Tema 2: Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Presenta:
Daniel Peña Maciel

Tema 2

Objetivo:

El alumno aplicará los conceptos fundamentales de las EDs lineales ordinarias, al analizar e interpretar problemas físicos y geométricos.

Subtema 2.1

EDOL de orden n, NH, CV

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = D_x y = Dy$$

D: Operador diferencial → **Transforma la función y(x) en su derivada.**

$$y(x) = cos(x) \quad D\{y(x)\} \quad D\{\cos(x)\} = -sen(x)$$

$$y(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 \qquad D\left\{\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right\} = x^2 + x$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = D\{Dy\} = D^2 y$$

En general: $\dfrac{d^n y}{dx^n} = D^n y$

Subtema 2.1

EDOL de orden n, NH, CV: Operador diferencial

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Operador diferencial de la ec.

$$L = P(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

$$L\{y\} = P(D)\{y\} =$$
$$= a_n(x)D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_1(x)Dy + a_0(x)y$$

Como consecuencia de las 2 propiedades básicas de derivación:

1) $\mathrm{D}\{cf(x)\} = c\mathrm{D}\{f(x)\}$

2) $\mathrm{D}\{f_1(x) + f_2(x)\} = \mathrm{D}\{f_1(x)\} + \mathrm{D}\{f_2(x)\}$.

$\rightarrow$ **El operador diferencial cumple:**

EDOL de orden n, NH, CV: Operador diferencial

$$L\{af_1(x)+bf_2(x)\}=aL\{f_1(x)\}+bL\{f_2(x)\}$$

$a, b \rightarrow$ Ctes.

El operador diferencial de orden n, es lineal.

$$L=P(D)=a_n(x)D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\cdots+a_1(x)D+a_0(x)$$

$L\{y\}=g(x)$ EDOL, orden n, NH,CV

$L\{y\}=0$ EDOL, orden n, H,CV

Cualquier EDOL, puede expresarse en términos de la notación D.

Ejemplo: **Obtener el L de las EDOL dadas:**

a) $xy''+y'+2xy=0$

b) $\tan(x)y'''-2e^{-x}y=4xsen(x)$

EDOL de orden n, NH, CC: polinomio diferencial

El polinomio diferencial de orden n, es lineal.

$$L = P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Polinomio característico de la EDOL, H, CC.

$L\{y\} = g(x)$ EDOL, orden n, NH,CC

$L\{y\} = 0$ EDOL, orden n, H,CC

Ejemplos:

c) Obtener el L de la EDOL dada: c) $y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$

d) Dados los siguientes operadores, demostrar que al aplicarlos a y(x), se obtiene la misma EDOLH:

d) $L = D^2 + 4D + 3$

d) $L = (D + 1)(D + 3)$

Subtema 2.1

EDOL de orden n, NH, CC: polinomio diferencial

Dos polinomios diferenciales (CC) cumplen con la condición de conmutatividad:

$$[P_1(D)][P_2(D)] = [P_2(D)][P_1(D)]$$

Subtema 2.2

Forma general de una EDO: → $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$

Solución de una EDO de orden n en un I: → Función definida en un intervalo I que tiene al menos n derivadas que son continuas en I; que satisface a dicha ecuación; al sustituir la función y sus derivadas en la ED resulta una identidad.

Familia de soluciones n-paramétrica: → Función que contiene una o más constantes arbitrarias (obtenidas de las sucesivas integraciones).

$G(x, y, c_1, c_2 \ldots, c_n) = 0$

Constantes o parámetros: $c_i \; ; \; i = 1 \ldots, n$

Subtema 2.2

Problema de valores iniciales (PVI): Aquel en el que la solución $y(x)$ cumple ciertas **condiciones** impuestas sobre ésta o sus derivadas, en algún intervalo $\mathbf{I}$ que contiene al punto x_0 .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', + \cdots + y^{(n-1)}\right)$$

Sujeta a:

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_1 \dots , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Condiciones iniciales (**CI**)

Valores de $y(x)$ y sus primeras **n-1** derivadas en el punto x_0 .

PVI 1er orden:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

PVI 2do orden:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_1$$

Subtema 2.2

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CV

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \quad (1)$$

$$L\{y\}=g(x) \qquad\qquad L\{y\}=0$$

$$L\{af_1(x)+bf_2(x)\}=aL\{f_1(x)\}+bL\{f_2(x)\}$$

La linealidad de L tiene como consecuencia:

T. Principio de superposición, EDOL, H: Si $y_1(x), y_2(x), \dots, y_{n-1}(x), y_n(x)$ son soluciones de la ec. homogénea (en un I): $L\{y_i\}=0$, entonces, cualquier combinación lineal $c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ de dichas funciones, es también una solución de la ec. homogénea, ya que:

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CV

$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ $\quad c_i, i = 1, 2, \dots, n$ → Ctes. arbitrarias.

$$L\{c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n\} = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \cdots + c_n \cdot 0 \ .$$

Ejemplo: Las funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln|x|$ son ambas soluciones de la ec. homogénea $x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0$ en $(0, \infty)$. $\Rightarrow$ La combinación lineal también es solución.

Independencia lineal: Las n funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$, son LI para cada valor de x en I, si la ecuación:

$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_n f_n = 0$ $\Rightarrow$ que todas las ctes. $k_1, k_2, \dots, k_n$, son cero.

