Tema 4: Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Presenta:
Daniel Peña Maciel

Tema 4

Objetivo:

El alumno identificará las ecuaciones en derivadas parciales, y aplicará el método de separación de variables en su resolución.

Subtema 4.1

Introducción

Definición de EDP: Ecuación que relaciona una función de varias variables (**desconocida**), con sus variables **independientes** y sus **derivadas parciales**.

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t};\quad 0<x<L\,,t>0$$

$u(x,t)$; $k \rightarrow$ Cte.

Se puede tener lo siguiente:

$u(x,t)$, $u(x,y)$ → Variable dependiente.

x,t, x,y → Variables independientes.

x,y → Variables espaciales.

t → Variable temporal.

Subtema 4.1

Introducción

a) Orden de una EDP: **Corresponde al de la derivada de mayor orden contenida en la ecuación.**

b) Grado de la EDP: **Potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden.**

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad 0 < x < L\,, t > 0$$

$u(x,t)$; k → Cte.

Introducción

c) Linealidad de la EDP:

- Lineal (L):

a) La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado.

b) Cada coeficiente de la variable dependiente y sus derivadas, depende solamente de las variables independientes.

- Casi lineal o cuasi lineal (CL): **Si la EDP es lineal en la derivada de mayor orden y, no lineal en las otras derivadas parciales o la variable dependiente.**

- No lineal (NL) : **Las que no cumplen las propiedades anteriores.**

Subtema 4.1

Introducción

Forma general de la ecuación usada en este curso:

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}) = 0$$

EDP 2do orden, en 2 variables independientes.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}; \qquad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \qquad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u_{tx} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

Subtema 4.1

Introducción

EDPL (forma general), de orden 2, NH, CV

2 variables independientes.

$$a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+c(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+d(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$+f(x,t)u=g(x,t)$$

a,b,c,d,e,f,g → **Dependen de** x,t **.**

Si a,b,c,d,e **y** f **son ctes. y,** $g\,(x,t)=0$**, la ecuación es:**

EDPL (forma general), de orden 2, H, CC

2 variables independientes.

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial t}+fu=0$$

Subtema 4.1

EDPs básicas que describen procesos físicos

$$A)\ k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

→ **Calor. Parabólica.**

Procesos físicos dependientes del tiempo; evolucionan a edo. estacionario.

$$B)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$B)\ \nabla^2 u = 0$$

→ **Laplace. Elíptica.**

Procesos físicos de estado estacionario.

$$C)\ c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

→ **Onda. Hiperbólica.**

Procesos físicos dependientes del tiempo; no evolucionan a edo. estacionario.

Subtema 4.2

Método de separación de variables (MSV)

Este método, puede reducir una EDPL de dos variables independientes, a 2 EDOs:

1) Se propone la solución de la EDPLH, de la forma:

$$u(x,y) = X(x)Y(y)\ ;$$

$$u = XY\ .$$

2) Se calculan las derivadas que aparecen en la EDP, por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = XY';$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'';$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial yx} = X'Y'\ .$$

Entonces, se sustituyen éstas y $u(x,y)$ en la EDP.

Subtema 4.2

Método de separación de variables (MSV)

3) En un lado de la ecuación, se coloca todo lo que dependa de x, y del otro, todo lo que dependa de y. Por ejemplo:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad .$$

4) Se usa una constante de separación (real) λ, para precisamente, separar las variables:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad .$$

De no indicarse la naturaleza del valor de dicha cte., deben analizarse **3 casos**:

a) $\lambda > 0$
b) $\lambda = 0$
c) $\lambda < 0$.

5) Se resuelve cada EDO resultante, y se multiplican las funciones $X(x)$, $Y(y)$ obtenidas, para formar la solución completa $u(x,y)$.

Resolución de problemas de condiciones iniciales y de frontera

Problema de condiciones iniciales y de frontera (PVIF):

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t};\quad 0 < x < L\,;\ t > 0$$

EDP

+

$$u(0,t) = 0;\quad u(L,t) = 0;\quad t > 0$$

CF

+

$$u(x,0) = f(x);\quad 0 < x < L$$

CI

PVI: $y'' + p_1 y' + p_0 y = 0$; $y(a) = 0;\ y'(a) = 0$; $y(0) = 0;\ y'(0) = 0$

PVF: $y'' + 2y' + \lambda y = 0$; $y(a) = 0;\ y(b) = 0$; $y(0) = 0;\ y(1) = 0$

Subtema 3.3, 4.4

Resolución de problemas de condiciones iniciales y de frontera

Elaboración propia.

