



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

Cuaderno de ejercicios resueltos

Cinemática y Dinámica

Autor: Yukihiro Minami Koyama

⋮

Academia de Dinámica
División de Ciencias Básicas



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

Cuaderno de ejercicios resueltos

Cinemática y Dinámica

Autor: Yukihiro Minami Koyama

Cinética rectilínea de la partícula

Academia de Dinámica
División de Ciencias Básicas

Ejercicio 1

Determine la masa real de un cuerpo cuya masa en reposo es $m_0 = 1$ kg, y que se mueve con una rapidez de 108,000 kph, si se sabe que la rapidez de la luz es de $c = 299,792 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

La expresión para el cálculo de la masa de un cuerpo en función de su rapidez es la siguiente:

$$m = m_0 \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad \text{Expresión tomada de: } \text{http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Relativ/tdil.html}$$

Primero, se convierten al SI (Sistema Internacional) tanto el valor de la rapidez del cuerpo como la rapidez de la luz:

$$v = 108,000 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}$$

$$v = \frac{108000 \text{ m}}{3.6 \text{ s}}$$

$$v = 30,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = 299,792, \frac{\text{km}}{\text{s}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}$$

$$c = 299'792,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Posteriormente, se sustituyen los valores en la expresión correspondiente:

$$m = 1 \frac{299792000}{\sqrt{(299792000)^2 - (30000)^2}}$$

$$m = \frac{299792000}{\sqrt{8.9875243264 \cdot 10^{16} - 9 \cdot 10^8}}$$

$$m = \frac{299792000}{\sqrt{8.9875242364 \cdot 10^{16}}}$$

$$m = \frac{299792000}{299791998.5}$$

$$m = 1.000000005 \text{ kg}$$

La masa real de un cuerpo de 1 kg de masa en reposo que se mueve a una rapidez de 108,000 kph es:

$$m = 1.000000005 \text{ kg.}$$

Se puede observar que la masa real es prácticamente la misma que la masa en reposo.

Dado que la masa de un cuerpo moviéndose en la Tierra puede considerarse constante, la expresión de la segunda ley de Newton que se empleará para la resolución de los problemas de Dinámica es:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

donde \vec{F} y \vec{a} son vectores.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

$$m_0 = 1;$$

$$v = 108\,000 \times \frac{1000}{1} \times \frac{1}{3600};$$

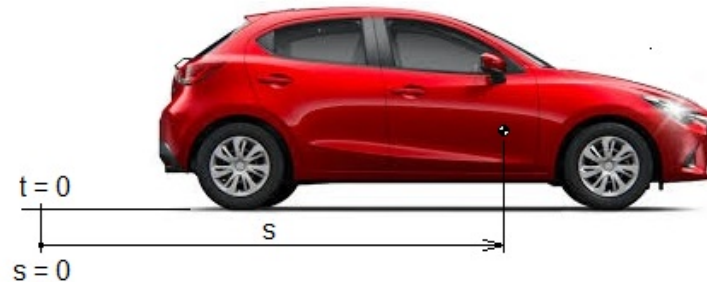
$$c = 299\,792 \times \frac{1000}{1};$$

Cálculo de la masa real:

$$m = N \left[m_0 \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}, 20 \right]$$

Ejercicio 2

Un automóvil, como el mostrado en la figura, parte del reposo en $t = 0$, y se hizo la medición de su posición, s , con respecto al tiempo, desde que inició su movimiento en $s = 0$, hasta que se detuvo, en $t = 12$ s.



Dicha posición se pudo representar por medio de la siguiente expresión:

$$s = -0.02 t^4 + 0.24 t^3 + 1.44 t^2$$

Determine:

- la aceleración inicial del automóvil;
- su rapidez en $t = 10$ s;
- la rapidez máxima que alcanzó y en qué instante se produjo.

La variable s es la magnitud del vector de posición. Por consiguiente, si se considera que el eje x es paralelo a la trayectoria del automóvil:

$$\vec{r} = \{-0.02 t^4 + 0.24 t^3 + 1.44 t^2, 0\}$$

Dado que se conoce la expresión de la posición del automóvil, con base en la definición de velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Se obtiene la derivada del vector de posición, \vec{r} , con respecto al tiempo, t . La derivada de un vector es otro vector formado por las derivadas de las componentes respectivas:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left\{ \frac{d}{dt} (-0.02 t^4 + 0.24 t^3 + 1.44 t^2), \frac{d}{dt} (0) \right\}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \{-0.08 t^3 + 0.72 t^2 + 2.88 t, 0\}$$

es decir:

$$\vec{v} = \{-0.08 t^3 + 0.72 t^2 + 2.88 t, 0\}$$

a) la aceleración inicial del automóvil

Asimismo, dado que la aceleración es la derivada con respecto al tiempo de la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left\{ \frac{d}{dt} (-0.08 t^3 + 0.72 t^2 + 2.88 t), \frac{d}{dt} (0) \right\}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \{-0.24 t^2 + 1.44 t + 2.88, 0\}$$

de donde:

$$\vec{a} = \{-0.24 t^2 + 1.44 t + 2.88, 0\}$$

Por tanto, para $t = 0$ s:

$$\overline{a}_0 = \{-0.24(0)^2 + 1.44(0) + 2.88, 0\}$$

$$\overline{a}_0 = \{-0 + 0 + 2.88, 0\}$$

$$\overline{a}_0 = \{2.88, 0\} \frac{m}{s^2}$$

La aceleración inicial del automóvil es:

$$\overline{a}_0 = \{2.88, 0\} \frac{m}{s^2}.$$

b) su rapidez en $t = 10$ s

$$\overline{v}_{10} = \{-0.08(10)^3 + 0.72(10)^2 + 2.88(10), 0\}$$

$$\overline{v}_{10} = \{-0.08(1000) + 0.72(100) + 28.8, 0\}$$

$$\overline{v}_{10} = \{-80 + 72 + 28.8, 0\}$$

$$\overline{v}_{10} = \{20.8, 0\} \frac{m}{s}$$

Por consiguiente, dado que la rapidez es la magnitud de la velocidad:

$$v_{10} = |\overline{v}_{10}|$$

$$v_{10} = 20.8 \frac{m}{s}$$

La rapidez del automóvil en $t = 10$ s es:

$$v_{10} = 20.8 \frac{m}{s}.$$

c) la rapidez máxima que alcanzó y en qué instante se produjo

Para obtener la rapidez máxima, se deriva la expresión de la rapidez con respecto al tiempo y se iguala a cero, para determinar el tiempo crítico; se sustituye dicho valor en la expresión de la rapidez para encontrarla.

$$v = -0.08 t^3 + 0.72 t^2 + 2.88 t$$

$$\frac{dv}{dt} = -0.24 t^2 + 1.44 t + 2.88$$

$$-0.24 t^2 + 1.44 t + 2.88 = 0$$

Para simplificar la obtención de las raíces, se normaliza la expresión, es decir, se hace que el término con mayor exponente sea igual a uno, para lo cual es suficiente con dividir toda la expresión por (-0.24):

$$\frac{-0.24}{-0.24} t^2 + \frac{1.44}{-0.24} t + \frac{2.88}{-0.24} = \frac{0}{-0.24}$$

$$t^2 - 6 t - 12 = 0$$

Se aplica la fórmula del “chicharronero” simplificada:

$$t_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$t_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-12)}$$

$$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{(3)^2 + 12}$$

$$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 + 12}$$

$$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{21}$$

$$t_{1,2} = 3 \pm 4.583$$

Se descarta la raíz negativa ya que no tiene significado físico:

$$t_1 = 3 + 4.583$$

$$t_1 = 7.583 \text{ s}$$

Se sustituye el valor obtenido en la expresión de la rapidez:

$$v_{\max} = -0.08 (7.583)^3 + 0.72 (7.583)^2 + 2.88 (7.583)$$

$$v_{\max} = -0.08 (435.96) + 0.72 (57.595)$$

$$v_{\max} = -34.88 + 41.40 + 21.84$$

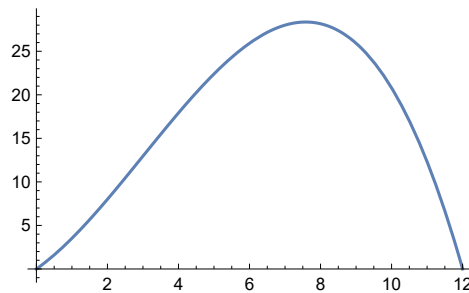
$$v_{\max} = 28.36 \frac{m}{s}$$

La rapidez máxima que alcanzó el automóvil y el instante en que se produjo son:

$$v_{\max} = 28.36 \frac{m}{s} \text{ en } t_1 = 7.583 \text{ s.}$$

Gráfica de la rapidez con respecto al tiempo

Plot $[-0.08 t^3 + 0.72 t^2 + 2.88 t, \{t, 0, 12\}]$



En la gráfica anterior puede observarse que el valor máximo de la rapidez es alrededor de $28 \frac{m}{s}$, lo cual sucede en un valor de t cercano a 8. Asimismo, la rapidez en $t = 10 \text{ s}$ es aproximadamente 20.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

$$t_0 = 0;$$

$$t_f = 12;$$

$$s = -0.02 t^4 + 0.24 t^3 + 1.44 t^2;$$

Vectores de posición, velocidad y la aceleración:

$$r = \{s, \theta\}$$

$$v = D[r, t]$$

$$a = D[v, t]$$

a) la aceleración inicial del automóvil

$$a_0 = a /. t \rightarrow t_0$$

b) su rapidez en $t = 10$ s

$$v_{10} = v[[1]] /. t \rightarrow 10$$

c) la rapidez máxima que alcanzó y en qué instante se produjo

$$ec1 = D[v[[1]], t] == 0$$

$$resp1 = Solve[ec1]$$

$$tcrit = resp1[[2]]$$

$$vmax = v[[1]] /. tcrit$$

Ejercicio 3

Se lanza verticalmente un cuerpo con una rapidez inicial de $v_0 = 5 \frac{m}{s}$, hacia arriba, desde una posición ubicada a 1.2 m del piso.

Determine las expresiones de la rapidez y la posición del cuerpo en función del tiempo, así como la altura máxima que alcanza y el tiempo que transcurre hasta que choca con el piso. Desprecie la fuerza de fricción viscosa del aire, así como el efecto del principio de Bernoulli sobre el cuerpo. Asimismo, dibuje las gráficas de la aceleración, la rapidez y la posición del cuerpo con respecto al tiempo, e interprete dichas gráficas con base en el concepto de área bajo la curva.

Metodología para la resolución de problemas de cinética rectilínea de la partícula

La metodología que puede aplicarse para resolver problemas de cinética rectilínea de la partícula es la siguiente:

- 1 Dibujar el diagrama de cuerpo libre del objeto de estudio, luego de que ya se haya empezado a mover. En los problemas iniciales, no se considerarán las fuerzas que producen el movimiento, sino que se tomará en cuenta las condiciones iniciales que producen.
- 2 Luego de determinar la representación vectorial de todas las fuerzas que actúan en el objeto de estudio, se obtiene la resultante de todas las fuerzas.
- 3 Con base en la segunda ley de Newton, se plantea la ecuación que relaciona la resultante de todas las fuerzas con el producto de la masa por la aceleración.
- 4 Se calcula la aceleración del objeto de estudio a partir de la ecuación anterior.
- 5 Se plantea la ecuación diferencial de la aceleración, que se define como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es decir:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

a partir de la cual, por medio del método de separación de variables y de integración, considerando como el límite inferior de las integrales definidas las condiciones iniciales asociadas a cada variable, y como el límite superior las propias variables de integración, se obtiene el vector velocidad.