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CV

Dependencia lineal:

Las n funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$, son LD en I, si al menos una de ellas puede expresarse como una combinación lineal de las otras en I; en otras palabras, son LD si existen ctes. $k_1, k_2, \dots, k_n$, no todas cero.

Ejemplos: a) Las 3 funciones siguientes son LD en $(-\infty, \infty)$.

$$f_1(x) = e^x \qquad f_2(x) = e^{-2x} \qquad f_3(x) = 3e^x - 2e^{-2x}$$

b) Si en la ecuación $k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_n f_n = 0,$ $k_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad f_1 = -\frac{1}{k_1}[k_2 f_2 + \cdots + k_n f_n]$$

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CV

Ejemplos: c) Las 3 funciones siguientes son LI en $(-\infty, \infty)$.

$f_1(x) = x$ $\quad$ $f_2(x) = x^2$ $\quad$ $f_3(x) = 1 - 2x^2$

$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 = 0$ $\quad \Rightarrow \quad$ $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

$$\begin{aligned} k_3 &= 0 \\ k_1 + k_2 - k_3 &= 0 \\ -k_1 + k_2 - k_3 &= 0 \end{aligned}$$

$(x = 0)$,
$(x = 1)$,
$(x = -1)$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto motiva la introducción del siguiente concepto para las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la EDO homogénea (1):

Subtema 2.2

$$W(y_1, \ldots y_n) \text{ ó } W(x) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \rightarrow$$

Matriz Wronskiana $(n \times n)$
"Matriz de funciones"
$y_1(x), \ldots, y_n(x)$

$$|W(x)| = \left| \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \right| \rightarrow$$

Determinante de $W(x)$
"Wronskiano" de la Wronskiana

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CV

Def. Sean $y_1, y_2, \dots, y_n$, **n** funciones cualesquiera, y **n-1** veces diferenciables, la función:

$$|W(y_1, y_2, \dots, y_n)| = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se denomina **Wronskiano** de $y_1, y_2, \dots, y_n$. Notar que corresponde al determinante de la matriz (**Wronskiana**) formada por las funciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ y sus derivadas.

Tema 2: Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Presenta:
Daniel Peña Maciel

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CV

Teorema: Criterio para soluciones LI.

Las n soluciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ de la EDO (1) son LI en I, si y sólo si $|W(y_1, y_2, \dots, y_n)| \neq 0$ para cada x en I.

Def. Cualquier conjunto de n soluciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ LI de la EDO (1) en un I, es un conjunto fundamental de soluciones en I.

Teorema: Existencia de un conjunto fundamental.

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la EDO (1) en I.

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CV

Teorema: Solución general para EDOs **Homogéneas.**

Sea $y_1, y_2, \dots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la EDO (1) en un I. Entonces, la sol. general de la EDO en I es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

$c_i\,;\ \ i = 1, 2, \dots, n$

→ **Ctes. arbitrarias.**

Ejemplo: **d) Las funciones** $y_1(x) = e^{3x}$ **y** $y_2(x) = e^{-3x}$ **son soluciones de** $y'' - 9y' = 0$ **en** $(-\infty, \infty)$.

¿Forman un conjunto fundamental de soluciones?

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CC

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

Esta ecuación se resuelve usando: **a)** métodos numéricos o **b)** series de potencias. Aunque hay excepciones, como la ecuación de **Cauchy-Euler**.

Nota: En este curso, sólo nos enfocaremos en resolver ecuaciones con **coeficientes constantes**.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (3)$$

$$y(x) = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)}$$

$c_i, i = 1, 2, \ldots, n$

$y(x) = y_h(x)$

$y_h(x)$ ó $y_c(x)$

Ctes. arbitrarias.

Subtema 2.3

Método de solución: EDOL de orden n, H, CC

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \textbf{(4)}$$

$y(x)$

$\rightarrow L\{y\}=0$

Se propone la solución como:

$y = e^{rx} \rightarrow y' = re^{rx} \rightarrow y'' = r^2 e^{rx} \ldots$

$y^{(n)} = r^n e^{rx}$

Sustituyendo la sol. y sus derivadas en (4):

$$L\{e^{rx}\} = a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx}$$
$$= e^{rx}\left[a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0\right]$$
$$= e^{rx} P(r)$$

$e^{rx} P(r) = 0 \quad e^{rx} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(r) = 0$

$$\therefore \quad P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

Ec. característica o auxiliar de la EDOL, H, CC.

Subtema 2.3

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CC

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$ **(4)** **Mult. por** $\frac{1}{a_n}$

$$p_n = 1; \quad p_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}; \quad \ldots \quad p_1 = \frac{a_1}{a_n}; \quad p_0 = \frac{a_0}{a_n} \quad .$$

$g(x) = 0$

Entonces, la ecuación queda reescrita como:

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0$$ **(4)**

Dependiendo de la naturaleza de las raíces del polinomio auxiliar, se tendrán 3 posibles tipos de soluciones para (4):

a) Raíces reales distintas. **b) Raíces complejas.**

c) Raíces repetidas.

Subtema 2.3

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CC

a) Raíces reales distintas. Las n soluciones tienen la forma:

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{r_n x} \quad .$$

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} +, \dots, + c_n e^{r_n x}$$

Ejemplo: Resuelva la ecuación $\frac{1}{2} y''' - y'' - \frac{1}{2} y' + y = 0,$

si se sabe que las raíces de su ec. característica son $r = -1; 1; 2$.

