Tema 3: Transformada de Laplace y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Presenta:
Daniel Peña Maciel

Tema 3

Objetivo:

El alumno aplicará la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones y sistemas de EDLs.

Introducción

Del cálculo diferencial e integral, una función $f(x) = x^2$, se "transforma" en otra función:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

Sea $f(x, y)$ una función de 2 variables, la integral definida de **f** respecto a una de ellas, produce una función en términos de la otra:

$$\int_1^2 2xy^2 dx = 3y^2.$$

De forma similar, una integral definida, tal como:

$$\int_a^b K(s,t) f(t)\, dt\ .$$

transforma una función $f(t)$, en una función $F(s)$.

Subtema 3.1

Introducción

En este curso, interesa una "**transformación integral**" para la cual, el intervalo de integración es $[0,\infty)$ y $f(t)$, está definida para $t \geq 0$:

$$\int_0^\infty \boxed{K(s,t)} f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \boxed{K(s,t)} f(t)\,dt$$

$K(s,t)$ → ***Kernel*** de la transformación.

Nota: a) Si conforme $b \to \infty$, integral impropia se aproxima a un límite finito L, éste **existe** y la integral **converge** a L:

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(t)dt = L$$

b) Si el límite en la derecha **no existe**, la integral impropia **diverge**.

Ejemplos:

Transformada de Laplace (TL)

Cuando $K(s,t)=e^{-st}$, la transformación integral se denomina, transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ una función definida en el intervalo $[0,\infty)$, entonces, para $t\geq 0$ se define la transformada de Laplace como:

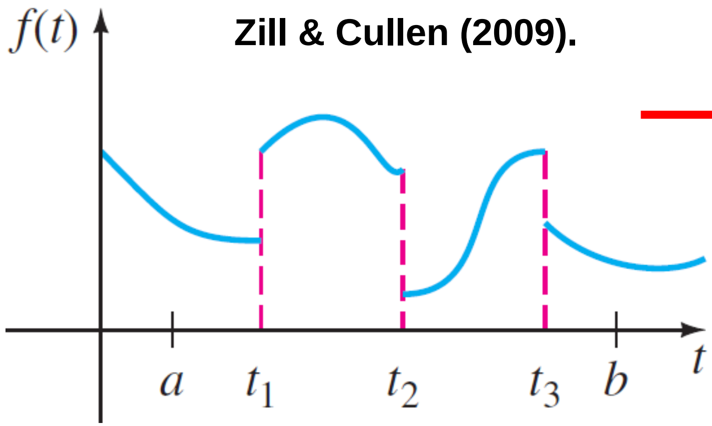
$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-st}f(t)\,dt=F(s)$$

Donde s es un número (real para este curso) para el cual la integral converge.

Ejemplos:

Transformada de Laplace:
Condiciones suficientes para su existencia (teorema)

1) $f(t)$ **debe ser continua por partes, en el dominio** $t \geq 0$**.**



Zill & Cullen (2009).

$f(t)$ **tiene discontinuidades finitas, y es continua en cada intervalo abierto.**

2) $f(t)$ **debe ser de orden exponencial** C**. Esto se cumple si existen constantes** $C > 0$, $\mathrm{M} > 0$ **y** $T > 0$**, tales que:**

$$|f(t)| \leq Me^{Ct}$$

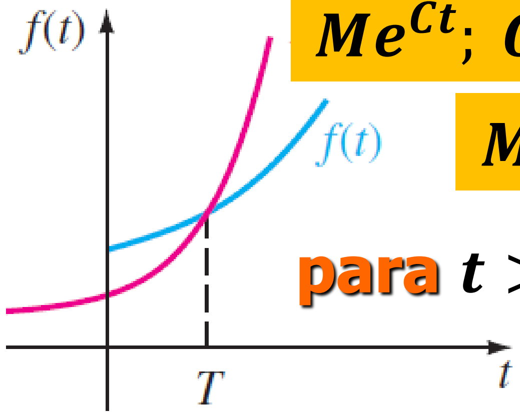
para toda $t > T$**.**

Entonces, existe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ **para** $s > C$ **.**

Transformada de Laplace: Condiciones suficientes para su existencia (teorema)