$u(0,t) = 0$

Barra: Región R en el espacio.

$u(L,t) = 0$

x

0 L

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t};$$
$$0 < x < L\ ;\ t > 0$$

EDP:
Ecuación de calor.

$$u(0,t) = 0;$$
$$u(L,t) = 0;$$
$$t > 0$$

CF

3 tipos principales:

a) Dirichlet.
b) Neumann.
c) Robin.

$$u(x,0) = f(x);$$
$$0 < x < L$$

CI

Serie trigonométrica de Fourier

Sea el espacio vectorial **V** de las funciones **f(x)** definidas en el intervalo $-L \leq x \leq L$. Si se define el producto interno como:

$$(f|g) = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,dx \quad .$$

Entonces, puede demostrarse que el conjunto de funciones

$$B = \left\{ \left[sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right); n = 1, 2, 3, \dots \right], \left[cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right); n = 0, 1, 2, 3, \dots \right] \right\},$$

es decir,

$$B = \left\{ 1, sen\left(\frac{\pi}{L}x\right), cos\left(\frac{\pi}{L}x\right), sen\left(\frac{2\pi}{L}x\right), cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \dots \right\} \ ,$$

es un conjunto ortogonal de **V**, y por lo tanto, una base de éste; donde cualquier función de **V**, puede representarse

Serie trigonométrica de Fourier

como una combinación lineal de los elementos de la base, esto es:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right];$$

$\forall\, f(x)\in V;$

Serie de Fourier (SF) de $f(x)$, definida en $(-L,L)$.

Periodo:

$T=2L$.

Donde:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

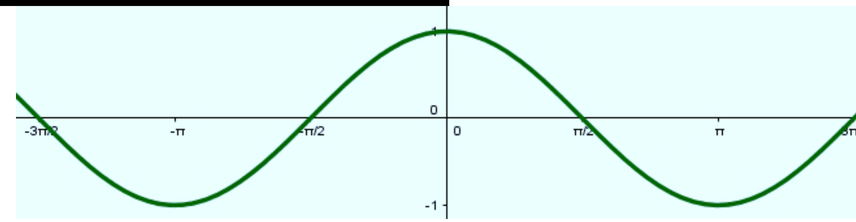
Coeficientes de Fourier de $f(x)$.

Subtema 4.3

Serie trigonométrica de Fourier

1) Función par: $f(x) = f(-x).$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right];$$



Elaboración propia.

Serie coseno de Fourier. $b_n = 0.$

Semiperiodo:

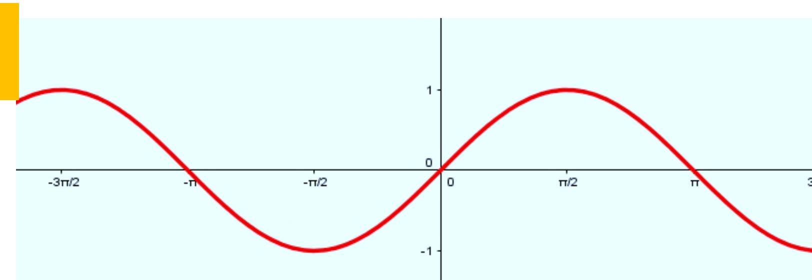
$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,.$$

$$P = \frac{T}{2} = L\,.$$

2) Función impar: $f(-x) = -f(x).$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right);$$



Serie seno de Fourier.

$$a_0 = 0$$

Elaboración propia.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,.$$

$$a_n = 0$$

Subtema 4.3

Aplicación de la SF

Consideraciones útiles:

1) Bosquejar la gráfica de la función.

2) Determinar si la función es **par** o **impar**.

3) Determinar el "periodo": **T=2L** o el "semiperiodo": **P=L** para la función.

4) Con base en lo anterior, proponer la forma de la **serie**.

5) Obtener los coeficientes mediante las expresiones correspondientes.

6) Sustituir los coeficientes obtenidos en la serie propuesta.