Subtema 2.3

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CC

b) Raíces complejas. Se presentan en pares conjugados:

Si $r_1 = a + ib$ (a, b, reales) es raíz $\Rightarrow$ $r_2 = a - ib$.

Las n soluciones tienen la forma:

$$y_1(x) = e^{(a+ib)x},\ y_2(x) = e^{(a-ib)x},\ \dots,\ y_n(x) = e^{r_n x}\ .$$

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} +, \dots, + c_n e^{r_n x}$$ (raíces distintas).

Usando la fórmula de Euler: $e^{\pm i\theta} = cos(\theta) \pm isen(\theta)$.

$$e^{(a\pm ib)x} = e^{ax} e^{\pm ibx} = e^{ax}[cos(bx) \pm isen(bx)]$$

$$y_1(x) = e^{ax} cos(bx) \qquad y_2(x) = e^{ax} sen(bx)$$

$$y(x) = c_1 e^{ax} cos(bx) + c_2 e^{ax} sen(bx) +, \dots, + c_n e^{r_n x}$$ Sol. real.

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CC

Ejemplo: Resuelva la ecuación $\frac{1}{3}y''' + \frac{1}{3}y'' + y' - \frac{5}{3}y = 0,$

si se sabe que las raíces de su ec. característica son $r = 1; -1+2i; -1-2i$.

$$y_1(x) = e^{(a+ib)x},\ y_2(x) = e^{(a-ib)x}, \dots, y_n(x) = e^{r_n x}$$

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} +, \dots, + c_n e^{r_n x}$$

$$e^{\pm i\theta} = cos(\theta) \pm isen(\theta).$$

$$y(x) = c_1 e^{ax} cos(bx) + c_2 e^{ax} sen(bx) +, \dots, + c_n e^{r_n x}$$

Subtema 2.3

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CC

c) Raíces repetidas:

Si r_1 tiene multiplicidad k, las n soluciones no son distintas, mucho menos LI.

1) Raíces reales LI:

$$e^{r_1x},\ \ xe^{r_1x}, x^2e^{r_1x}, \dots , x^{k-1}e^{r_1x}.$$

2) Raíces complejas LI:

$$e^{(a+ib)x}, xe^{(a+ib)x}, x^2e^{(a+ib)x}, \dots , x^{k-1}e^{(a+ib)x}$$

$$e^{(a-ib)x}, xe^{(a-ib)x}, x^2e^{(a-ib)x}, \dots , x^{k-1}e^{(a-ib)x}$$

$$e^{ax}cos(bx), xe^{ax}cos(bx), x^2e^{ax}cos(bx), \dots , x^{k-1}e^{ax}\,cos(bx).$$

$$e^{ax}sen(bx), xe^{ax}sen(bx), x^2e^{ax}sen(bx), \dots , x^{k-1}e^{ax}\,sen(bx).$$

Subtema 2.3

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CC

Ejemplos:

1) Sea la ecuación $y^{(4)} - y^{(3)} - 3y'' + 5y' - 2y = 0$,

si se sabe que las raíces de su ec. característica son $r = 1; 1; 1; -2$. ¿Cuál es su solución general?

$$e^{r_1 x}, \quad xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{r_1 x}.$$

2) Sea la ecuación $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 26y'' - 40y' + 25y = 0$,

si se sabe que las raíces de su ec. característica son $r = 2 \pm i; 2 \pm i$. ¿Cuál es su solución general?

$$e^{ax} cos(bx), xe^{ax} cos(bx), x^2 e^{ax} cos(bx), \dots, x^{k-1} e^{ax} cos(bx).$$

$$e^{ax} sen(bx), xe^{ax} sen(bx), x^2 e^{ax} sen(bx), \dots, x^{k-1} e^{ax} sen(bx).$$

Subtema 2.3

Soluciones de una EDOL de orden n, H, CC

Ejercicios:

1)

$$y^{(8)} - 9y^{(7)} + 43y^{(6)} - 77y^{(5)} - 131y^{(4)} + 1153y^{(3)} + \\ -2787y'' + 2821y' - 1014y = 0,$$

$r = 2; -3; 1; 1;\ 2 \pm 3i;\ \ 2 \pm 3i$. **¿Cuál es su solución general?**

2)

$$\left(D^9 + 2D^8 + 14D^7 + 26D^6 + 49D^5 + 72D^4 + 36D^3\right)\{y\} = 0.$$

¿Cuáles son las raíces de su polinomio característico?

Solución general:

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x} + c_5xe^{-x} + \\ + c_6cos(2x) + c_7sen(2x) + c_8cos(3x) + c_9sen(3x)$$

Tema 2: Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Presenta:
Daniel Peña Maciel

Soluciones de una EDOL de orden n, NH, CV

Teorema: Solución general para EDOs **NH**.