- 6 De forma similar al punto anterior, con base en la ecuación diferencial de la velocidad, que se define como la derivada de la posición con respecto al tiempo, cuya expresión es:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

se obtiene el vector de posición del objeto de estudio.

- 1 El diagrama de cuerpo libre

Para este problema, luego de que fue lanzada la pelota, el diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



- 2 La representación vectorial de las fuerzas que actúan

La representación vectorial del peso es:

$$\vec{W} = \{0, -mg\}$$

3 Aplicación de la segunda ley de Newton

Se establece la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{W} = m \vec{a}$$

4 Cálculo de la aceleración

$$\vec{a} = \{a_x, a_y\}$$

Sustituyendo los vectores conocidos:

$$\{0, -mg\} = m \{a_x, a_y\}$$

De la ecuación anterior, se obtienen las siguientes expresiones escalares:

$$0 = m a_x$$

$$-m g = m a_y$$

de donde se obtiene que:

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

Por consiguiente:

$$\vec{a} = \{0, -g\}$$

5 Resolución de la ecuación diferencial de la aceleración

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

de donde:

$$a_y dt = dv_y$$

$$-g dt = dv_y$$

$$\int_{t_0}^t -g dt = \int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y$$

En la expresión anterior, t_0 es el tiempo inicial, usualmente CERO, y v_{y0} es la rapidez inicial.

Con base en el enunciado del problema, se puede establecer que dicho valor es:

$$v_{y0} = 5 \frac{m}{s}$$

Al resolver las integrales de la expresión correspondiente, queda que:

$$-g t \Big|_0^t = v_y \Big|_5^{v_y}$$

$$-g t - [-g (0)] = v_y - 5$$

$$-g t = v_y - 5$$

$$v_y = -g t + 5$$

$$\vec{v} = \{0, -g t + 5\}$$

La expresión de la rapidez del cuerpo, en función del tiempo, es:

$$v_y = -g t + 5.$$

6 Resolución de la ecuación diferencial de la rapidez

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

de donde:

$$v_y dt = dy$$

$$(-g t + 5) dt = dy$$

$$\int_{t_0}^t (-g t + 5) dt = \int_{y_0}^y dy$$

En este caso, la posición inicial es 1.2 m arriba del piso, que se considera que tiene una ordenada nula:

$$y_0 = 1.2 \text{ m}$$

De donde:

$$\int_0^t (-gt + 5) dt = \int_{1.2}^y dy$$

Luego de resolver las integrales anteriores:

$$-\frac{1}{2} g t^2 + 5 t \Big|_0^t = y \Big|_{1.2}^y$$

$$-\frac{1}{2} g t^2 + 5 t - [-\frac{1}{2} g (0)^2 + 5 (0)] = y - 1.2$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + 5 t + 1.2$$

$$\vec{r} = \{0, -\frac{1}{2} g t^2 + 5 t + 1.2\}$$

La expresión de la posición del cuerpo en función del tiempo es :

$$y = -4.905 t^2 + 5 t + 1.2$$

Para obtener la altura máxima que alcanza el cuerpo, es necesario obtener el valor del instante de tiempo en el que alcanzó una velocidad nula, debido a que es justamente en dicho instante cuando la velocidad, que cuando sube es positiva, disminuye hasta que se hace cero y luego se hace negativa cuando empieza a bajar, por tanto, justo cuando es cero es cuando cambia el sentido de su movimiento.

También puede explicarse como un problema de máximos y mínimos, para lo cual es necesario derivar la expresión de la posición, que resulta ser la rapidez que es la magnitud de la velocidad, e igualarla a cero, es decir:

$$v_y = 0$$

Al instante de tiempo en el que alcanza su altura máxima se le denomina tiempo crítico, $t_{\text{crít}}$:

$$-9.81 t_{\text{crít}} + 5 = 0$$

$$9.81 t_{\text{crít}} = 5$$

$$t_{\text{crít}} = \frac{5}{9.81}$$

$$t_{\text{crít}} = 0.509684 \text{ s}$$

Por tanto, la altura máxima que alcanza el cuerpo se obtiene al sustituir el tiempo crítico en la expresión de la posición:

$$y_{\text{max}} = -4.905 t_{\text{crít}}^2 + 5 t_{\text{crít}} + 1.2$$

$$y_{\text{max}} = -4.905 (0.509684)^2 + 5 (0.509684) + 1.2$$

$$y_{\text{max}} = -4.905 (0.259778) + 2.5484 + 1.2$$

$$y_{\text{max}} = -1.2742 + 2.5484 + 1.2$$

$$y_{\text{max}} = 2.4742 \text{ m}$$

El cuerpo alcanza una altura máxima de :

$$y_{\text{max}} = 2.4742 \text{ m.}$$

Para determinar el tiempo que transcurre hasta que choca con el piso, simplemente se resuelve la ecuación de la posición vertical cuando es igual a cero:

$$y = -4.905 t^2 + 5 t + 1.2$$

$$0 = -4.905 t^2 + 5 t + 1.2$$

Luego de normalizar la ecuación al dividir todos los términos por (-4.905), se obtiene:

$$\frac{-4.905}{-4.905} t^2 + \frac{5}{-4.905} t + \frac{1.2}{-4.905} = \frac{0}{-4.905}$$

$$t^2 - 1.019 t - 0.2446 = 0$$

Se aplica la fórmula para la resolución de ecuaciones cuadráticas simplificada, con $a = 1$:

$$t_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$t_{1,2} = \frac{1.019}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1.019}{2}\right)^2 + 0.2446}$$

$$t_{1,2} = 0.5097 \pm \sqrt{0.5097^2 + 0.2446}$$

$$t_{1,2} = 0.5097 \pm \sqrt{0.2598 + 0.2446}$$

$$t_{1,2} = 0.5097 \pm \sqrt{0.5044}$$

$$t_{1,2} = 0.5097 \pm 0.7102$$

Dado que la raíz negativa no tiene interpretación física:

$$t_1 = 0.5097 + 0.7102$$

$$t_1 = 1.22 \text{ s}$$

El tiempo que transcurre hasta que el cuerpo choca con el piso es:

$$t_1 = 1.22 \text{ s.}$$

Las gráficas de la aceleración, la rapidez y la posición del cuerpo con respecto al tiempo son las siguientes:

$$t1 = 1.190606;$$

$$aySol = -9.81$$

$$vySol = -9.81 t + 5$$

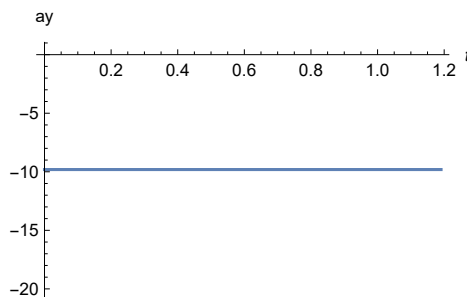
$$ySol = -4.905 t^2 + 5 t + 1$$

`Plot[aySol, {t, 0, t1}, AxesLabel → {t, ay}]`

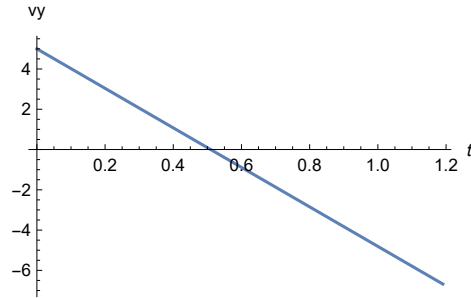
`Plot[vySol, {t, 0, t1}, AxesLabel → {t, vy}]`

`Plot[ySol, {t, 0, t1}, AxesLabel → {t, y}]`

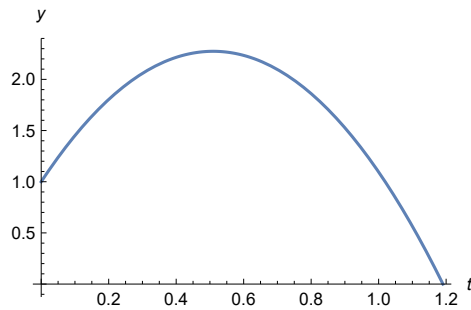
Gráfica de la aceleración a_y vs. tiempo



Gráfica de la rapidez v_y vs. tiempo



Gráfica de la posición y vs. tiempo



Se puede verificar que, debido a que la aceleración, a_y , es la derivada de la rapidez, v_y , con respecto al tiempo, t , y la rapidez es la derivada de la posición, y , con respecto al tiempo, la rapidez se puede obtener como el área bajo la curva de la aceleración, ya que es la interpretación geométrica de la integral y , de forma similar, la posición se puede obtener como el área bajo la curva de la rapidez.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
g = 9.81;
vy0 = 5;
t0 = 0;
vecA = {ax, ay}
vecV = {vx, vy}
vecR = {x, y}
y0 = 1.2;
```

Resultante de fuerzas que actúa en el cuerpo:

```
W = {0, -m g}
R = W
```

Con base en la segunda ley de Newton:

$$\text{ec1} = R == m \text{ vecA}$$

Se obtiene la aceleración:

$$\begin{aligned} \text{resp1} &= \text{Solve}[\text{ec1}, \text{vecA}] \\ \text{vecASol} &= \text{vecA} /. \text{resp1}[[1]] \\ \text{aySol} &= \text{vecASol}[[2]] \end{aligned}$$

Dado que $a_y \text{ Sol} = \frac{dv_y}{dt}$, $a_y \text{ Sol} dt = dv_y$, por consiguiente:

$$\begin{aligned} \text{ec2} &= \int_{t_0}^t \text{aySol} dt == \int_{v_{y0}}^{v_y} dv_y \\ \text{resp2} &= \text{Solve}[\text{ec2}, v_y] \\ \text{vySol} &= v_y /. \text{resp2}[[1]] \\ \text{vecV} &= \{0, \text{vySol}\} \end{aligned}$$

Asimismo, como $v_y \text{ Sol} = \frac{dy}{dt}$, entonces $v_y \text{ Sol} dt = dy$, de donde:

$$\begin{aligned} \text{ec3} &= \int_{t_0}^t \text{vySol} dt == \int_{y_0}^y dy \\ \text{resp3} &= \text{Solve}[\text{ec3}, y] \\ \text{ySol} &= y /. \text{resp3}[[1]] \\ \text{vecR} &= \{0, \text{ySol}\} \end{aligned}$$

Para determinar la altura máxima que alcanza, se obtiene el instante de tiempo en el que la rapidez del cuerpo es nula:

$$\begin{aligned} \text{ec4} &= \text{vySol} == 0 \\ \text{resp4} &= \text{Solve}[\text{ec4}] \\ \text{tcrit} &= t /. \text{resp4}[[1]] \end{aligned}$$

El tiempo crítico obtenido se sustituye en la expresión de y:

$$\text{ymax} = \text{ySol} /. t \rightarrow \text{tcrit}$$

Se calcula el tiempo en el que la pelota choca con el piso cuando $y = 0$:

```
ec5 = ySol == 0  
resp5 = Solve[ec5]  
t1Sol = t /. resp5[[2]]
```

Dibujo de las gráficas de la magnitud de la aceleración, a_y , de la componente en y de la velocidad, v_y , y de la posición vertical, y , desde que inicia el movimiento hasta que el cuerpo choca con el piso:

```
Plot[aySol, {t, 0, t1Sol}, AxesLabel → {t, ay}];  
Plot[vySol, {t, 0, t1Sol}, AxesLabel → {t, vy}];  
Plot[ySol, {t, 0, t1Sol}, AxesLabel → {t, y}];
```

Ejercicio 4

Un lanzador profesional de béisbol lanza verticalmente y hacia arriba, una pelota que tiene una masa aproximada de 0.2 kg desde el suelo.

Si la rapidez inicial que le imprime el lanzador a la pelota es $v_0 = 40 \text{ m/s}$ (90 mph), determine la distancia que ésta recorre en 6 segundos.

Desprecie la fuerza de fricción viscosa del aire, así como el efecto del principio de Bernoulli sobre la pelota.

Para este problema, luego de que fue lanzada la pelota, el diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



La representación vectorial del peso es:

$$\vec{W} = \{0, -mg\}$$

que en este caso es la fuerza resultante.

Con base en la segunda ley de Newton, se obtiene la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{W} = m \vec{a}$$

donde:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y\}$$

Sustituyendo los vectores conocidos:

$$\{0, -mg\} = m \{a_x, a_y\}$$

De la ecuación anterior, se obtienen las siguientes expresiones escalares:

$$0 = m a_x$$

$$-m g = m a_y$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

Por consiguiente:

$$\vec{a} = \{0, -g\}$$

Luego, se plantea y resuelve la ecuación diferencial de la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

De donde:

$$\vec{a} dt = d\vec{v}$$

$$\{0, -g\} dt = d\vec{v}$$

$$\int_{t_0}^t \{0, -g\} dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}$$

En la expresión anterior, t_0 es el tiempo inicial, usualmente CERO, y \vec{v}_0 es el vector de velocidad inicial. Con base en el enunciado del problema, se puede establecer que dicho vector es:

$$\vec{v}_0 = \{0, 40\} \frac{m}{s}$$

Al resolver las integrales de la expresión correspondiente, queda que:

$$\{0, -g\} t \Big|_0^t = \bar{v} \Big|_{\{0, 40\}}$$

$$\{0, -g\} t - \{0, -g\} (0) = \bar{v} - \{0, 40\}$$

$$\{0, -g t\} = \bar{v} - \{0, 40\}$$

$$\bar{v} = \{0, -g t\} + \{0, 40\}$$

$$\bar{v} = \{0, -g t + 40\}$$

La expresión de la velocidad del cuerpo, en función del tiempo, es:

$$\bar{v} = \{0, -9.81 t + 40\}.$$

Y por último, se resuelve la ecuación diferencial de la velocidad:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\bar{v} dt = d\bar{r}$$

$$\{0, -g t + 40\} dt = d\bar{r}$$

$$\int_{t_0}^t \{0, -g t + 40\} dt = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} d\bar{r}$$

Usualmente se establece como posición inicial el origen:

$$\int_0^t \{0, -g t + 40\} dt = \int_{\{0, 0\}}^{\bar{r}} d\bar{r}$$

Luego de resolver las integrales anteriores:

$$\{0, -\frac{1}{2} g t^2 + 40 t\} \Big|_0^t = \bar{r} \Big|_{\{0, 0\}}$$

$$\{0, -\frac{1}{2} g t^2 + 40 t\} - \{0, -\frac{1}{2} g 0^2 + 40 (0)\} = \bar{r} - \{0, 0\}$$

$$\bar{r} = \{0, -\frac{1}{2} g t^2 + 40 t\}$$

La expresión de la posición del cuerpo en función del tiempo es :

$$\bar{r} = \{0, -4.905 t^2 + 40 t\}$$

Como puede observarse, cuando el movimiento es rectilíneo y se hace coincidir uno de los ejes del marco de referencia con el movimiento del cuerpo de estudio, únicamente una de las componentes de la aceleración, velocidad y posición es diferente de cero, en este caso las componentes en y:

$$a_y = -g$$

$$v_y = -g t + 40$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + 40 t$$

Por facilidad y economía de escritura, cuando el movimiento sea rectilíneo, se establecerán y resolverán ecuaciones escalares, sin perder de vista que en realidad se están manejando vectores.

Ahora, para resolver el problema, en este caso particular se puede obtener la posición para $t = 6$ s:

$$y(t = 6) = -\frac{1}{2} (9.81) 6^2 + 40 (6)$$

$$y(t = 6) = -4.905 (36) + 240$$

$$y(t = 6) = -176.58 + 240$$

$$y(t = 6) = 63.42 \text{ m}$$

Este resultado sería la distancia recorrida si para dicho tiempo el cuerpo está subiendo, es decir, la componente en y de la velocidad es positiva:

$$v_y(t=6) = -9.81(6) + 40$$

$$v_y(t=6) = -58.86 + 40$$

$$v_y(t=6) = -18.86 \frac{m}{s}$$

Dado que el resultado es negativo, esto indica que el cuerpo va bajando. Esto quiere decir que primero alcanzó su altura máxima y posteriormente empezó a bajar. Entoces, es necesario determinar cuándo alcanzó su altura máxima, que corresponde al instante en que su velocidad es cero y que se le denomina tiempo crítico, $t_{crít}$:

$$v_y = 0$$

$$-9.81 t_{crít} + 40 = 0$$

$$9.81 t_{crít} = 40$$

$$t_{crít} = \frac{40}{9.81}$$

$$t_{crít} = 4.077 \text{ s}$$

Por tanto, la altura máxima se obtiene al sustituir el tiempo crítico en la expresión de la posición:

$$y_{max} = -4.905 t_{crít}^2 + 40 t_{crít}$$

$$y_{max} = -4.905 (4.077)^2 + 40 (4.077)$$

$$y_{max} = -4.905 (16.63) + 163.10$$

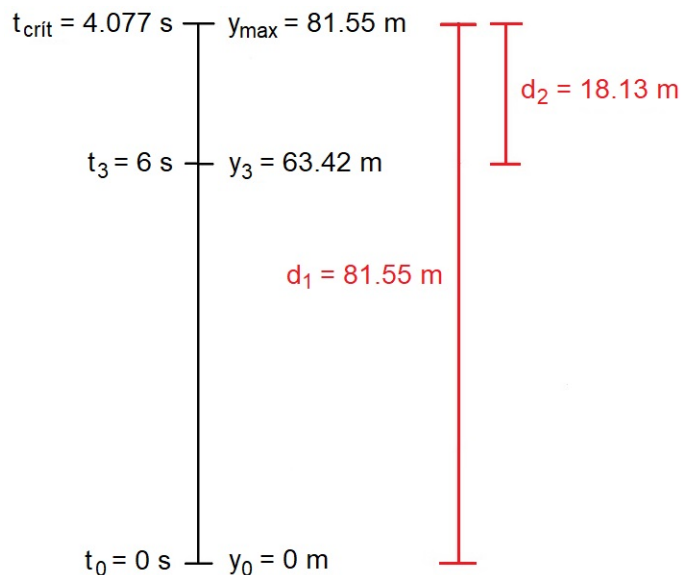
$$y_{max} = -81.55 + 163.10$$

$$y_{max} = 81.55 \text{ m}$$

La pelota alcanza una altura máxima

$$y_{max} = 81.55 \text{ m.}$$

En la siguiente figura se muestra gráficamente lo que ocurre con la posición de la pelota. Inicia su movimiento en el suelo, $y_0 = 0$, alcanza su altura máxima, $y_{max} = 81.55 \text{ m}$, en el instante $t_{crít} = 4.077 \text{ s}$, y baja hasta que $t_3 = 6$, cuando su posición es $y_3 = 63.42 \text{ m}$.



Por consiguiente, la distancia recorrida por la pelota es lo que subió hasta la altura máxima, $d_1 = 81.55$ m, más lo que bajó hasta $t = 6$ s, que es $d_2 = y_{\max} - y_3$:

$$d_2 = 81.55 - 63.42$$

$$d_2 = 18.13 \text{ m}$$

$$\text{distRecorrida} = d_1 + d_2$$

$$\text{distRecorrida} = 81.55 + 18.13$$

$$\text{distRecorrida} = 99.68 \text{ m}$$

La distancia recorrida por la pelota de béisbol en 6 segundos es:

$$\text{distRecorrida} = 99.68 \text{ m.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 0.2;
g = 9.81;
vecR0 = {0, 0}
vecV0 = {0, 40};
t3 = 6;
vecA = {ax, ay}
vecV = {vx, vy}
vecR = {x, y}
```

Suma de fuerzas que actúan en el cuerpo:

```
W = {0, -m g}
SumaF = W
```

Con base en la Segunda ley de Newton:

```
ec1 = SumaF == m vecA
```

Se obtiene la aceleración:

```
resp1 = Solve[ec1, vecA]
vecASol = vecA /. resp1[[1]]
```

Dado que $\text{vecASol} = \frac{dv}{dt}$, $\text{vecASol } dt = dv$, por consiguiente:

$$\text{ec2} = \int_{\text{vecV0}}^{\text{vecV}} dv = \int_0^t \text{vecASol } dt$$

resp2 = Solve[ec2, vecV]

vecVSol = vecV /. resp2[[1]]

Asimismo, como $\text{vecVSol} = \frac{dr}{dt}$, entonces $\text{vecVSol } dt = dr$, de donde:

$$\text{ec3} = \int_{\text{vecR0}}^{\text{vecR}} dr = \int_0^t \text{vecVSol } dt$$

resp3 = Solve[ec3, vecR]

vecRSol = vecR /. resp3[[1]]

Para determinar la altura máxima que alcanza, se obtiene el instante de tiempo en el que la velocidad del cuerpo es nula:

ec4 = vecVSol == {0, 0}

resp4 = Solve[ec4, t]

tcrítico = t /. resp4[[1]]

El tiempo crítico obtenido se sustituye en la componente en y del vector de posición vecRSol :

y_{max} = vecRSol[[2]] /. t → tcrítico

Se calcula la posición de la pelota cuando $t_3 = 6$ s:

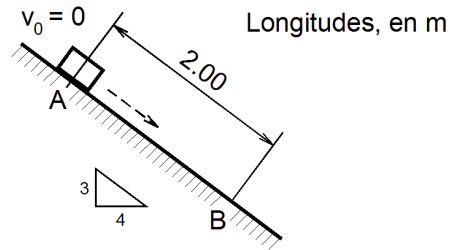
y3 = vecRSol[[2]] /. t → t3

Se calcula la distancia recorrida como la suma de lo que subió la pelota más lo que bajó:

distRecorrida = y_{max} + (y_{max} - y3)

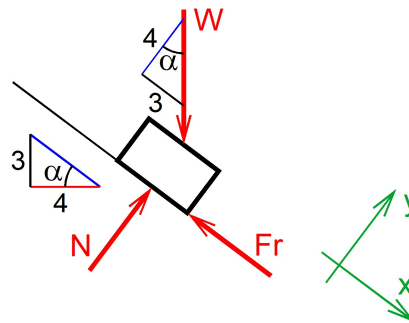
Ejercicio 5

En la figura se muestra un bloque que se suelta en A del reposo sobre el plano inclinado.



Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es $\mu_k = 0.25$, determine la rapidez del bloque en el instante en que éste bajó 2 m.

Diagrama de cuerpo libre del bloque:



Nota: con base en el teorema de ángulo entre perpendiculares, se puede verificar que el ángulo que forma la horizontal con el plano inclinado, α , es igual al ángulo que forma la vertical con la normal a dicho plano inclinado.

Representación vectorial de las fuerzas:

$$\vec{vFr} = \{-Fr, 0\}$$

$$\vec{vN} = \{0, N\}$$

$$\vec{W} = m g \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right\}$$

La resultante, o suma de fuerzas, es:

$$\vec{R} = \vec{vFr} + \vec{vN} + \vec{W}$$

$$\vec{R} = \{-Fr, 0\} + \{0, N\} + \left\{ \frac{3}{5} m g, -\frac{4}{5} m g \right\}$$

$$\vec{R} = \left\{ \frac{3}{5} m g - Fr, N - \frac{4}{5} m g \right\}$$

Se sustituye en la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$\vec{R} = m \vec{a}$$

En este caso, el vector aceleración sólo tiene componente en x:

$$\vec{a} = \{a_x, 0\}$$

Entonces, la ecuación queda:

$$\left\{ \frac{3}{5} m g - Fr, N - \frac{4}{5} m g \right\} = m \{a_x, 0\}$$

De la ecuación vectorial anterior se pueden establecer las siguientes expresiones escalares:

$$\frac{3}{5} m g - Fr = m a_x$$

$$N - \frac{4}{5} m g = 0$$

De la segunda ecuación se obtiene:

$$N = \frac{4}{5} m g$$

La magnitud de la fuerza de fricción cinética, Fr , puede obtenerse como:

$$Fr = \mu_k N$$

Por consiguiente, sustituyendo el valor de la magnitud de la normal:

$$Fr = \mu_k \frac{4}{5} m g$$

$$Fr = 0.25 \frac{4}{5} m g$$

$$Fr = 0.2 m g$$

Entonces, si se sustituye el último valor en la primera ecuación escalar:

$$0.6 m g - 0.2 m g = m a_x$$

$$m a_x = 0.4 m g$$

$$a_x = 0.4 g$$

$$a_x = 3.924 \frac{m}{s^2}$$

Primer procedimiento

A partir del valor de la aceleración, con base en su definición puede obtenerse la rapidez del bloque:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_x dt = dv_x$$

$$3.924 dt = dv_x$$

$$\int_{t_0}^t 3.924 dt = \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x$$

Para este problema las condiciones iniciales son que cuando inicia el movimiento del cuerpo en el instante $t_0 = 0$ s, el bloque se suelta del reposo, es decir, $v_{x0} = 0 \frac{m}{s}$, por lo cual:

$$\int_0^t 3.924 dt = \int_0^{v_x} dv_x$$

$$3.924 t \Big|_0^t = v_x \Big|_0^{v_x}$$

$$3.924 t - 0 = v_x - 0$$

$$v_x = 3.924 t$$

A partir de la rapidez en x , v_x , se puede obtener la posición x , con base en la definición de rapidez:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_x dt = dx$$

$$3.924 t dt = dx$$

$$\int_0^t 3.924 t dt = \int_{x_0}^x dx$$

donde la posición inicial se establece en $x_0 = 0$:

$$3.924 \frac{t^2}{2} \Big|_0^t = x \Big|_0^x$$

$$1.962 t^2 - 0 = x - 0$$

$$x = 1.962 t^2$$

Puede calcularse el tiempo que transcurre para que el bloque recorra $x_f = 2$ m:

$$x_f = 1.962 t_f^2$$

$$2 = 1.962 t_f^2$$

$$1.962 t_f^2 = 2$$

$$t_f^2 = \frac{2}{1.962}$$

$$t_f^2 = 1.019$$

$$t_f = \sqrt{1.019}$$

$$t_f = 1.010 \text{ s}$$

Y en ese instante, se puede calcular la rapidez a la que se mueve el bloque:

$$v_{x,f} = 3.924 t_f$$

$$v_{x,f} = 3.924 (1.010)$$

$$v_{x,f} = 3.962 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La rapidez del bloque en el instante en que éste bajó 2 m es:

$$v_{x,f} = 3.962 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Segundo procedimiento

Debido a que en este problema no interviene la variable de tiempo, es posible aplicar una definición alternativa de aceleración, considerando que la rapidez v_x es una función de la posición x , con base en la denominada regla de la cadena.

Dado que:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Como:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

Por consiguiente, para este problema:

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = 3.924$$

Luego de separar variables:

$$v_x dv_x = 3.924 dx$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x = \int_{x_0}^x 3.924 dx$$

Las condiciones iniciales son: para $x_0 = 0$, $v_{x0} = 0$. Entonces:

$$\left[\frac{1}{2} v_x^2 \right]_0^{v_x} = 3.924 x \Big|_0^x$$

$$\frac{1}{2} v_x^2 = 3.924 x$$

$$v_x^2 = (2) (3.924) x$$

$$v_x = \sqrt{7.848 x}$$

Finalmente, si $x_f = 2$ m:

$$v_{xf} = \sqrt{(7.848)(2)}$$

$$v_{xf} = \sqrt{15.696}$$

$$v_{xf} = 3.962 \frac{m}{s}$$

Resultado que corresponde exactamente al mismo que el del primer procedimiento.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

$$\mu k = 0.25;$$

$$x_f = 2;$$

$$g = 9.81;$$

Representación vectorial de las fuerzas:

$$vN = \{0, N\}$$

$$vFr = \{-Fr, 0\}$$

$$W = m g \left\{ \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right\}$$

Aplicación de la segunda ley de Newton:

$$ec1 = W + vN + vFr == m a$$

La aceleración sólo tiene componente en x:

$$a = \{ax, 0\}$$

$$Fr = \mu k N$$

$$resp1 = \text{Solve}[ec1, \{ax, N\}]$$

$$axSol = ax /. resp1[[1]]$$

Primer procedimiento

Dado que $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $dv_x = a_x dt$, entonces:

$$ec2 = \int_0^{vx} dv_x == \int_0^t axSol dt$$

$$resp2 = \text{Solve}[ec2, vx]$$

$$vxSol = vx /. resp2[[1]]$$

De forma similar, $v_x = \frac{dx}{dt}$, por tanto $dx = v_x dt$, integrando ambos miembros queda:

$$ec3 = \int_0^x dx = \int_0^t vxSol dt$$

resp3 = Solve[ec3, x]

xSol = x /. resp3[[1]]

Cuando el bloque recorrió 2 m, en tiempo transcurrido será:

$$ec4 = xSol == xf$$

resp4 = Solve[ec4]

tSol = t /. resp4[[2]]

Se sustituye el tiempo obtenido en la expresión de la rapidez v_x :

$$vf1 = vxSol /. t \rightarrow tSol$$

Segundo procedimiento

Dado que $a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$, $v_x dv_x = a_x dx$, entonces:

$$ec5 = \int_0^{vx} v_x dv_x = \int_0^x axSol dx$$

resp5 = Solve[ec5, vx]

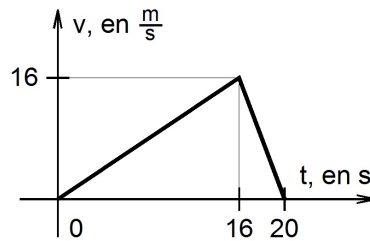
vxSol = vx /. resp5[[2]]

Cuando el bloque recorrió 2 m, su rapidez será:

$$vf2 = vxSol /. x \rightarrow xf$$

Ejercicio 6

Luego de medir la rapidez de una motocicleta durante 20 s, se obtuvo la gráfica que se muestra en la figura.



Si la masa de dicha motocicleta incluyendo al conductor es de 150 kg, dibuje las gráficas de su aceleración así como de la fuerza aplicada a la rueda motriz.

En caso de que la misma motocicleta parte del reposo y se le aplica una fuerza a su rueda motriz de 225 N de 0 a 10 s, posteriormente no se le aplica ninguna fuerza de 10 a 15 s y finalmente se le frena con una fuerza de 525 N hasta que se detiene, dibuje la gráfica de su aceleración y su rapidez con respecto al tiempo, despreciando la resistencia del aire.

Para el caso anterior, calcule el tiempo que la motocicleta permanece en movimiento.

Con base en la definición de aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Se puede obtener la aceleración de la motocicleta derivando la función de la rapidez mostrada en la figura anterior, la cual, dado que la gráfica está formada por dos rectas, se procede a obtener sus ecuaciones.

En el intervalo de $0 \leq t \leq 16$, dado que directamente se puede obtener la ordenada al origen de la recta, y la ecuación en este caso es:

$$y = m x + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b su ordenada al origen, para esta recta en términos de t como variable independiente y v como variable dependiente:

$$m_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}$$

$$m_1 = \frac{16-0}{16-0}$$

$$m_1 = 1$$

$$b_1 = 0$$

Por tanto:

$$v_1 = t$$

Por consiguiente:

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt}$$

$$a_1 = 1 \frac{m}{s^2}$$

En el intervalo de $16 < t \leq 20$, a partir de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Si se considera que los puntos 1 y 2 son:

$$P_1(16, 16)$$

$$P_2(20, 0)$$

La ecuación de la recta queda, para las variables t y v :

$$v_2 - 16 = \frac{0-16}{20-16} (t - 16)$$

$$v_2 = \frac{-16}{4} (t - 16) + 16$$

$$v_2 = -4 (t - 16) + 16$$

$$v_2 = -4 t + 64 + 16$$

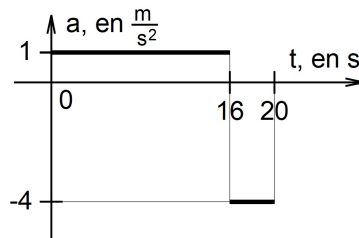
$$v_2 = -4 t + 80$$

De donde:

$$a_2 = -4 \frac{m}{s^2}$$

Como se puede observar, la derivada de la rapidez resulta ser la pendiente de la recta en el intervalo considerado, por lo que se puede calcular la aceleración simplemente con la obtención de la pendiente de la gráfica de rapidez vs. tiempo, sin necesidad de obtener la ecuación de la recta.

Gráfica de la aceleración de la motocicleta con respecto al tiempo



Ahora, con base en la segunda ley de Newton, la fuerza de tracción se puede obtener como el producto de la masa de la motocicleta multiplicada por la aceleración.

Dado que la masa de dicha motocicleta incluyendo al conductor es de 150 kg, se puede calcular la fuerza de tracción multiplicando la aceleración y la masa.

En el intervalo de $0 \leq t \leq 16$:

$$F_1 = m a_1$$

$$F_1 = (150) (1)$$

$$F_1 = 150 \text{ N}$$

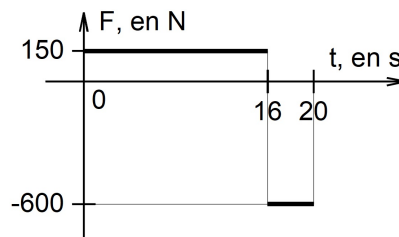
Y en el intervalo de $16 < t \leq 20$:

$$F_2 = m a_2$$

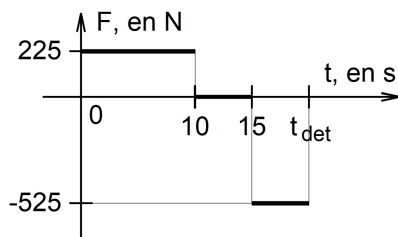
$$F_2 = (150) (-4)$$

$$F_2 = -600 \text{ N}$$

Gráfica de la fuerza de tracción del automóvil deportivo con respecto al tiempo



Para la segunda parte del problema, conviene visualizar la fuerza de tracción aplicada a la fuerza dibujando la gráfica correspondiente, tal que sea de 225 N de 0 a 10 s, posteriormente de 10 a 15 s es cero y, finalmente, en el intervalo $t > 15$ s la fuerza es de -525 N hasta que se detiene.