2) $f(t)$ **debe ser de orden exponencial** C **.**

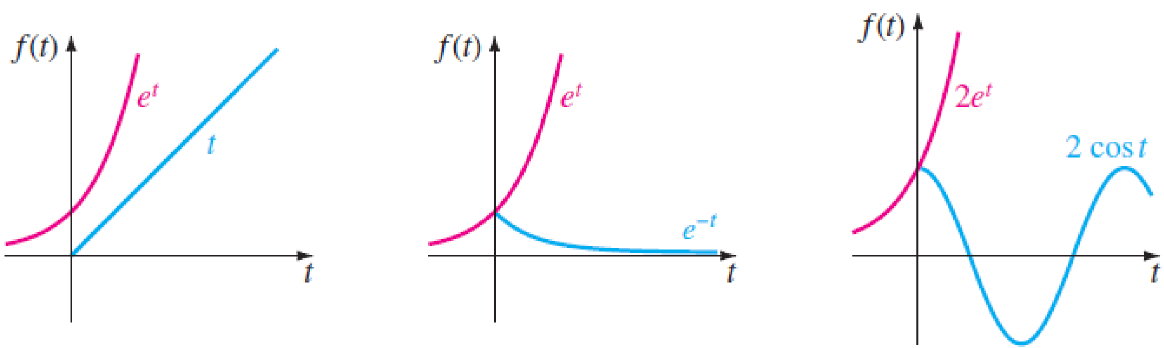
Ejemplos:



Me^{Ct}; $C > 0$

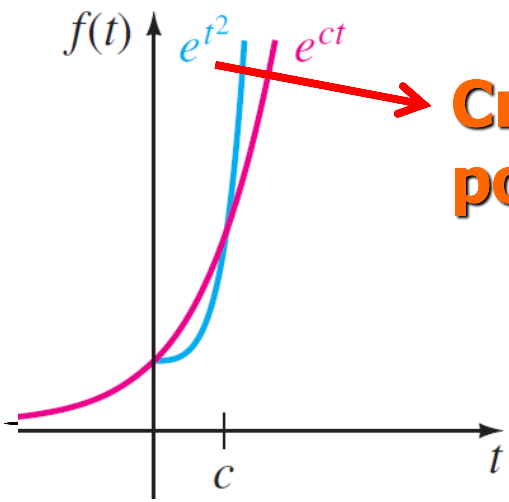
$M > 0$

para $t > T$**.**



(a) (b) (c)

Imágenes tomadas de Zill & Cullen (2009).



Crece más rápido que cualquier potencia positiva de e**, para** $t > C > 0$**.**

T. Si $f(t)$ **cumple 1) y 2) y,** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$**, entonces,** $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$**.**

Transformada de Laplace: Propiedades

La **TL** es un operador lineal, para una combinación lineal de funciones, se puede escribir (α, β, escalares):

$$\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)]\, dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \beta \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F(s)$$

$\mathcal{L}$ es una transformada lineal.

Ejemplos:

Subtema 3.1

Algunas transformadas de Laplace básicas

Tomada de Zill & Cullen (2009).

(a) $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

(b) $\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

(c) $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

(d) $\mathscr{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$

(e) $\mathscr{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$

(f) $\mathscr{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2}$

(g) $\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2 - k^2}$

Subtema 3.1

Transformada de Laplace: Propiedades

1) Primer teorema de traslación (dominio "s")

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y a cualquier número real, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

2) Transformada de la derivada

Si $f(t)$ es continua en $[0, \infty)$, y $f'(t)$ es continua por partes en el mismo intervalo, siendo ambas de orden exponencial C, entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Transformada de Laplace: Propiedades

2) Transformada de la derivada de orden n:

Si $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas en $[0, \infty)$, y, $f^{(n)}(t)$ es continua por partes, en el mismo intervalo, siendo todas de orden exponencial C, entonces, para $s > C$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)$$

