = a$ $\quad h(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = a$ **es solución de** $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$

Al separar, estas soluciones pueden perderse.

Ejemplos sobre EDOs separables

1) $y' = (x+1)e^{-x}y^2$

2) $\dfrac{dy}{dx} - 1 - y^2 = 0$

3) $\dfrac{y'}{y} = -2x$

4) $\dfrac{-x\cos(y)}{(x+2)sen(y)}y' = 1$

2) EDOs con coeficientes homogéneos

Una función $f(x,y)$ → **es homogénea de grado k en sus argumentos si, se cumple la identidad:**

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y)\ ;\ k\in\mathbb{R}$$

Ejemplos:

a) $f(x,y)=x^2+y^2-xy$

$$\lambda^2\left[x^2+y^2-xy\right]=\lambda^2 f(x,y)$$

Función homogénea de grado 2.

b) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x}$

$$\frac{\lambda[x+y]}{\lambda[x]}=\lambda^0 f(x,y)=f(x,y)$$

Función homogénea de grado 0 .

La EDO $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ es de **coeficientes homogéneos** si se cumple cualquiera de los criterios siguientes:

a) La función **f(x,y)** es **homogénea** de grado **0**.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x,y)$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-M}{N} \rightarrow Ndy = -Mdx \rightarrow Mdx + Ndy = 0$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

→ Forma diferencial, EDO de 1er orden

b) Los coeficientes **M(x,y)** y **N(x,y)** son funciones **homogéneas** del mismo grado (**k**).

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x,y) \qquad N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k N(x,y)$$

La EDO tiene grado de homogeneidad **k**.

Dichos criterios, indican que f(x,y) se puede expresar en términos del cociente y/x .

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \rightarrow \frac{dy}{dx}=G\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow v=\frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx}=G(v)$$

Expresando $\frac{dy}{dx}$ **en términos de x y v:** $y=vx$ $\quad y(x)\,;\ v(x)$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=G(v) \rightarrow \text{EDO separable.}$$

$$\int\frac{1}{G(v)-v}dv=\int\frac{dx}{x}+c$$

Nota: expresar la solución final en términos de las variables originales y y x.

Subtema 1.6

a) $v = \frac{y}{x}$

Otras sustituciones:

b) $v = ax + by + c$ $\frac{dy}{dx} = G(v)$ $\frac{dv}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$

c) Ecuaciones con coeficientes lineales:

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

$x = u + h$ $y = v + k$

d) Ecuaciones de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$v = y^{1-n}\ ;\ \ n \neq 0, 1$

Tema 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

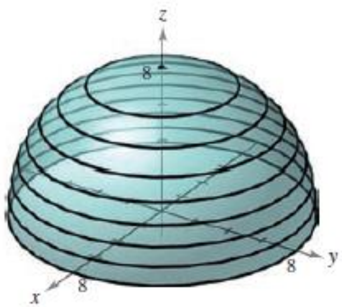
Presenta:
Daniel Peña Maciel

3) EDOs exactas

Del Cálculo integral: → Si una función $z(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas,

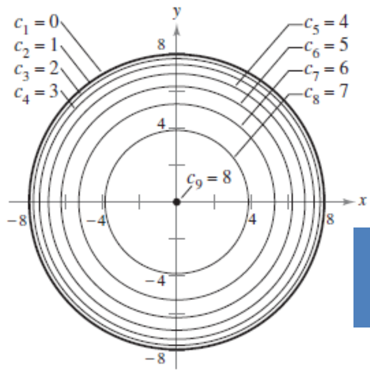
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$ → Diferencial total

$z(x,y)$



Superficie en el espacio.

Larson & Edwards (2010).



Curvas de nivel.

$z(x,y) = c$

Larson & Edwards (2010).

$dz = 0$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}}dx + \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}}dy = 0 \rightarrow \boxed{M(x,y)}dx + \boxed{N(x,y)}dy = 0$$

Criterio para una diferencial exacta

Sean $M(x,y)$ $N(x,y)$ continuas y tengan primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular R definida por: a<x<b, c<y<d.

La condición necesaria y suficiente para que la EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

sea una diferencial exacta es:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \exists\, z(x,y) = c \mid \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = N$$

Ejemplo:

$$\left[\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right] dx - \frac{y}{x^2} dy = 0$$

Método de solución

a) Determinar si la EDO es exacta: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\Rightarrow \exists\, z \mid$ $\quad z_x = M \quad z_y = N$

b) Integrar la función M(x,y) [N(x,y)] respecto a x [y]:

$$z\,(x, y) = \int M(x, y)\; dx + g(y)$$

o

$$z\,(x, y) = \int N(x, y)\; dy + g(x)$$

c) Derivar la función z(x,y) obtenida, respecto a y [x] :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\; dx + g'(y)$$

o

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x, y)\; dy + g'(x)$$

Subtema 1.7

Método de solución

c) Además, suponer que

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = N$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y) = N(x,y)$$

o

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = M$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy + g'(x) = M(x,y)$$

d) Despejar g'(y) [g'(x)] e integrar este resultado respecto a y [x]. Sustituir la función g(y) [g(x)] obtenida, en la expresión del paso b); igualar a una constante arbitraria c.