Sea y_p cualquier solución particular de la EDOLNH **(5)** en un **I**:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \; ; \qquad \textbf{(5)}$$

y sea $y_1, y_2, \dots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada de **(5)** [ec. **(2)**] en un **I**. Entonces, la sol. general de la EDO **(5)** en **I** es:

$$y(x) = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)}_{y_h(x) \text{ ó } y_c(x)} + \boxed{y_p}$$

$c_i \; ; \;\; i = 1, 2, \dots, n$

Ctes. arbitrarias.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Soluciones de una EDOL de orden n, NH, CV

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad \textbf{(5)}$$

Como consecuencia de la linealidad de L:

T. Principio de superposición, EDOL, NH: Sean

$y_{p_1}(x), y_{p_2}(x), \dots, y_{p_{n-1}}(x), y_{p_n}(x)$; **n** soluciones particulares

de la ec. NH **(5)** en un **I**, relacionadas a su vez con **n** funciones distintas $g_1, g_2, \dots, g_n$. Esto es, si y_{p_i}, denota una solución **particular** de la correspondiente ecuación:

$$a_n(x)y_{p_i}^{(n)} + a_{n-1}(x)y_{p_i}^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_{p_i}' + a_0(x)y_{p_i} = g_i(x) \quad .$$

Soluciones de una EDOL de orden n, NH, CV

Entonces, $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_n}(x)$ es una solución **particular** de la ec. **(5)**, observe que:

$$[i = 1, 2, \ldots, n]$$

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x).$$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad \textbf{(5)}$$

Subtema 2.4

Soluciones de una EDOL de orden n, NH, CC

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad \textbf{(5)}$$

Esta ecuación se resuelve usando: a) métodos numéricos; b) series de potencias; c) variación de parámetros, etc.

Nota: En este curso, sólo nos enfocaremos en resolver EDs no homogéneas con coeficientes constantes.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad \textbf{(6)}$$

$$y(x) = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)}_{y_h(x) \text{ ó } y_c(x)} + \boxed{y_p}$$

$c_i, i = 1, 2, \ldots, n$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$y_h(x)$ ó $y_c(x)$

Ctes. arbitrarias.

Soluciones de una EDOL de orden n, NH, CC

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad (6)$$

Mult. por $\frac{1}{a_n}$

$$p_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}; \quad \ldots \quad p_1 = \frac{a_1}{a_n}; \quad p_0 = \frac{a_0}{a_n}; \qquad f(x) = \frac{g(x)}{a_n}$$

Entonces, la ecuación queda reescrita como:

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = f(x) \quad (7)$$

¿Cuál es su solución general?

Se estudiarán dos métodos para resolverla: MCI y MVP.

Método de coeficientes indeterminados (MCI)

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = f(x) \qquad (7)$$

Consideraciones importantes:

1) **Este método sirve para encontrar una solución y_p de (7).**

2) **Se aplica siempre que la función f(x) en la ec. (7), sea una combinación lineal (finita) de productos de funciones de los siguientes tres tipos:**

a) Polinomio en x.

$$P(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$$

b) Función exponencial.

$$e^{\alpha x}$$

c) Funciones seno y coseno.

$$\cos(kx)$$
$$\operatorname{sen}(kx)$$

(α, k, reales)

Método de coeficientes indeterminados (MCI)

Ejemplos de entradas f(x):

$$f(x)=10; \qquad f(x)=x^2-5x;$$

$$f(x)=15x-6+8e^{-x};$$

$$f\ (x)=sen(3x)-5xcos(2x);$$

$$f\ (x)=xe^{x}sen(x)+(3x^2-1)e^{-4x}$$

MCI : operador anulador

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0 \quad \textbf{(4)}$$

$$L = P(D) = D^n + p_{n-1}D^{n-1} + \cdots + p_1 D + p_0$$

$$P(r) = r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \cdots + p_1 r + p_0 = 0 \quad \textbf{(8)}$$

Si r_1 es una raíz de (8), entonces: $L = (D - r_1)P_{n-1}(D)$.

$$L = D^2 + 4D + 3$$

$$L = (D+1)(D+3)$$

Operador anulador: **operador diferencial lineal, de coeficientes constantes tal que al aplicarlo a la función f(x) [suficientemente diferenciable], se obtiene:**

$$A\{f(x)\} = 0$$

A es el anulador de la función f(x).

Subtema 2.4

MCI : operador anulador

Operador	Anula a:
a) $A = D^{n+1}$	$1, x, x^2, \dots, x^n$
b) $A = (D-\alpha)^{n+1}$	$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \dots, x^ne^{\alpha x}$
c) $A = \left[(D-\alpha)^2 + \beta^2\right]^{n+1}$	$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x), \dots, x^ne^{\alpha x}\cos(\beta x)$
	$e^{\alpha x}sen(\beta x), xe^{\alpha x}sen(\beta x), x^2e^{\alpha x}sen(\beta x), \dots, x^ne^{\alpha x}sen(\beta x)$

Caso especial, $\alpha = 0, n = 0$:

Operador	Anula a:
d) $A = D^2 + \beta^2$	$\cos(\beta x)$
	$sen(\beta x)$

Si $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ tienen argumentos similares:

$n_1 = n_2$; $\alpha_1 = \alpha_2$; $\beta_1 = \beta_2 \dots$ $\Rightarrow A_1 = A_2 \dots$

MCI : operador anulador o aniquilador

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = f(x) \qquad (7)$$

f(x) en la ec. **(7)**, puede ser **anulada** por un operador diferencial A del **menor orden posible**, éste puede estar constituido por un producto de operadores, de acuerdo a lo mostrado anteriormente.