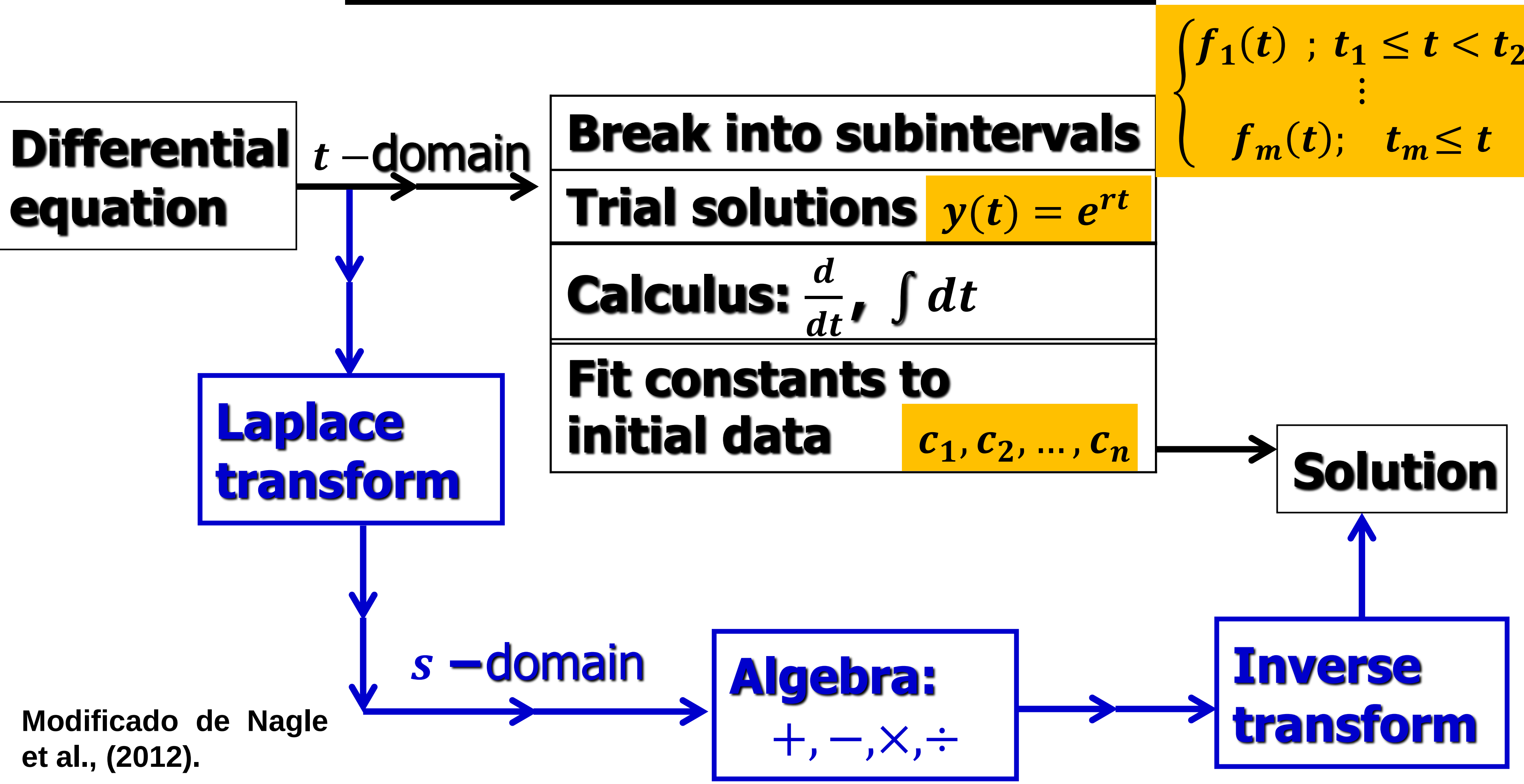
Si $n = 2, 3$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$$

Subtema 3.1

Transformada de Laplace (TL)



Modificado de Nagle et al., (2012).

Subtema 3.1

Transformada de Laplace: Propiedades

3) Derivada de la transformada de una función:

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $f(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial C, entonces, para $s > C$:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s); n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = (-1) \frac{d}{ds} F(s)$$

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

Nota: para encontrar transformadas de funciones cuya forma es $t^n e^{at}$, se puede usar la propiedad **1)** o la **3)**.

Subtema 3.2

Transformada inversa de Laplace (TIL)

Dada una función $F(s)$, si existe una función $f(t)$ continua en $[0, \infty)$ y que satisface que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces, $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

La TIL es un operador lineal, para una combinación lineal de funciones (transformadas de Laplace), se puede escribir (α, β, escalares):

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

$\mathcal{L}^{-1}$ es una transformada lineal.

Ejemplos:

Subtema 3.2

No unicidad de la TIL

La **TIL** de una función $F(s)$, puede no ser única. Ya que es posible que

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Aunque $f_1(t) \neq f_2(t)$.

Para propósitos prácticos, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son continuas por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces, f_1 y f_2 son esencialmente la misma función. Sin embargo, si f_1 y f_2 son continuas en $[0, \infty)$ y $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$, entonces,

$f_1 = f_2$ en ése intervalo.

Ejemplos:

Método de fracciones parciales (MFP)

Para obtener la **TIL** de una función racional $F(s)$, usualmente se requiere expresarla como una suma de funciones racionales más simples, entonces se usa el **MFP:**

Se tiene la función racional:

$$Y(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

Polinomios en s, de coeficientes reales; sin factores comunes. [Grado P]<[Grado Q] $\Rightarrow$ es fracción **propia**.

Entonces se consideran **3 casos:**

1) Factores lineales no repetidos.

$$\frac{A_1}{s-r_1}+\frac{A_2}{s-r_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-r_n}$$

Subtema 3.2

Método de fracciones parciales (MFP)

2) Factores lineales repetidos. La porción de la expansión en fracciones parciales de $\frac{P(s)}{Q(s)}$, correspondiente a $(s-r)^m$:

$$\frac{A_1}{s-r}+\frac{A_2}{(s-r)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(s-r)^m}$$

3) Factores cuadráticos irreductibles. La porción de la expansión en fracciones parciales de $\frac{P(s)}{Q(s)}$, correspondiente a $\left[(s-\alpha)^2+\beta^2\right]^m$:

$$\frac{C_1 s+D_1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{C_2 s+D_2}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\cdots+\frac{C_m s+D_m}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^m}$$