A partir de la gráfica anterior se puede obtener la gráfica de la aceleración, luego de dividir la magnitud de la fuerza por la masa.

En el intervalo $0 \leq t \leq 10$:

$$F_1 = 225 \text{ N}$$

$$a_1 = \frac{F_1}{m}$$

$$a_1 = \frac{225}{150}$$

$$a_1 = 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

En el intervalo $10 < t \leq 15$:

$$F_2 = 0$$

$$a_2 = 0$$

Y en el intervalo $15 < t \leq t_{\text{det}}$:

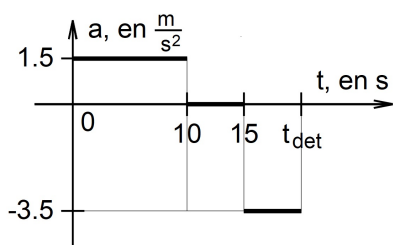
$$F_3 = -525 \text{ N}$$

$$a_3 = \frac{F_3}{m}$$

$$a_3 = \frac{-525}{150}$$

$$a_3 = -3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Entonces, la gráfica de la aceleración de la motocicleta con respecto al tiempo es:



A partir de la aceleración, con base en su definición como $a = \frac{dv}{dt}$, se puede obtener la rapidez, resolviendo la ecuación diferencial anterior.

Para $0 \leq t \leq 10$:

$$a_1 = 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{dv_1}{dt} = 1.5$$

$$dv_1 = 1.5 dt$$

Por lo que:

$$\int_0^{v_1} dv_1 = \int_0^t 1.5 dt$$

$$v_1 \Big|_0^{v_1} = 1.5 t \Big|_0^t$$

$$v_1 = 1.5 t$$

Entonces, para $t = 10$ s:

$$v_1(t = 10) = (1.5)(10)$$

$$v_1(t = 10) = 15 \frac{m}{s}$$

Luego, para $10 < t \leq 15$:

$$a_2 = 0$$

Las condiciones “iniciales” de este intervalo son, en $t = 10$ s $v_2(t = 10) = 15 \frac{m}{s}$, por lo que:

$$\frac{dv_2}{dt} = 0$$

$$dv_2 = 0 dt$$

$$\int_{15}^{v_2} dv_2 = \int_{10}^t 0 dt$$

$$v_2 \Big|_{15}^{v_2} = 0$$

$$v_2 - 15 = 0$$

$$v_2 = 15 \frac{m}{s}$$

Es decir, la rapidez permanece constante en todo el intervalo.

Finalmente, para $15 < t \leq t_{\text{det}}$:

$$a_3 = -3.5 \frac{m}{s^2}$$

Y sus condiciones “iniciales” son, para $t = 15$ s $v_3(t = 15) = 15 \frac{m}{s}$; entonces:

$$\frac{dv_3}{dt} = -3.5$$

$$dv_3 = -3.5 dt$$

$$\int_{15}^{v_3} dv_3 = \int_{15}^t -3.5 dt$$

$$v_3 \Big|_{15}^{v_3} = -3.5 t \Big|_{15}^t$$

$$v_3 - 15 = -3.5 t - [(-3.5)(15)]$$

$$v_3 = -3.5 t - (-52.5) + 15$$

$$v_3 = -3.5 t + 67.5$$

Para calcular el instante de tiempo en el que se detiene la motocicleta, se iguala a cero la expresión de la rapidez v_3 :

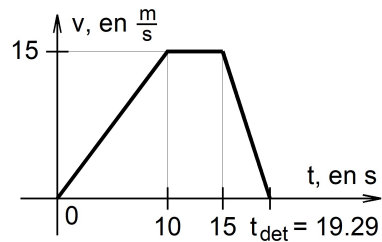
$$0 = -3.5 t_{\text{det}} + 67.5$$

$$3.5 t_{\text{det}} = 67.5$$

$$t_{\text{det}} = \frac{67.5}{3.5}$$

$$t_{\text{det}} = 19.29 \text{ s}$$

La gráfica de la rapidez de la motocicleta con respecto al tiempo, bajo las condiciones consideradas es:



De la gráfica anterior, se puede observar que el tiempo que la motocicleta permanece en movimiento es de:

$$t_{mov} = 19.29 \text{ s}$$

El tiempo que la motocicleta permanece en movimiento es:

$$t_{mov} = 19.29 \text{ s.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 150;
Δt1 = 16;
Δv1 = 16;
b1 = 0;
t11 = 16;
v11 = 16;
t12 = 20
v12 = 0;
```

Ecuaciones de la rapidez con respecto al tiempo, así como la aceleración

En el intervalo $0 \leq t \leq 16$:

```
m1 = Δv1 / Δt1
v1Sol = m1 t + b1
a1 = D[v1Sol, t]
```

En el intervalo $16 < t \leq 20$:

```
ec1 = v2 - v11 ==  $\frac{v12 - v11}{t12 - t11} (t - t11)$ 
resp1 = Solve[ec1]
v2Sol = v2 /. resp1[[1]]
a2 = D[v2Sol, t]
```

Gráfica de la aceleración de la motocicleta con respecto al tiempo:

```
acel1 = { a1 t >= 0 && t <= 16
         a2 t > 16 && t <= 20 }
Plot[acel1, {t, 0, 20}]
```

Cálculo y gráfica de la fuerza aplicada a la rueda motriz de la motocicleta:

```
F1 = m a1
F2 = m a2
Fza1 = { F1 t >= 0 && t <= 16
        F2 t > 16 && t <= 20 }
Plot[Fza1, {t, 0, 20}]
```

Definición y gráfica de la fuerza aplicada a la rueda motriz de la segunda parte:

```
tdet = 20; (* Suponiendo que tdet = 20 *)
F1 = 225;
F2 = 0;
F3 = -525;
Fza2 = { F1 t >= 0 && t <= 10
        F2 t > 10 && t <= 15
        F3 t > 15 && t <= tdet }
Plot[Fza2, {t, 0, tdet}]
```

Cálculo y gráfica de la aceleración de la motocicleta con respecto al tiempo:

```
a1 =  $\frac{F1}{m}$ 
a2 =  $\frac{F2}{m}$ 
a3 =  $\frac{F3}{m}$ 
acel2 = { a1 t >= 0 && t <= 10
         a2 t > 10 && t <= 15
         a3 t > 15 && t <= tdet }
```

```
Plot[acel2, {t, 0, tdet}]
```

Obtención de la función de la rapidez de la motocicleta con respecto al tiempo:

Para el intervalo $0 \leq t \leq 10$, dado que $a_1 = \frac{dv_1}{dt}$, $a_1 dt = dv_1$:

```
ec2 = Integrate[a1 dt, {t, 0, t}] == Integrate[dv1, {v1, 0, v1}]
resp2 = Solve[ec2, v1]
v1Sol = v1 /. resp2[[1]]
v1f = v1Sol /. t -> 10
```

Para el intervalo $10 \leq t \leq 15$, dado que $a_2 = \frac{dv_2}{dt}$, $a_2 dt = dv_2$:

```
ec3 = Integrate[a2 dt, {t, 10, t}] == Integrate[dv2, {v2, v1f, v2}]
resp3 = Solve[ec3, v2]
v2Sol = v2 /. resp3[[1]]
v2f = v2Sol /. t -> 15
```

Para el intervalo $15 \leq t \leq tdet$, dado que $a_3 = \frac{dv_3}{dt}$, $a_3 dt = dv_3$:

```
Clear[t]
ec4 = Integrate[a3 dt, {t, 15, t}] == Integrate[dv3, {v3, v2f, v3}]
resp4 = Solve[ec4, v3]
v3Sol = v3 /. resp4[[1]]
ec5 = v3Sol == 0
resp5 = Solve[ec5]
tdetSol = t /. resp5[[1]] // N
```

Definición y gráfica de la rapidez de la motocicleta con respecto al tiempo:

```
vel2 = {
  v1Sol t >= 0 && t <= 10
  v2Sol t > 10 && t <= 15
  v3Sol t > 15 && t <= tdetSol
}
Plot[vel2, {t, 0, tdetSol}]
```

Tiempo que la motocicleta permanece en movimiento:

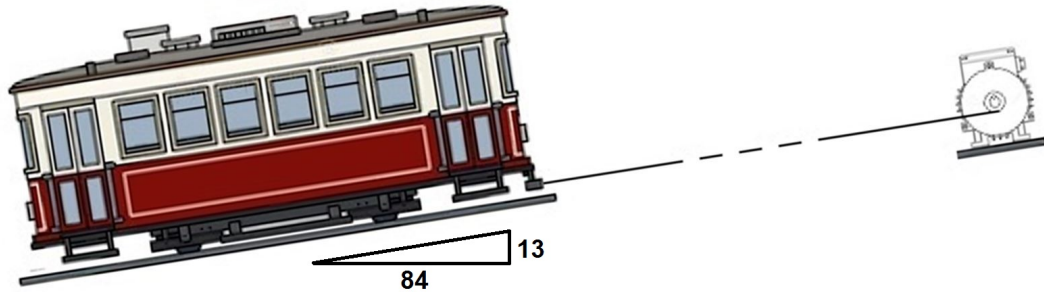
```
tmov = tdetSol
```

Ejercicio 7

El tranvía de 17,000 lb es jalado durante 3 s por un cable cuya fuerza tiene la siguiente expresión:

$$F(t) = 900 t^2 + 1000$$

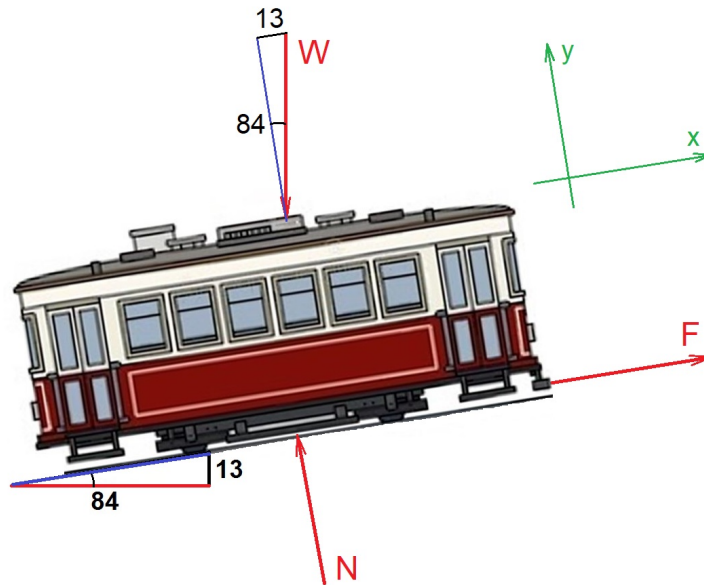
donde la fuerza está en lb y el tiempo en segundos.



Si en $t = 0$ la rapidez del tranvía es hacia arriba del plano inclinado con una magnitud $v_0 = 12 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$, despreciando la fricción de las ruedas con los rieles y la resistencia del aire, determine:

- la rapidez del tranvía en $t = 0.5$ y $t = 3$ s;
- la distancia recorrida por el tranvía en el intervalo de $0 \leq t \leq 3$ s.

Primero, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del tranvía:



Luego, se obtiene la representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el tranvía:

$$\vec{F} = \{F(t), 0\}$$

$$\vec{N} = \{0, N\}$$

Para obtener el vector unitario del peso, primero se obtiene la longitud de la hipotenusa del triángulo de la pendiente:

$$\text{hip} = \sqrt{13^2 + 84^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{169 + 7056}$$

$$\text{hip} = \sqrt{7225}$$

$$\text{hip} = 85$$

De donde:

$$\vec{e}_W = \left\{ -\frac{13}{85}, -\frac{84}{85} \right\}$$

$$\vec{W} = W \left\{ -\frac{13}{85}, -\frac{84}{85} \right\}$$

Luego de sustituir los datos del problema:

$$\vec{F} = \{900 t^2 + 1000, 0\}$$

$$\vec{W} = 17,000 \left\{ -\frac{13}{85}, -\frac{84}{85} \right\}$$

$$\vec{W} = \{-2600, -16,800\} \text{ lb}$$

Se obtiene la resultante:

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{W}$$

$$\vec{R} = \{900 t^2 + 1000, 0\} + \{0, N\} + \{-2600, -16,800\}$$

$$\vec{R} = \{900 t^2 + 1000 - 2600, N - 16,800\}$$

Posteriormente, se establece la expresión para la segunda ley de Newton:

$$\vec{R} = m \vec{a}$$

$$\{900 t^2 + 1000 - 2600, N - 16,800\} = \frac{17,000}{32.2} \{a_x, 0\}$$

Se despeja la aceleración, a_x :

$$\frac{17,000}{32.2} a_x = 900 t^2 - 1600$$

$$a_x = \frac{900(32.2)}{17,000} t^2 - \frac{1600(32.2)}{17,000}$$

$$a_x = 1.705 t^2 - 3.031$$

Con base en la definición de aceleración:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 1.705 t^2 - 3.031$$

$$dv_x = (1.705 t^2 - 3.031) dt$$

$$\int_{v_{x0}}^x dv_x = \int_{t_0}^t (1.705 t^2 - 3.031) dt$$

Dado que la condición inicial para $t = 0$ s es $v_{x0} = 12 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$:

$$v_x \Big|_{12}^{v_x} = \left(\frac{1.705}{3} t^3 - 3.031 t \right) \Big|_0^t$$

$$v_x - 12 = \frac{1.705}{3} t^3 - 3.031 t - 0$$

$$v_x = 0.5682 t^3 - 3.031 t + 12$$

a) la rapidez del tranvía en $t = 0.5$ y $t = 3$ s

Para $t = 0.5$ s:

$$v_x(t = 0.5) = 0.5682 (0.5)^3 - 3.031 (0.5) + 12$$

$$v_x(t = 0.5) = 0.5682 (0.125) - 1.515 + 12$$

$$v_x(t = 0.5) = 0.07103 + 10.485$$

$$v_x(t = 0.5) = 10.56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para $t = 3$ s:

$$v_x(t = 3) = 0.5682 (3)^3 - 3.031 (3) + 12$$

$$v_x(t = 3) = 0.5682 (27) - 9.093 + 12$$

$$v_x(t = 3) = 15.34 - 9.093 + 12$$

$$v_x(t = 3) = 18.25 \frac{m}{s}$$

La rapidez del tranvía en $t = 0.5$ y $t = 3$ s es:

$$v_x(t = 0.5) = 10.69 \frac{m}{s} \text{ y } v_x(t = 3) = 18.25 \frac{m}{s}.$$

b) la distancia recorrida por el tranvía en el intervalo de $0 \leq t \leq 3$ s

Para resolver este inciso, a partir de la ecuación de la rapidez y con base en su definición:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Por tanto:

$$\frac{dx}{dt} = 0.5682 t^3 - 3.031 t + 12$$

Se separan las variables:

$$dx = (0.5682 t^3 - 3.031 t + 12) dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (0.5682 t^3 - 3.031 t + 12) dt$$

Como conviene establecer la condición inicial de la posición $x = 0$ para $t = 0$:

$$x \Big|_0^x = \left(\frac{0.5682}{4} t^4 - \frac{3.031}{2} t^2 + 12t \right) \Big|_0^t$$

$$x - 0 = 0.1421 t^4 - 1.516 t^2 + 12t - 0$$

$$x = 0.1421 t^4 - 1.516 t^2 + 12t$$

Se puede verificar que para $t = 0$:

$$x(t = 0) = 0.1421 (0)^4 - 1.516 (0)^2 + 12 (0)$$

$$x(t = 0) = 0$$

Y para $t = 3$:

$$x(t = 3) = 0.1421 (3)^4 - 1.516 (3)^2 + 12 (3)$$

$$x(t = 3) = 0.1421 (81) - 1.516 (9) + 36$$

$$x(t = 3) = 11.51 - 13.64 + 36$$

$$x(t = 3) = 33.87 \text{ ft}$$

Para obtener la distancia recorrida en el intervalo $0 \leq t \leq 3$ s, es necesario verificar si la función de la posición x es siempre creciente, decreciente o existen puntos críticos dentro de dicho intervalo. Los puntos críticos son aquellos puntos para los cuales la derivada de la posición es igual a cero, es decir, los puntos para los que la rapidez v_x es cero:

$$v_x = 0$$

$$0.5682 t^3 - 3.031 t + 12 = 0$$

Se puede observar que en el intervalo considerado el término negativo es siempre menor de 12, por lo que se puede asegurar que la rapidez es siempre positiva en dicho intervalo, por lo que no existen puntos críticos en este.

Entonces, se puede asegurar que la función x es siempre creciente, con base en los resultados previos de $x(t = 0)$ y $x(t = 3)$.

Por consiguiente, la distancia recorrida por el tranvía en el intervalo $0 \leq t \leq 3$ s es, simplemente, la diferencia de los valores de posición en los extremos del intervalo:

$$\text{dist} = x(t = 3) - x(t = 0)$$

$$\text{dist} = 33.87 - 0$$

$$\text{dist} = 33.87 \text{ ft}$$

La distancia recorrida por el tranvía en el intervalo $0 \leq t \leq 3$ s es:

$$\text{dist} = 33.87 \text{ ft.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

$$W = 17000;$$

$$g = 32.2;$$

$$F[t] = 900 t^2 + 1000;$$

$$\Delta y = 13;$$

$$\Delta x = 84;$$

$$v_0 = 12;$$

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el tranvía

$$F = \{F[t], 0\}$$

$$vN = \{0, N\}$$

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$eW = \left\{ -\frac{\Delta y}{\text{hip}}, -\frac{\Delta x}{\text{hip}} \right\}$$

$$vW = W eW$$

Cálculo de la resultante y aplicación de la segunda ley de Newton para la obtención de la aceleración:

$$R = F + vN + vW$$

$$m = \frac{W}{g}$$

$$ec1 = R == m \{ax, 0\}$$

$$\text{resp1} = \text{Solve}[ec1, \{ax, N\}]$$

$$axSol = ax /. \text{resp1}[[1]]$$