Nota, expresando: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$

$\Rightarrow A = A_1 A_2 \ldots$

Aplicando A a la ec. **(7)**:

$A\{L\{y\}\} = A\{f(x)\} = 0$ $\Rightarrow$ Hay que resolver la «nueva» **EDO** de **mayor orden**:

$A\{L\{y\}\} = 0$ $\longrightarrow$ Al resolver ésta, se encuentra la forma de y_p para: $L\{y\} = f(x)$ $\rightarrow$ **(7)**

MCI : operador anulador

1) Encontrar y_h , de la ec. homogénea asociada a **(7)**.

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0 \longrightarrow P(r) = 0$$

2) Aplicar a la ED $L\{y\} = f(x)$ [ec. **(7)**] un **A** que anule **f(x)**.

3) Encontrar la **sol. general** de la ecuación homogénea de mayor orden: $A\{L\{y\}\} = 0$.

4) Ignorar de la sol. hallada en **3)**, todos los términos que ya estén en y_h, formar la combinación lineal y_p con los términos remanentes.

MCI : operador anulador

5) Una vez propuesta la solución y_p de acuerdo a lo anterior, derivar y_p un número de veces igual al orden de la ec.; sustituir la y_p y sus derivadas en la **ED**. Usar igualación término a término para formar un sistema algebraico de ecuaciones y encontrar los coeficientes.

6) Formar la solución general de la ec. no homogénea:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \ .$$

Subtema 2.4

Método de coeficientes indeterminados (MCI)

Ejemplos de entradas f(x), para las que NO puede usarse el MCI:

$$f(x) = ln|x|; \qquad f(x) = \frac{1}{x};$$

$$f\,(x) = tan(x);$$

$$f\,(x) = \frac{1}{sen(x)}$$

Subtema 2.4

MCI : operador anulador

Ejemplos:

a) Resuelva la ec. $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$.

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

b) Resuelva el PVI:

$$2y'' - 6y' + 4y = 6e^{-x} - 20cos(3x)$$

$$y(0) = 1; \qquad y'(0) = 2.$$

Tema 2: Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Presenta:
Daniel Peña Maciel

Subtema 2.4

Método de variación de parámetros (MVP)

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = f(x) \qquad (7)$$

Consideraciones importantes:

1) Este método sirve para encontrar una solución y_p de (7).

2) Se aplica para cualquier forma de la función f(x) en la ec. (7). Puede usarse para resolver EDOLs de coeficientes variables, por ejemplo, la ecuación de Cauchy-Euler.

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x) \rightarrow y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

$$y_h(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \rightarrow y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$y_p' = u_1 y_1' + \underline{y_1 u_1'} + u_2 y_2' + \underline{y_2 u_2'} \rightarrow y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$$

$$y_p'' = u_1 y_1'' + y_1' u_1' + u_2 y_2'' + y_2' u_2' \rightarrow$$

Sust. en la ec.

Método de variación de parámetros (MVP)

Agrupando u_1 y u_2: $y_1'u_1' + u_1L\{y_1\} + u_2L\{y_2\} + y_2'u_2' = f(x)$;

y_1 **y** y_2 **son soluciones de la EDOH, así:** $L\{y_1\} = L\{y_2\} = 0$.

Se llega así al sist. algebraico de ecuaciones en u_1' y u_2' :

$$\begin{gathered} y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \ . \end{gathered}$$

Ejemplos:

a) Resuelva la ec. $5y'' + 5y = 5\sec(x)\tan(x).$

b) Resuelva la ec. $6y''' + 6y' = 6\sec(x)$.

Método de variación de parámetros (MVP)

b) Resuelva la ec. $6y''' + 6y' = 6\sec(x)$.

$y_h = C_1 + C_2\cos(x) + C_2\operatorname{sen}(x)$; $|W| = 1$

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$

$u_1 = \ln|\sec(x) + \tan(x)|$

$u_2 = -x$

$u_3 = \ln|\cos(x)|$

Subtema 2.4

Método de variación de parámetros (MVP)

Procedimiento: $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = f(x)$ **(7)**

1) Escribir la EDO en forma estándar [como la ec. **(7)**].

2) Resolver la ec. homogénea asociada a **(7)**.

Sol. de la forma: → $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$

3) Con base en la y_h encontrada, suponer y_p como:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x) \quad .$$

4) Derivar y_p **n** veces (orden de la **EDO**); de las primeras **n-1** derivadas, obtener **n-1** ecuaciones (**2** ejemplos abajo) al igualar a **0** la suma de los términos que contengan a $u_1', \ldots u_n'$; sustituir y_p y sus derivadas (simplificadas) en la **ED**

$$\begin{array}{cccc}
y_1(x)u_1'(x) + & y_2(x)u_2'(x) + & \ldots + y_n(x)u_n'(x) = 0 \\
y_1'(x)u_1'(x) + & y_2'(x)u_2'(x) + & \ldots + y_n'(x)u_n'(x) = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Subtema 2.4

Método de variación de parámetros (MVP)

Procedimiento:

4) Así, se obtiene un sistema de n ecuaciones algebraicas para las variables $u_i'(x)$: $[i = 1, 2, \dots, n]$

$$
\begin{aligned}
&y_1(x)u_1'(x) + \quad y_2(x)u_2'(x) + \quad \dots + y_n(x)u_n'(x) = 0\\
&y_1'(x)u_1'(x) + \quad y_2'(x)u_2'(x) + \quad \dots + y_n'(x)u_n'(x) = 0\\
&\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&y_1^{(n-1)}(x)u_1'(x) + \quad y_2^{(n-1)}(x)u_2'(x) + \quad \dots + y_n^{(n-1)}(x)u_n'(x) = f(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
y_1(x) & y_2(x) & \dots y_n(x)\\
y_1'(x) & y_2'(x) & \dots y_n'(x)\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots y_n^{(n-1)}(x)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1'(x)\\
u_2'(x)\\
\vdots\\
u_n'(x)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0\\
0\\
\vdots\\
f(x)
\end{bmatrix}
$$

$$[W(x)]\left[\overrightarrow{u'}(x)\right] = \vec{f}(x)$$

$W \rightarrow$ **Matriz Wronskiana.**

Método de variación de parámetros (MVP)

Procedimiento:

5) Para obtener las variables $u_i'(x)$, se usa la regla de Cramer:

$$u_i'(x) = \frac{|W_i(x)|}{|W(x)|}$$

$[i = 1, 2, \dots, n]$; $|W(x)| \neq 0$.

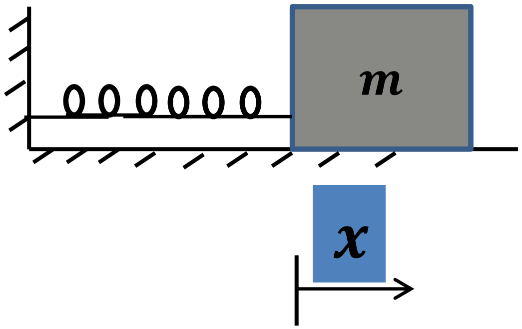
Donde: $|W|$ es el Wronskiano, $|W_i|$ es el determinante obtenido al reemplazar la **i-ésima columna** de W, por la columna formada por el lado derecho del sistema de **n** ecuaciones planteado en el paso **4)**.

6) Integrar cada $u_i'(x)$ para obtener las variables $u_i(x)$. Sustituir las $u_i(x)$ encontradas en y_p y formar la solución gral.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Subtema 2.4

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.



$$F = ma$$

x(t)→Posición de la masa, relativa a su punto de equilibrio.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad F = F_r = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx; \; m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$w^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$$

EDOL, H, CC
2do orden.

Modelo de oscilaciones libres.

Subtema 2.4

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$$

EDOL, H, CC
2do orden.

$$r^2 + w^2 = 0$$

$$r = \pm iw$$

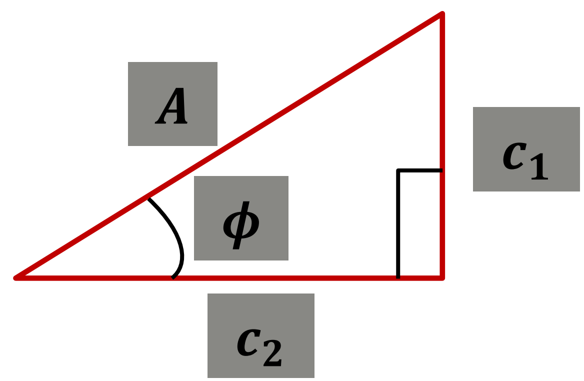
$$x(t) = c_1e^{iwt} + c_2e^{-iwt}$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + isen(\theta)$$

Recordando: $r = \alpha \pm i\beta \Rightarrow \quad y(t) = e^{\alpha t}[c_1 \cos(\beta t) + c_2 sen(\beta t)]$

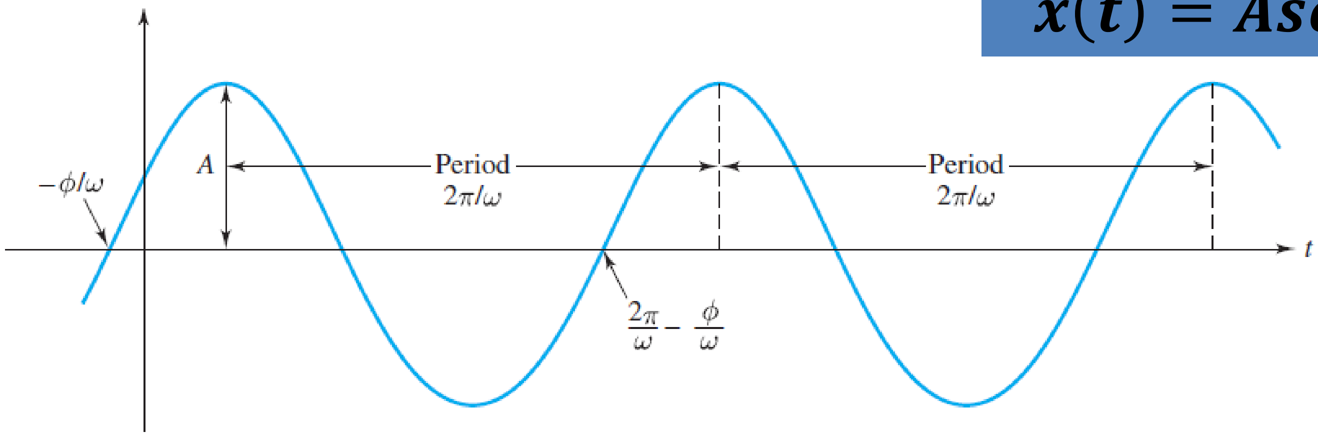
$$x(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 sen(wt)$$