Repaso: https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/integration-techniques/integrate-partial-fraction-expan/v/partial-fraction-expansion-to-integrate

Tema 3: Transformada de Laplace y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

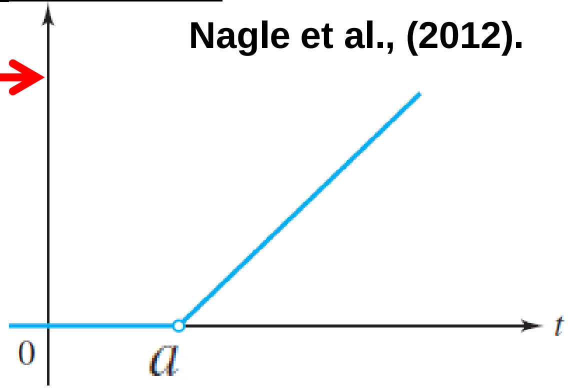
Presenta:
Daniel Peña Maciel

Subtema 3.1

Algunas funciones generalizadas

1) Función "rampa":

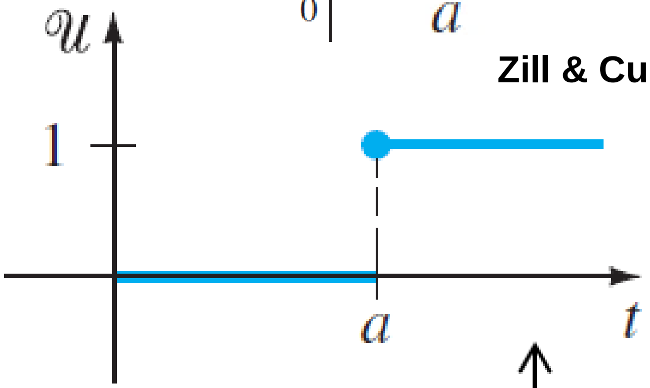
$$r(t-a) = \begin{cases} 0; & t < a \\ t-a; & t > a \end{cases}$$



Nagle et al., (2012).

2) Función escalón unitario o de Heaviside:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0; & 0 \le t < a \\ 1; & t \ge a \end{cases}$$

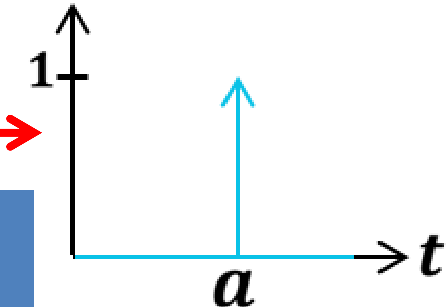


Zill & Cullen (2009).

3) Función impulso unitario delta de Dirac:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0; & t \neq a \\ \infty; & t = a \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t-a) f(t)\, dt = f(a)$$



Elaboración propia.

Transformadas de algunas funciones generalizadas

1) $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{1}{s}e^{-as}; \quad a \geq 0$

2) $\mathcal{L}\{r(t-a)\} = \frac{1}{s^2}e^{-as}$

3) $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

4) $\mathcal{L}\{f(t)\} = 0; \qquad f(t) = 0$

Ejemplos sobre funciones generalizadas:

Funciones definidas por tramos: uso de la función escalón unitario

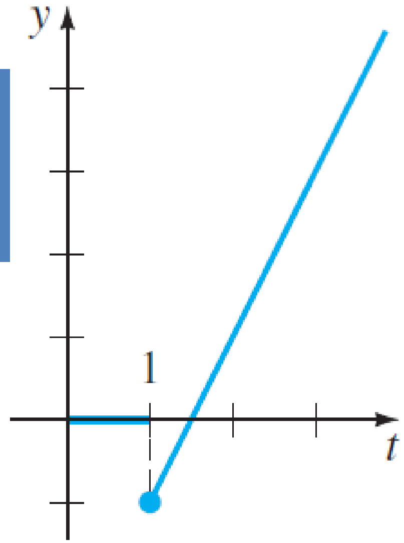
Al multiplicar una función $f(t)$ definida para $t \geq 0$, por $u(t-a)$, la última "apaga" una parte de la gráfica de la primera.

1) $f(t) = 2t - 3$

"Apagarla" para $0 \leq t < 1$.

$$f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \leq t < 1 \\ 2t - 3\,; & t \geq 1 \end{cases}$$

$$f(t) = [2t-3][u(t-1)]$$



Zill & Cullen (2009).