Dada la definición de aceleración, $axSol = \frac{d vx}{dt}$, $axSol dt = d vx$, por tanto:

$$ec2 = \int_0^t axSol dt == \int_{v0}^{vx} d vx$$

`resp2 = Solve[ec2, vx]`

`vxSol = vx /. resp2[[1]]`

a) la rapidez del tranvía en $t = 0.5$ y $t = 3$ s

`vxEn0p5 = vxSol /. t -> 0.5`

`vxEn3 = vxSol /. t -> 3`

b) la distancia recorrida por el tranvía en el intervalo de $0 \leq t \leq 3$ s

Con base en la definición de rapidez, $vxSol = \frac{dx}{dt}$, de donde $vxSol dt = dx$, entonces:

$$ec3 = \int_0^t vxSol dt == \int_0^x dx$$

`resp3 = Solve[ec3, x]`

`xSol = x /. resp3[[1]]`

Posición del tranvía en los extremos del intervalo considerado:

`xEn0 = xSol /. t -> 0`

`xEn3 = xSol /. t -> 3`

Gráfica de la rapidez en el intervalo $0 \leq t \leq 3$, para verificar la existencia de puntos críticos:

`Plot[vxSol, {t, 0, 3}]`

No existen puntos críticos para los cuales $v_x = 0$, por lo que la función de posición x es siempre creciente

Cálculo de la distancia recorrida:

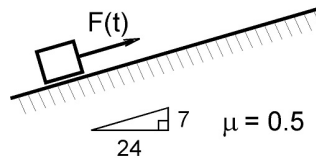
`dist = xEn3 - xEn0`

Ejercicio 8

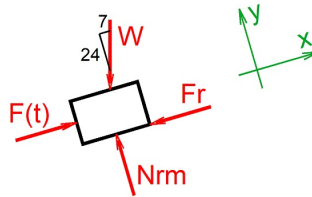
El bloque que se muestra en la figura, tiene un peso $W = 50 \text{ N}$, parte del reposo en $t = 0 \text{ s}$, y se somete a la acción de una fuerza $F(t) = 19 t$, donde $F(t)$ está en N, para un tiempo t en s.

El coeficiente de fricción entre las superficies en contacto, tanto estática como cinética, es de $\mu = 0.5$.

Determine la distancia recorrida por el bloque 4 segundos después de que se empezó a aplicar la fuerza.



Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre del cuerpo:



Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\overline{F(t)} = \{F(t), 0\}$$

$$\overline{F(t)} = \{19 t, 0\}$$

$$\overline{Fr} = \{-Fr, 0\}$$

$$\overline{N} = \{0, Nrm\}$$

Para determinar el vector unitario del peso, se requiere calcular el valor de la hipotenusa de su triángulo de pendiente:

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{(24)^2 + (7)^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{576 + 49}$$

$$\text{hip} = \sqrt{625}$$

$$\text{hip} = 25$$

$$\overline{W} = 50 \left\{ -\frac{7}{25}, -\frac{24}{25} \right\}$$

$$\overline{W} = \{-14, -48\} \text{ N}$$

Aplicación de la segunda ley de Newton:

$$\overline{F(t)} + \overline{Fr} + \overline{N} + \overline{W} = m \overline{a}$$

$$\{19 t, 0\} + \{-Fr, 0\} + \overline{N} = \{0, Nrm\} + \{-14, -48\} = \frac{50}{9.81} \{a_x, 0\}$$

$$\{19 t - Fr - 14, Nrm - 48\} = 5.097 \{a_x, 0\}$$

de donde:

$$19 t - Fr - 14 = 5.097 a_x$$

$$N_{rm} - 48 = 0$$

De la última expresión:

$$N_{rm} = 48 \text{ N}$$

En caso de que el cuerpo esté en movimiento, la fuerza de fricción será cinética, por tanto:

$$Fr = \mu N_{rm}$$

sustituyendo valores conocidos:

$$Fr = 0.5 (48)$$

$$Fr = 24 \text{ N}$$

La componente x de la ecuación queda:

$$19 t - 24 - 14 = 5.097 a_x$$

$$19 t - 38 = 5.097 a_x$$

Por consiguiente, la aceleración del bloque es:

$$a_x = \frac{19}{5.097} t - \frac{38}{5.097}$$

$$a_{xA} = 3.728 t - 7.456$$

Como se puede verificar, para $t = 0 \text{ s}$, $a_{xA} = -7.456$, es negativa, lo cual es incongruente.

Esto es porque se supuso que el cuerpo se iba a mover hacia la derecha, lo cual implica una fuerza de fricción cinética hacia la izquierda.

La situación que se presenta es que la fuerza de fricción es estática y, por tanto, variable, cuyo valor es el necesario para que el cuerpo no se mueva, en tanto dicha fuerza alcance su valor límite o máximo, y a partir de ese momento se empieza a mover hacia la derecha, es decir, el cuerpo se empieza a mover cuando la aceleración se haga positiva.

Dado que no se cuenta con el coeficiente de fricción estática, se considerará que es igual al coeficiente de fricción cinética, en cuyo caso la fuerza de fricción límite es:

$$Fr' = \mu N$$

$$Fr' = 0.5 (48)$$

$$Fr' = 24 \text{ N}$$

Entonces, cuando $F(t)$ sea igual a la diferencia de la fuerza de fricción límite más la componente en x del peso, la aceleración sea positiva, el cuerpo se empezará a mover:

$$F(t) = Fr' + W_x$$

$$F(t) = 24 + 14$$

$$19 t = 38$$

$$t = \frac{38}{19}$$

$$t = 2.0 \text{ s}$$

Por consiguiente, para el intervalo de movimiento de $2 \leq t \leq 4 \text{ s}$, la aceleración es:

$$a_{xA} = 3.728 t - 7.456$$

Con base en la definición de aceleración:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 3.728 t - 7.456$$

$$dv_x = (3.728 t - 7.456) dt$$

Se integran ambos miembros de la ecuación con base en las condiciones iniciales, para $t = 2$ s

la rapidez es $v_{x0} = 0$:

$$\int_0^{v_{xA}} dv_x = \int_2^t (3.728 t - 7.456) dt$$

$$v_x \Big|_0^{v_x} = \left(\frac{3.728}{2} t^2 - 7.456 t \right) \Big|_2^t$$

$$v_x = 1.864 t^2 - 7.456 t - [1.864 (2)^2 - 7.456 (2)]$$

$$v_{xA} = 1.864 t^2 - 7.456 t - [1.864 (4) - 14.91]$$

$$v_{xA} = 1.864 t^2 - 7.456 t - (7.456 - 14.91)$$

$$v_{xA} = 1.864 t^2 - 7.456 t - (-7.456)$$

$$v_{xA} = 1.864 t^2 - 7.456 t + 7.456$$

Para obtener la expresión de la posición del cuerpo, con base en la definición de rapidez:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1.864 t^2 - 7.456 t + 7.456$$

$$dx = (1.864 t^2 - 7.456 t + 7.456) dt$$

Luego de integrar ambos miembros de la ecuación, considerando que para $t = 2.5$ s $x_A = 0$:

$$\int_0^x dx = \int_2^t (1.864 t^2 - 7.456 t + 7.456) dt$$

$$x \Big|_0^x = \left(\frac{1.864}{3} t^3 - \frac{7.456}{2} t^2 + 7.456 t \right) \Big|_2^t$$

$$x = 0.6213 t^3 - 3.728 t^2 + 7.456 t - [0.6213 (2)^3 - 3.728 (2)^2 + 7.456 (2)]$$

$$x = 0.6213 t^3 - 3.728 t^2 + 7.456 t - [0.6213 (8) - 3.728 (4) + 14.91]$$

$$x = 0.6213 t^3 - 3.728 t^2 + 7.456 t - (4.971 - 14.91 + 14.91)$$

$$x = 0.6213 t^3 - 3.728 t^2 + 7.456 t - 4.971$$

Entonces, la distancia recorrida 4 s después de aplicar la fuerza es:

$$x_4 = 0.6213 (4)^3 - 3.728 (4)^2 + 7.456 (4) - 4.971$$

$$x_4 = 0.6213 (64) - 3.728 (16) + 29.82 - 4.971$$

$$x_4 = 39.77 - 59.65 + 24.85$$

$$x_4 = 4.970 \text{ m}$$

La distancia recorrida por el bloque 4 s después de aplicar la fuerza es:

$$x_4 = 4.970 \text{ m.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
W = 50;
g = 9.81;
μ = 0.5;
Fdet = 19 t;
Δx = 24;
Δy = 7;
m =  $\frac{W}{g}$ 
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el bloque