$$sen(G \pm H) = senG \cos H \pm cosGsenH$$



Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

$$x(t) = Asen(wt + \phi)$$



$$T = \frac{2\pi}{w}; f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi}$$

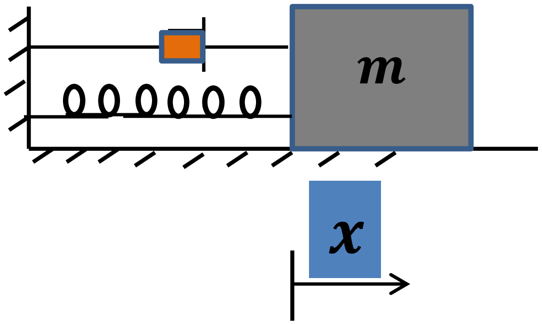
Dependen de la masa y la cte. del resorte.

$$w = \sqrt{k/m}$$

Gráficas tomadas de Nagle et al., (2012)

Subtema 2.4

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_r + F_a$$

$$F_a = -c\frac{dx}{dt}$$

$$F = F_r + F_a$$

$$F_r = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + w^2x = 0$$

→ **Modelo de oscilaciones amortiguadas. Es más realista.**

$$w^2 = {}^{k}/_{m}\ ;$$

$$2\lambda = {}^{c}/_{m}$$

$$r^2 + 2\lambda r + w^2 = 0 \;\rightarrow\; r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - w^2}$$

$$\sqrt{\lambda^2 - w^2}$$

→ **Discriminante** →**3 Casos:**

Subtema 2.4

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

1) Raíces complejas.

$$\lambda^2 < w^2 \Rightarrow \lambda^2 - w^2 < 0$$

$$\alpha = -\lambda\,; \;\; \beta = \pm\sqrt{\lambda^2 - w^2}$$

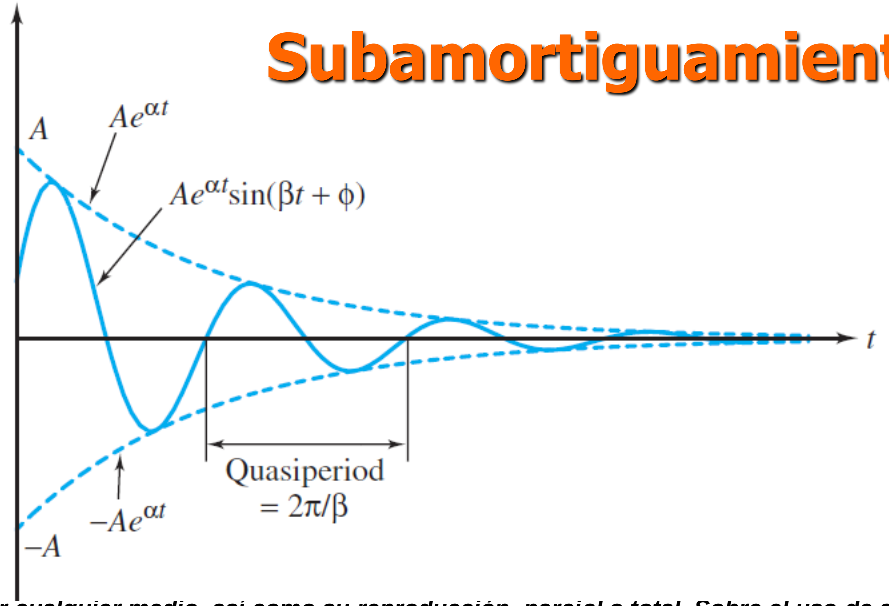
$$x(t) = e^{\alpha t}[c_1 \cos(\beta t) + c_2 sen(\beta t)]$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - F_a$$

$$x(t) = Ae^{\alpha t} sen(\beta t + \phi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\beta}\,; f = \frac{1}{T}$$

Subamortiguamiento



Subtema 2.4

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

2) Raíces reales diferentes.

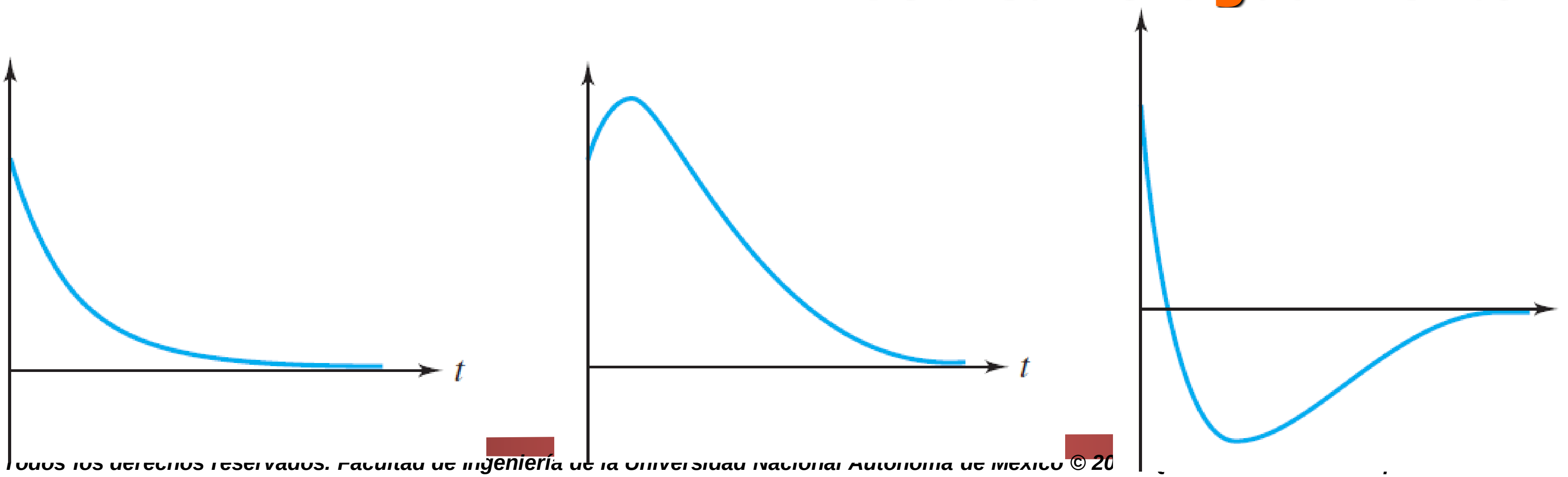
$$r = \pm\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w^2}$$