De forma general:

$$f(t) = \begin{cases} g(t); & 0 \leq t < a \\ h(t); & t \geq a \end{cases}$$

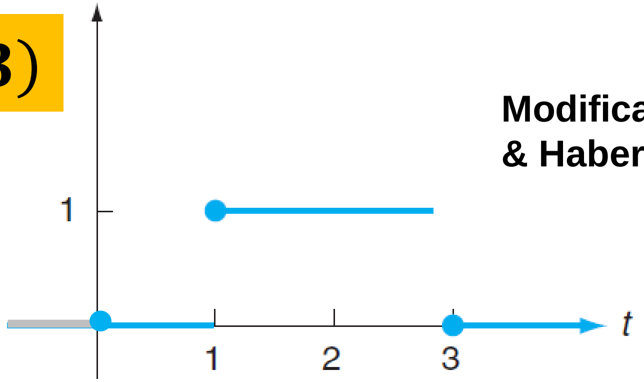
$$f(t) = g(t) - g(t)[u(t-a)] + h(t)[u(t-a)]$$

Subtema 3.1

Funciones definidas por tramos: uso de la función escalón unitario

2) $f(t) = u(t-1) - u(t-3)$

$$f(t) = \begin{cases} 0; & 0 \le t < 1 \\ 1; & 1 \le t < 3 \\ 0; & t \ge 3 \end{cases}$$

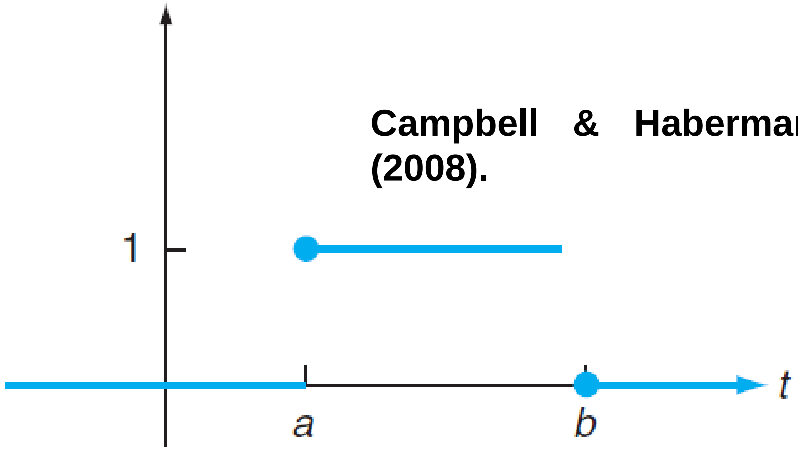


Modificada de Campbell & Haberman (2008).

De forma general:

2) $f(t) = u(t-a) - u(t-b)$

$$f(t) = \begin{cases} 0; & t < a \\ 1; & a \le t < b \\ 0; & t \ge b \end{cases}$$



Campbell & Haberman (2008).

Subtema 3.1

Funciones definidas por tramos: uso de la función escalón unitario

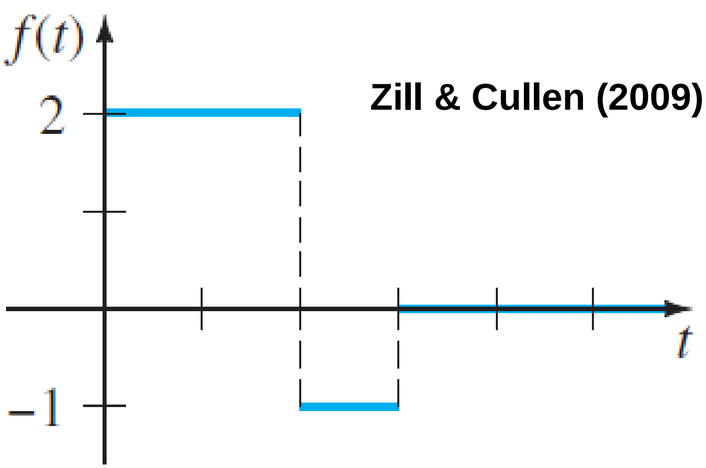
Entonces: $g(t)$ **"Encendida" en $t = a$. "Apagada" en $t = b$.**

$$g(t)[u(t-a) - u(t-b)] = \begin{cases} 0; & t < a \\ g(t); & a \le t < b \\ 0; & t \ge b \end{cases}$$

Ejemplos:

$$3)\quad f(t) = \begin{cases} 2; & 0 \le t < 2 \\ -1\,; & 2 \le t < 3 \\ 0 & t \ge 3 \end{cases}$$

$$f(t) = 2 - 3u(t-2) + u(t-3)$$
$$t \ge 0$$



Zill & Cullen (2009).

Transformada de Laplace: Propiedades

4) Segundo teorema de traslación (dominio "t")

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ **y** $a > 0$**, entonces:**

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)\ .$$

Ejemplos:

Transformada de Laplace de integrales

5) Convolución

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son continuas por partes en $[0,\infty)$, entonces, el producto especial denotado por $f_1(t) * f_2(t)$, está definido por la integral:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$$

Convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ [es una función de t].

$$f_2(t) * f_1(t) = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau)\,d\tau$$

La convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ es conmutativa.