Ejemplo de una EDO exacta

$$\left[\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right] dx - \frac{y}{x^2}\, dy = 0$$

4) EDOs no exactas

Si $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ $\Rightarrow$ **La EDO no es una diferencial exacta.**

¿Qué hacer si esto sucede? → **Transformar la EDO a una diferencial exacta.**

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

→ **Multiplicar la EDO por una función(factor integrante o factor de integración) que la transforme a exacta.**

$$\mu(x,y)$$

$$[\mu(x,y)]M(x,y)dx + [\mu(x,y)]N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial[\mu M]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu N]}{\partial x}$$

→ **Desarrollando:** $M\mu_y - N\mu_x = (N_x - M_y)\mu$

4) EDOs no exactas

$$M\mu_y - N\mu_x = (N_x - M_y)\mu$$ → Se llega a una ¡¡¡EDP!!!

Sin embargo, debe suponerse lo siguiente:

$\mu(x)$ **o** $\mu(y)$ → **Factores integrantes especiales (dependen sólo de 1 variable).**

Entonces el problema se simplifica.

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \boxed{\left[\frac{M_y - N_x}{N}\right]}\mu(x)$$

o

$$\frac{d\mu(y)}{dy} = \boxed{\left[\frac{N_x - M_y}{M}\right]}\mu(y)$$

$P(x)$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

$Q(y)$

$$\mu(y) = e^{\int Q(y)dy}$$

Factores integrantes.

Subtema 1.7

Método de solución

a) Dado que la EDO no es exacta: $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$;

se determina un factor integrante μ(x) [μ(y)], mediante:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$
$$P(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$$

o

$$\mu(y) = e^{\int Q(y)dy}$$
$$Q(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$$

b) Obtenida dicha función μ, se multiplica ésta por la EDO original, y se comprueba que la última ya sea exacta. Comprobado esto, se usa el método para EDOs exactas.

Subtema 1.7

Método de solución

Nota: Si al obtener las funciones **P** ó **Q**, alguna de éstas depende de ambas variables, se debe probar que la otra función [**Q** ó **P**] sólo dependa de **1** variable [**y** ó **x**].

Ejemplos, EDOs no exactas:

1) $$\frac{dy}{dx} = y + senx$$

2) $$[x + y]dx - xdy = 0$$

3) $$[x^2 + y^2]dx - xydy = 0$$

Tema 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales y no lineales

Presenta:
Daniel Peña Maciel

Subtema 1.8

EDO lineal (forma general) de orden n, no homogénea (NH) de coeficientes variables (CV)

$$y = y(x)$$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = \boxed{g(x)}$$

Si $g(x) = 0$ → EDO lineal de orden n, homogénea (H),

si $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ → de coeficientes constantes (CC).

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

n=1

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

EDOL (lineal) de 1er orden

Subtema 1.8

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Forma estándar.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

Salida o respuesta a la entrada.

$$p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Entrada, forzamiento o término no homogéneo.

Se busca la solución y(x) en un intervalo I, en el que p(x) y f(x) son continuos.

Solución general EDOL, 1er orden:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

¿Cómo se obtiene esto?

Subtema 1.8

Solución de la EDOL de 1er orden

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$ → **Dicha ecuación puede resolverse de 2 formas:**

a) Variación de parámetros→ Para usarlo, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada. Resuelve ecuaciones: CV, CC, NH, H.

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$

→

$$y(x)=ce^{-\int p(x)dx}$$

$$y_h(x)=cy_1(x)$$

→

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

$$y_p(x)=u(x)y_1(x)$$

b) Método del factor integrante→ Resuelve directamente ecuaciones: CV, CC, NH, H.

$$\mu(x)$$

Subtema 1.8

b) Factor integrante : $\exists \ \mu(x) \mid$ al multiplicarla por la ec. $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$.

Dicha **EDO** puede resolverse por **integración:**

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Factor integrante.

$$\underbrace{\mu(x)\left[\frac{dy}{dx} + p(x)y\right]}_{\dfrac{d[\mu(x)y(x)]}{dx}} = \mu(x)[f(x)]$$

$$\frac{d[\mu(x)y(x)]}{dx} = \mu(x)[f(x)]$$

Integrando:

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)f(x)dx + c$$

Solución general EDOL, 1er orden:

$$y(x) = \underbrace{ce^{-\int p(x)dx}}_{y_h(x)} + \underbrace{\left[e^{-\int p(x)dx}\right]\int e^{\int p(x)dx} f(x)dx}_{y_p(x)}$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Método de solución usando el factor integrante

Nota: Para resolver cualquier EDOL de 1er orden, se recomienda usar el método del factor integrante.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x).$$

a) Escribir la EDO en su forma estándar e identificar p(x).