$$x(t) = \ c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$\lambda^2 > w^2 \Rightarrow \lambda^2 - w^2 > 0$$

$x(t) \rightarrow 0$ **cuando** $t \rightarrow +\infty$

Sobreamortiguamiento



Subtema 2.4

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

3) Raíz repetida.

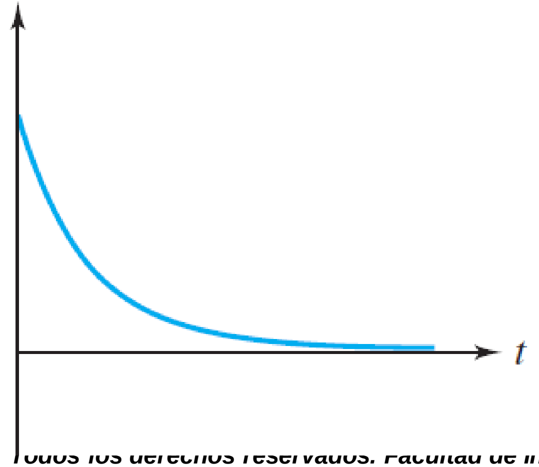
$$r = -\lambda$$

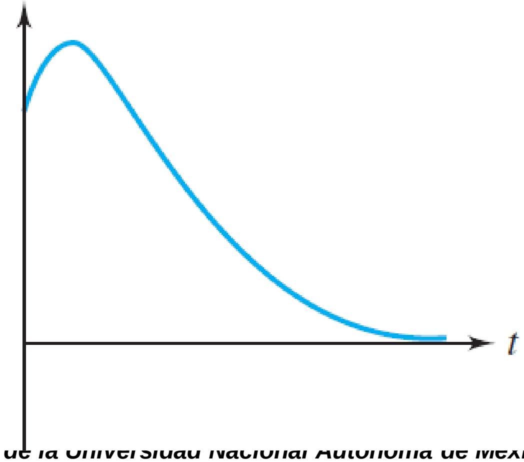
$$\lambda^2 = w^2 \Rightarrow \lambda^2 - w^2 = 0$$

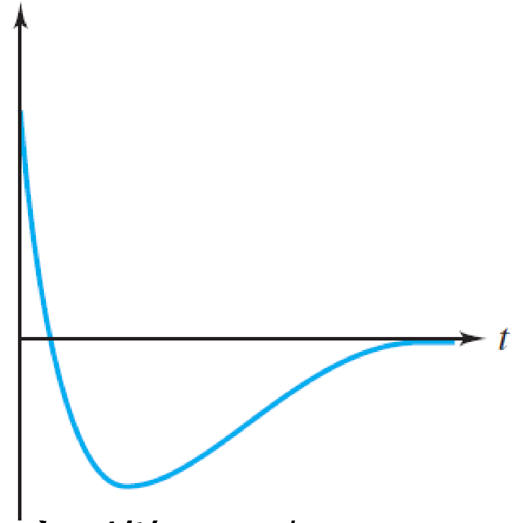
$$x(t) = [c_1 + c_2 t]e^{rt}$$

$x(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$

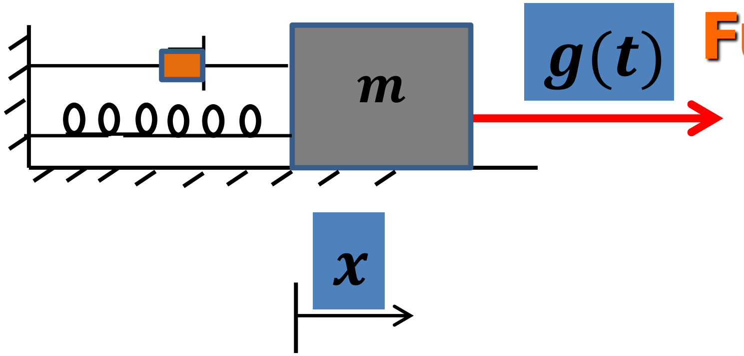
Amortiguamiento crítico







Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.



Fuerza externna

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=g(t)$$

Modelo de oscilaciones amortiguadas forzadas.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+w^2x=f(t)$$