Transformada de Laplace: Propiedades

5) Teorema de convolución

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son continuas por partes en $[0, \infty)$, siendo ambas de orden exponencial C, entonces:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\}\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s) \; .$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}.$$

Transformada de Laplace: Propiedades

6) Transformada de la integral de una función

Si $f_2(t) = 1$ y $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) = 1/s$, el teorema de convolución implica que la **TL** de la integral de $f_1(t)$ es

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F_1(s)}{s} \quad ;$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad .$$

Nota: si se requiere obtener la **TIL**, es recomendable usar esta propiedad en lugar del **MFP** cuando s^n es un factor del denominador y, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ es fácil de integrar.

Tema 3: Transformada de Laplace y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

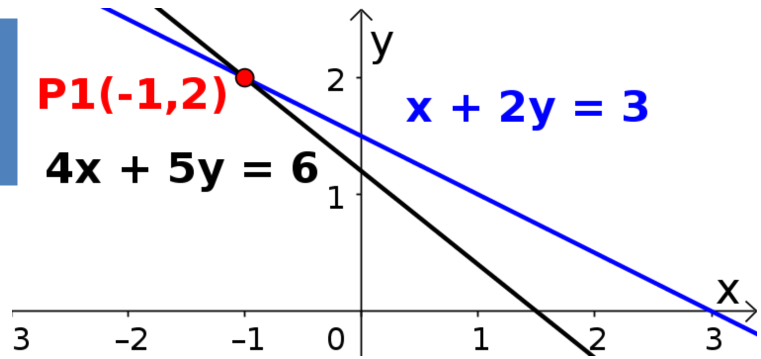
Presenta:
Daniel Peña Maciel

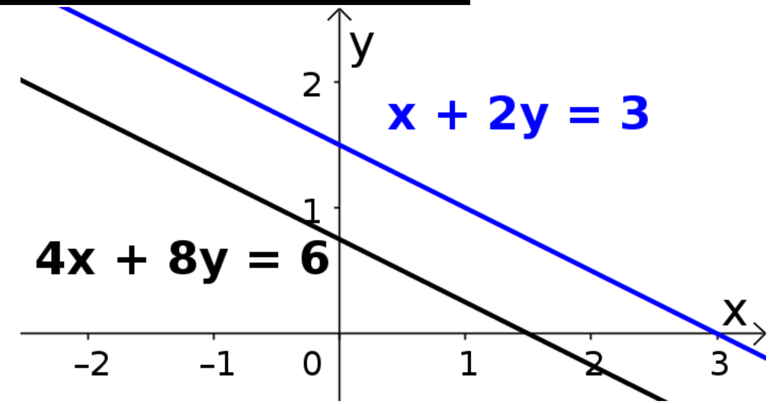
Subtema 3.4

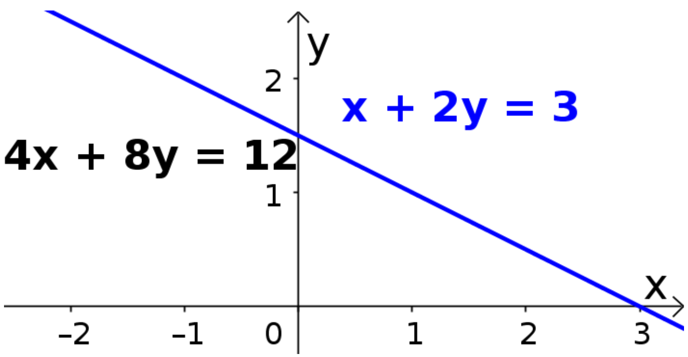
Sistemas algebraicos de ecuaciones

$$x + 2y = 3$$
$$4x + 5y = 6$$

$$x = -1$$
$$y = 2$$



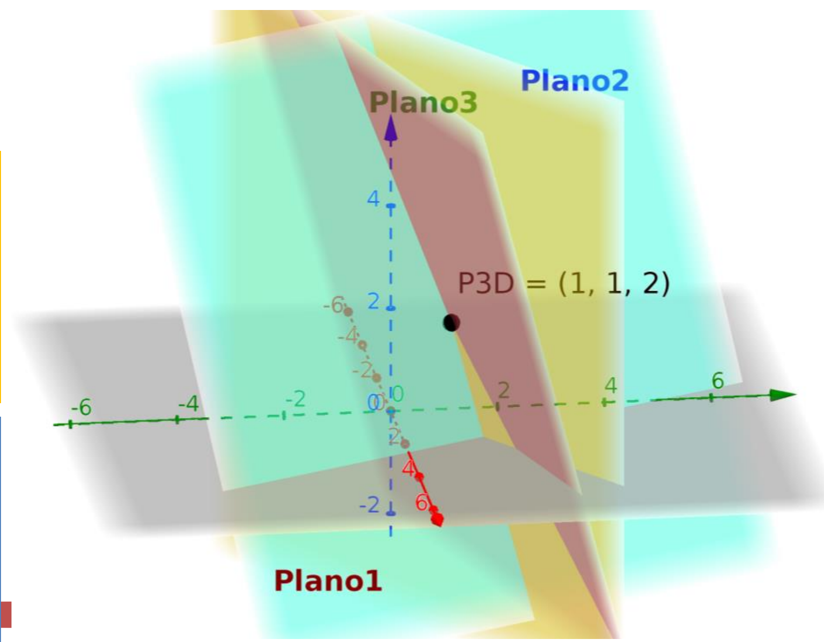




Basadas en Strang (2009).