b) Obtener el factor integrante μ(x) :

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \quad .$$

c) Multiplicar la EDO por la función μ(x) obtenida, y reescribir el lado izquierdo de manera que éste se exprese como la derivada del producto μ(x) y(x):

$$\frac{d\left[e^{\int p(x)dx}\right][y(x)]}{dx} = e^{\int p(x)dx} f(x) \quad .$$

Método de solución usando el factor integrante

d) Integrar ambos lados de la última ecuación obtenida y despejar a y(x).

$$\int \frac{d\left[e^{\int p(x)dx}\right]\left[y(x)\right]}{dx}dx = \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + c \quad .$$

$$\left[e^{\int p(x)dx}\right]\left[y(x)\right] = \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + c$$

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\left[\int e^{\int p(x)dx} f(x)dx + c\right] \quad .$$

Ejemplos de EDOs lineales de 1er orden

1) $$xy' - 4y = x^6 e^x$$

2) $$y' = -y + \sqrt{1 + cos^2(x)}$$

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

Modificado de Zill & Cullen (2009).

a) Hipótesis y suposiciones.

Expresar las suposiciones usando EDs.

b) Formulación matemática.

Resolver las EDs.

c) Obtención de soluciones.

Mostrar las predicciones del modelo, gráficamente, por ejemplo.

d) Verificación de las predicciones obtenidas, usando hechos conocidos.

De ser necesario, modificar las suposiciones o incrementar la resolución del modelo.

Subtema 1.8

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

Consideraciones importantes:

a) Un modelo matemático de un sistema físico, muy frecuentemente involucrará a la variable t (tiempo).

b) Una solución del modelo, proporciona el estado del sistema físico.

c) Una sola ED, puede servir como modelo para varios sistemas o procesos físicos.

Subtema 1.8

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

1) Decaimiento radiactivo de un elemento.

Nagle et al., (2012).

Núcleo radioactivo

Núcleo de 1 átomo →Combinaciones de protones y neutrones.

Decaimiento de átomos →Transformación de éstos en átomos de otras sustancias.

Ra-226 → Rn-222

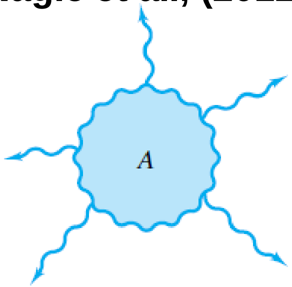
Problema 1): Dada una cantidad de una sustancia radiactiva, por ejemplo, 0.5 [g], encontrar la cantidad de sustancia presente en cualquier momento posterior.

Subtema 1.8

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

1) Decaimiento radiactivo de un elemento.

Nagle et al., (2012).



Información del proceso físico: Los experimentos muestran que en cada instante, una sustancia radiactiva decae de forma **proporcional** a la cantidad de sustancia presente en el instante **t**.

y(t) → Cantidad de sustancia presente en cualquier instante **t**.

k → Cte. de decaimiento de cada sustancia radiactiva.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ky(t)$$

$$y(t=0) = 0.5$$

$$k = 1.4 \times 10^{-11}\ [s^{-1}]$$ → **Ra-226**

Subtema 1.8

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

1) Decaimiento radiactivo de un elemento.

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ky(t)$$

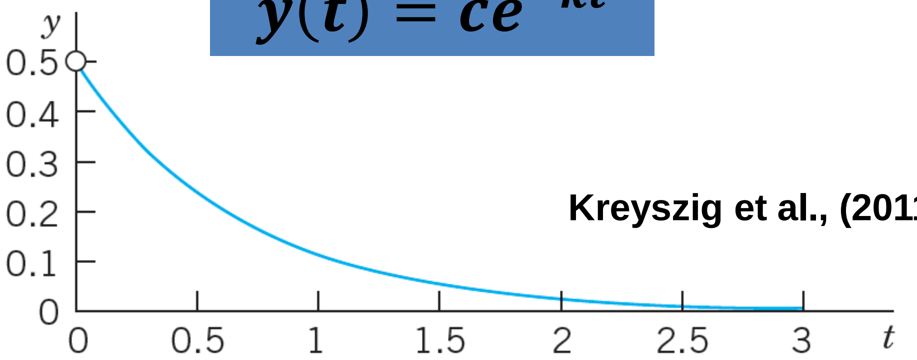
$$y(t=0) = 0.5$$

→ **PVI**

$$k = 1.4 \times 10^{-11}\,[s^{-1}]$$

$$y(t) = ce^{-kt}$$

$$y(t) = 0.5e^{-kt}$$



Kreyszig et al., (2011).

Otros usos: Datación de fósiles; crecimiento de poblaciones; detección de cáncer (radioisótopo, Tecnecio-99m); limpieza de un organismo por droga, etc.

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

2) Ley empírica de enfriamiento de Newton.

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[T(t) - T_m(t)]$$

$$t \geq 0$$

Çengel & Palm III(2014).