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 2$$

$$2x + y + z = 5$$
$$4x - 6y + 0z = -2$$
$$-2x + 7y + 2z = 9$$



Sistemas algebraicos de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 4x + 5y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 3y &= 2 \\ x + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 15 \\ x + -y + z &= 7 \\ 3x + 2y - z &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Subtema 3.4

Sistemas de EDs lineales

$$x + 2y = 3$$
$$4x + 5y = 6$$

$$\frac{dx}{dt} = 3y,$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x\,.$$

$$\frac{dx}{dt} - 3y = 0,$$
$$\frac{dy}{dt} - 2x = 0\,.$$

Pueden resolverse por eliminación.

x(t), y(t), → Variables dependientes.
t → Variable independiente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} D & -3 \\ 2 & -D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} + 4y = 1,$$
$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1\,.$$

$$\begin{bmatrix} 2D - 1 & D + 4 \\ D & -D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t - 1 \end{bmatrix}$$

Método de los operadores

Subtema 3.4

Sistema de EDLs de 1er orden

Sistema de EDLs de 1er orden, CV (forma normal), NH:

$$\begin{gathered} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{gathered}$$

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix};$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}; \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{bmatrix}; \qquad \vec{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix};$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \;; \qquad \vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \;.$$

Subtema 3.4

Sistema de EDLs de 1er orden

Sistema de EDOLs de 1er orden, NH, CC (forma normal):

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t)\\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t)\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t)
\end{aligned}
$$

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix};$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix};$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix};$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)\,;$$

$$\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{f}(t).$$

Subtema 3.4

Sistemas de EDLs de 1er orden

Consideraciones importantes:

1) Se usan sistemas de EDLs de 1er orden, porque la teoría general de un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden, comparte muchas semejanzas con la teoría general de una sola ED lineal de enésimo orden.

2) Por otra parte, para cálculos numéricos las técnicas de solución sistemáticas, son más fáciles y más concisas, en su descripción para sistemas de primer orden que para otros de orden mayor, ya que se basan en el Álgebra lineal.

Transformación de una ED de orden n a un sistema de n ecuaciones de 1er orden.

Sea $x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right)$; **(1)**

un "sistema" constituido por una ecuación de enésimo orden. Al introducir las variables dependientes $x_1, x_2, \dots, x_n$, definidas cada una como:

$$x = x_1, \quad x' = x_2, \quad x'' = x_3, \dots, \quad x^{(n-1)} = x_n. \qquad (2)$$

Nótese que $x' = x_1' = x_2$, $x'' = x_2' = x_3$, etc.

Al sustituir **(2)** en **(1)**, se obtiene el siguiente sistema de **n** ecuaciones de **1er orden**:

Subtema 3.4

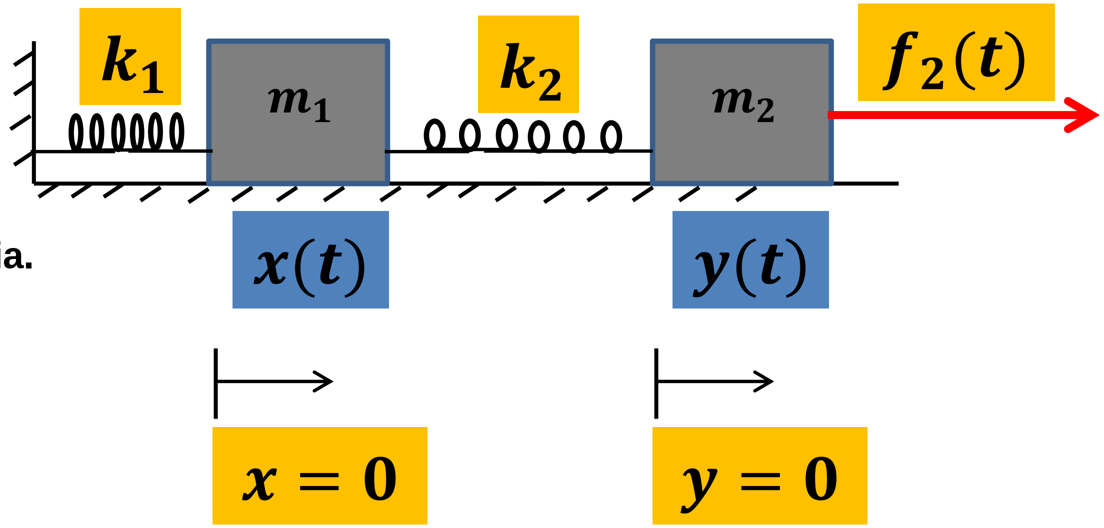
Transformación de una ED de orden n a un sistema de n ecuaciones de 1er orden.

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= x_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1}' &= x_n \\
x_n' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}
$$

$x(t)$ **es una solución de (1)** $\Leftrightarrow$ **las funciones** $x_1(t),\ x_2(t), \dots, x_n(t)$ **definidas en (2), satisfacen el sistema obtenido.**

Ejemplos:

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.



Elaboración propia.

Modelo de oscilaciones forzadas para 2 masas.

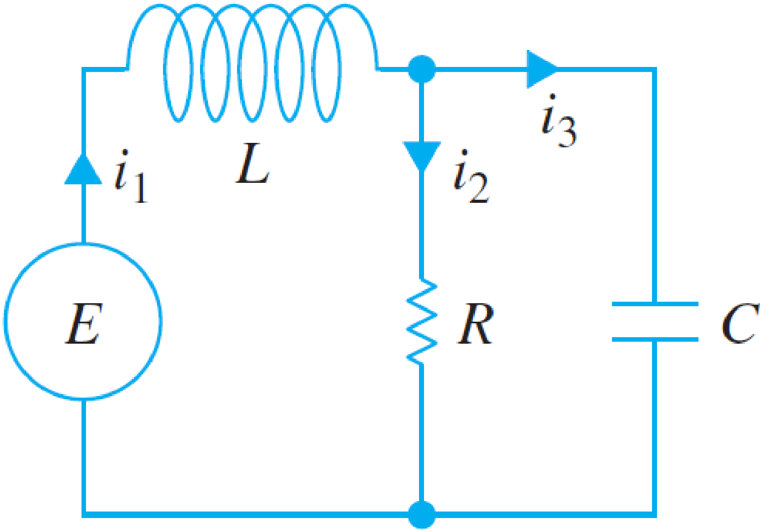
Transformada de Laplace: aplicaciones

La TL y TIL se pueden usar para resolver problemas de valor inicial de orden n, así como sistemas de ecuaciones diferenciales que incluyen condiciones iniciales.

Ejemplo: Zill & Cullen (2009).

$$L\frac{di_1}{dt}+Ri_2=E(t),$$
$$RC\frac{di_2}{dt}+i_2-i_1=0.$$

$i_1(t), i_2(t)$ Corrientes eléctricas.



R Resistencia eléctrica.

C Capacitancia.

L Inductancia.

E Diferencia de potencial.

Transformada de Laplace: aplicaciones

Resolver el sistema mostrado antes, si se tienen los siguientes valores de los parámetros para el circuito eléctrico: $E(t) = 60\ [V]$, $L = 1\ [h]$, $R = 50\ [\Omega]$, $C = 10^{-4}\ [f]$, $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$. **El sistema a resolver es:**

$$\frac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60,$$

$$50(10^{-4})\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0.$$

$$i_1(0) = 0$$
$$i_2(0) = 0$$

Aplicando la TL a cada ecuación del sistema y simplificando se obtiene:

Subtema 3.2

Transformada de Laplace: aplicaciones

$$sI_1(s) + 50I_2(s) = \frac{60}{s},$$
$$-200I_1(s) + (s+200)I_2(s) = 0.$$

Donde:

$$I_1(s) = \mathcal{L}\{i_1(t)\}$$
$$I_2(s) = \mathcal{L}\{i_2(t)\}$$

A partir de despejar I_1 de la 2da. ecuación y sustituir en la primera, se obtienen I_1 y I_2 en términos de s; además, al expandir mediante el MFP, se llega a:

$$I_1(s) = \frac{60s + 12000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{60}{(s+100)^2}$$
$$I_2(s) = \frac{12000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{120}{(s+100)^2}.$$

Transformada de Laplace: aplicaciones

Aplicando la TIL a cada ecuación algebraica, se obtienen las corrientes eléctricas:

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$

$$i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}$$

Aplicaciones: Modelos matemáticos de sistemas físicos.

Mechanical Mass–Spring System with Damping		Electrical *RLC* Series Circuit	
$mx'' + bx' + kx = f(t)$		$Lq'' + Rq' + (1/C)q = E(t)$	
Displacement	x	Charge	q
Velocity	x'	Current	$q' = I$
Mass	m	Inductance	L
Damping constant	b	Resistance	R
Spring constant	k	$(\text{Capacitance})^{-1}$	$1/C$
External force	$f(t)$	Voltage source	$E(t)$

Tomada de Nagle et al., (2012).