```
vFdet = {Fdet, 0}
vFr = {-Fr, 0}
vN = {0, Nrm}
hip =  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 
vW = W  $\left\{ -\frac{\Delta y}{hip}, -\frac{\Delta x}{hip} \right\}$ 
```

Segunda ley de Newton

```
ec1 = vFdet + vFr + vN + vW == m {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {ax, Nrm}]
Nsol = Nrm /. resp1[[1]]
axSol = ax /. resp1[[1]]
Fr = μ Nsol
```

Cuándo se empieza a mover el bloque

```
FrLim = μ Nsol
ec2 = ec1[[1]] == 0
resp2 = Solve[ec2]
tini = t /. resp2[[1]]
```

Expresión de la rapidez del bloque

$$ec3 = \int_0^{vx} dvx \Rightarrow \int_{tini}^t axSol dt$$

`resp3 = Solve[ec3, vx]`

`vxSol = vx /. resp3[[1]]`

Expresión de la posición del bloque

$$ec4 = \int_0^x dx \Rightarrow \int_{tini}^t vxSol dt$$

`resp4 = Solve[ec4, x]`

`xSol = x /. resp4[[1]] // Expand`

Distancia recorrida por el bloque 4 s después de aplicar la fuerza

`x4 = xSol /. t -> 4`

Ejercicio 9

Se coloca un cuerpo con una peso $W = 50 \text{ N}$ sobre un plano inclinado rugoso, tal como se muestra en la figura.

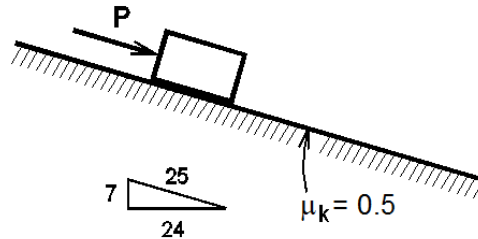


Figura 1 Cuerpo sobre un plano inclinado rugoso.

Si cuando está en reposo se le aplica una fuerza P cuya variación con respecto al tiempo se muestra en la gráfica, determine:

- cuándo se empieza a mover el cuerpo;
- las expresiones de su rapidez y posición a lo largo del plano inclinado;
- la rapidez máxima que alcanza y en qué instante sucede.

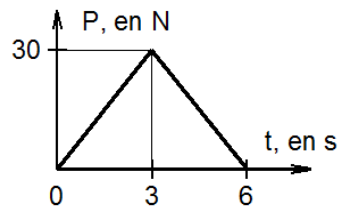
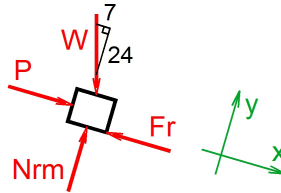


Figura 2 Gráfica de la magnitud de la fuerza P .

Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del cuerpo:



Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\vec{P} = \{P, 0\}$$

$$\vec{Fr} = \{-Fr, 0\}$$

$$\vec{N} = \{0, N\}$$

$$\vec{W} = 50 \left\{ \frac{7}{25}, -\frac{24}{25} \right\}$$

$$\vec{W} = \{14, -48\} \text{ N}$$

Resultante de fuerzas que actúa sobre el cuerpo:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Fr} + \vec{N} + \vec{W}$$

$$\vec{R} = \{P - Fr + 14, N - 48\}$$

Aplicación de la segunda ley de Newton:

$$\bar{R} = m \bar{a}$$

$$\{P - Fr + 14, N - 48\} = m \{a_x, 0\}$$

de donde:

$$P - Fr + 14 = \frac{50}{9.81} a_x$$

$$N - 48 = 0$$

De la última expresión:

$$N = 48 \text{ N}$$

En caso de que el cuerpo esté en movimiento, la fuerza de fricción será cinética, por tanto:

$$Fr_k = \mu_k N$$

sustituyendo valores conocidos:

$$Fr_k = 0.5 (48)$$

$$Fr_k = 24 \text{ N}$$

Entonces, la componente en x de la fuerza resultante, \bar{R} es:

$$R_x = P - 24 + 14$$

$$R_x = P - 10$$

Para el intervalo $0 \leq t \leq 3 \text{ s}$ al que se le identificará como intervalo A, de la gráfica de la magnitud de la fuerza P, su ecuación se puede obtener con base en la ecuación de la recta con pendiente m y ordenada al origen b:

$$y = m x + b$$

En este caso, la variable dependiente es P, la independiente es t, el valor de la pendiente es:

$$m_A = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$m_A = \frac{30}{3}$$

$$m_A = 10$$

Como la recta corta al eje y en el origen, su ordenada al origen es:

$$b_A = 0$$

De donde:

$$P = 10 t$$

La resultante queda entonces como:

$$R_{xA} = 10 t - 10$$

De donde se puede obtener la aceleración del cuerpo:

$$R_{xA} = \frac{50}{9.81} a_{xA}$$

$$5.097 a_{xA} = 10 t - 10$$

$$a_{xA} = \frac{10}{5.097} t - \frac{10}{5.097}$$

$$a_{xA} = 1.962 t - 1.962$$

Si se calcula el valor de esta aceleración cuando $t = 0 \text{ s}$:

$$a_{xA} = 1.962 (0) - 1.962$$

$$a_{xA} = -1.962$$

Se obtiene que la aceleración es negativa, lo cual implica que el cuerpo se empezará a mover hacia atrás, lo cual es una incongruencia.

La razón de esta incongruencia es porque se consideró que el cuerpo se iba a mover hacia arriba, por lo que la fuerza de fricción sería cinética y en sentido contrario al movimiento de dicho cuerpo. Se concluye que en $t = 0$ s el cuerpo está inmóvil, por lo que la fuerza de fricción es estática y su valor debe ser suficiente para que la resultante sea nula, hasta el momento en que se empiece a mover.

Por ejemplo, para $t = 0.5$ s:

$$P = 10 (0.5)$$

$$P = 5 \text{ N}$$

Por tanto, si la fuerza de fricción es estática, su valor se puede obtener estableciendo el valor de la resultante del cuerpo sin moverse, es decir estático, por lo que la aceleración es nula, $a_x = 0$:

$$P - Fr + 14 = m (0)$$

$$5 - Fr + 14 = 0$$

$$Fr = 19 \text{ N}$$

Si se considera que $\mu_s = \mu_k$, dado que la fuerza de fricción límite o máxima es:

$$Fr' = \mu_s N$$

$$Fr' = 0.5 (48)$$

$$Fr' = 24 \text{ N}$$

Como este último valor es mayor que la fricción aplicada al cuerpo, este no se mueve.

a) cuándo se empieza a mover el cuerpo

Para determinar cuándo se empieza a mover el cuerpo, a partir de la expresión de la aceleración con respecto al tiempo, cuando este sea igual a cero implica que la fuerza de fricción tiene exactamente el valor de la fuerza de fricción límite, por lo que un instante después, dado que la fuerza P sigue creciendo, la aceleración tendrá un valor mayor que cero, que indica que el cuerpo se empieza a mover.

$$a_{xA} = 1.962 t - 1.962$$

$$0 = 1.962 t - 1.962$$

$$1.962 t = 1.962$$

$$t = 1 \text{ s}$$

El cuerpo se empieza a mover cuando:

$$t = 1 \text{ s.}$$

b) las expresiones de su rapidez y posición a lo largo del plano inclinado**Intervalo $1 < t \leq 3$ s (intervalo A)**

Dado que el cuerpo se empieza a mover en $t = 1$ s, y la fuerza P cambia en $t = 3$ s, entre estos dos valores se establece el primer intervalo de movimiento.

Entonces, en el intervalo $1 \leq t \leq 3$ s:

$$a_{xA} = 1.962 t - 1.962$$

Con base en la definición de aceleración:

$$a_{xA} = \frac{dv_{xA}}{dt}$$

$$\frac{dv_{xA}}{dt} = 1.962 t - 1.962$$

Luego de separar variables:

$$dv_{xA} = (1.962 t - 1.962) dt$$

Se integran ambos miembros, con base en que las condiciones iniciales son, para $t = 1$ s, $v_{x1} = 0 \frac{m}{s}$:

$$\int_0^{v_{xA}} dv_{xA} = \int_1^t (1.962 t - 1.962) dt$$

$$v_{xA} \Big|_0^{v_{xA}} = \left(\frac{1.962}{2} t^2 - 1.962 t \right) \Big|_1^t$$

$$v_{xA} - 0 = 0.981 t^2 - 1.962 t - [0.981 (1)^2 - 1.962 (1)]$$

$$v_{xA} = 0.981 t^2 - 1.962 t - (0.981 - 1.962)$$

$$v_{xA} = 0.981 t^2 - 1.962 t - (-0.981)$$

$$v_{xA} = 0.981 t^2 - 1.962 t + 0.981$$

Luego, con base en la definición de rapidez:

$$v_{xA} = \frac{dx_A}{dt}$$

$$\frac{dx_A}{dt} = 0.981 t^2 - 1.962 t + 0.981$$

Por tanto:

$$dx_A = (0.981 t^2 - 1.962 t + 0.981) dt$$

Para resolver la ecuación diferencial, se integran ambos miembros, considerando las condiciones iniciales, que son para $t = 1$ s, $x = 0$ m:

$$\int_0^{x_A} dx_A = \int_1^t (0.981 t^2 - 1.962 t + 0.981) dt$$

$$x_A \Big|_0^{x_A} = \left(\frac{0.981}{3} t^3 - \frac{1.962}{2} t^2 + 0.981 t \right) \Big|_1^t$$

$$x_A - 0 = 0.327 t^3 - 0.981 t^2 + 0.981 t - [0.327 (1)^3 - 0.981 (1)^2 + 0.981 (1)]$$

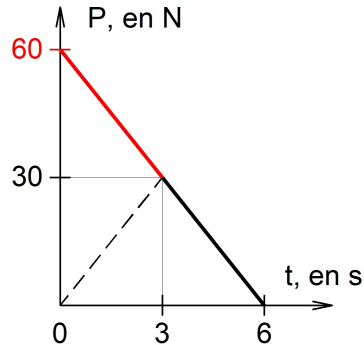
$$x_A = 0.327 t^3 - 0.981 t^2 + 0.981 t - (0.327 - 0.981 + 0.981)$$

$$x_A = 0.327 t^3 - 0.981 t^2 + 0.981 t - (0.327)$$

$$x_A = 0.327 t^3 - 0.981 t^2 + 0.981 t - 0.327$$

Intervalo $3 < t \leq 6$ s (intervalo B)

El análisis del siguiente intervalo, $3 < t \leq 6$, en el que la fuerza P tiene otra ecuación, la cual puede obtenerse considerando que si se prolonga la recta hacia la izquierda, puede verificarse por proporcionalidad que si de 6 a 3 s dicha recta sube 30 N, de 3 a 0 s debe subir otros 30 N, por lo que para $t = 0$ s, $P = 60$ N, tal como se muestra en la siguiente figura:



Entonces, puede considerarse la ecuación de la recta con base en pendiente y ordenada al origen.

La pendiente de esta recta es:

$$m_B = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$m_B = \frac{-30}{3}$$

$$m_B = -10$$

Y su ordenada la origen:

$$b_B = 60$$

Por consiguiente, la ecuación de esta recta es:

$$P = -10 t + 60$$

Entonces, dado que:

$$R_x = P - 10$$

$$R_{xB} = -10 t + 60 - 10$$

$$R_{xB} = -10 t + 50$$

En este intervalo de tiempo, la expresión de la aceleración queda:

$$a_{xB} = \frac{1}{m} R_{xB}$$

$$a_{xB} = -\frac{10}{5.097} t + \frac{50}{5.097}$$

$$a_{xB} = -1.962 t + 9.81$$

Antes de obtener las expresiones de la rapidez y la posición en este intervalo, es necesario determinar las condiciones finales de dichos parámetros en el primer intervalo, que corresponden a las condiciones iniciales de este segundo intervalo.

Por tanto, dado que:

$$v_{xA} = 0.981 t^2 - 1.962 t + 0.981$$

y:

$$x_A = 0.327 t^3 - 0.981 t^2 + 0.981 t - 0.327$$

Para $t = 3$ s, la rapidez es:

$$v_{xAf} = 0.981 (3)^2 - 1.962 (3) + 0.981$$

$$v_{xAf} = 0.981 (9) - 5.886 + 0.981$$

$$v_{xAf} = 8.829 - 4.905$$

$$v_{xAf} = 3.924 \frac{m}{s}$$

Y la posición es:

$$x_{Af} = 0.327 (3)^3 - 0.981 (3)^2 + 0.981 (3) - 0.327$$

$$x_{Af} = 0.327 (27) - 0.981 (9) + 2.943 - 0.327$$

$$x_{Af} = 8.829 - 8.829 + 2.616$$

$$x_{Af} = 2.616 \text{ m}$$

Por consiguiente, las condiciones iniciales del segundo intervalo son:

$$v_{xB0} = v_{xAf}$$

$$v_{xB0} = 3.924 \frac{m}{s}$$

$$x_{B0} = x_{Af}$$

$$x_{B0} = 3.270 \text{ m}$$

Con base en la definición de aceleración:

$$\frac{dv_{xB}}{dt} = -1.962 t + 9.81$$

Entonces:

$$dv_{xB} = (-1.962 t + 9.81) dt$$

De donde:

$$\int_{3.924}^{v_{xB}} dv_{xB} = \int_3^t (-1.962 t + 9.81) dt$$

$$v_{xB} \Big|_{3.924}^{v_{xB}} = \left(-\frac{1.962}{2} t^2 + 9.81 t \right) \Big|_3^t$$

$$v_{xB} - 3.924 = -0.981 t^2 + 9.81 t - [-0.981 (3)^2 + 9.81 (3)]$$

$$v_{xB} = -0.981 t^2 + 9.81 t - (-0.981 (9) + 29.43) + 3.924$$

$$v_{xB} = -0.981 t^2 + 9.81 t - (-8.829 + 29.43) + 3.924$$

$$v_{xB} = -0.981 t^2 + 9.81 t - 20.601 + 3.924$$

$$v_{xB} = -0.981 t^2 + 9.81 t - 16.68$$

En seguida, con base en la definición de rapidez:

$$\frac{dx_B}{dt} = -0.981 t^2 + 9.81 t - 16.68$$

$$dx_B = (-0.981 t^2 + 9.81 t - 16.68) dt$$

$$\int_{3.27}^{x_B} dx_B = \int_3^t (-0.981 t^2 + 9.81 t - 16.68) dt$$

$$x_B \Big|_{2.616}^{x_B} = \left(-\frac{0.981}{3} t^3 + \frac{9.81}{2} t^2 - 16.68 t \right) \Big|_3^t$$

$$x_B - 2.616 = -0.327 t^3 + 4.905 t^2 - 16.68 t - [-0.327 (3)^3 + 4.905 (3)^2 - 16.68 (3)]$$

$$x_B = -0.327 t^3 + 4.905 t^2 - 16.68 t - [-0.327 (27) + 4.905 (9) - 50.03] + 2.616$$

$$x_B = -0.327 t^3 + 4.905 t^2 - 16.68 t - (-8.829 + 44.145 - 50.03) + 2.616$$

$$x_B = -0.327 t^3 + 4.905 t^2 - 16.68 t - (-14.71) + 2.616$$

$$x_B = -0.327 t^3 + 4.905 t^2 - 16.68 t + 17.33$$

Intervalo $t > 6$ s (intervalo C)

En este intervalo, ya no existe la fuerza P o, en otras palabras, $P = 0$, por lo que:

$$R_x = P - 10$$

$$R_{xC} = -10$$

Por consiguiente, la aceleración en este intervalo es:

$$a_{xC} = \frac{1}{m} R_{xC}$$

$$a_{xC} = -\frac{10}{5.097}$$

$$a_{xC} = -1.962$$

Las condiciones iniciales de este intervalo son equivalentes a las condiciones finales del anterior.

Por consiguiente, dado que las expresiones del intervalo anterior son:

$$v_{xB} = -0.981 t^2 + 9.81 t - 16.68$$

$$x_B = -0.327 t^3 + 4.905 t^2 - 16.68 t + 17.33$$

Para $t = 6$ s:

$$v_{xBf} = -0.981 (6)^2 + 9.81 (6) - 16.68$$

$$v_{xBf} = -0.981 (36) + 58.86 - 16.68$$

$$v_{xBf} = -35.316 + 58.86 - 16.68$$

$$v_{xBf} = 6.864 \frac{m}{s}$$

y:

$$x_{Bf} = -0.327 (6)^3 + 4.905 (6)^2 - 16.68 (6) + 17.33$$

$$x_{Bf} = -0.327 (216) + 4.905 (36) - 100.08 + 17.33$$

$$x_{Bf} = -70.63 + 176.58 - 100.08 + 17.33$$

$$x_{Bf} = 23.2 \text{ m}$$

de donde:

$$v_{xC0} = 6.864 \frac{m}{s}$$

$$x_{C0} = 23.2 \text{ m}$$

Nuevamente se sustituye en la expresión de la aceleración su definición en términos de la rapidez:

$$\frac{dv_{xC}}{dt} = a_{xC}$$

$$d v_{xC} = -1.962 dt$$

de donde:

$$\int_{v_{xC0}}^{v_{xC}} d v_{xC} = \int_6^t -1.962 dt$$

$$v_{xC} \Big|_{6.864}^{v_{xC}} = -1.962 t \Big|_6^t$$

$$v_{xC} - 6.864 = -1.962 t - [-1.962 (6)]$$

$$v_{xC} = -1.962 t - (-11.772) + 6.864$$

$$v_{xC} = -1.962 t + 18.636$$

Para determinar la expresión de la posición, con base en la definición de rapidez:

$$\frac{dx_C}{dt} = v_{xC}$$

$$dx_C = (-1.962 t + 18.636) dt$$

$$\int_{x_{C0}}^{x_C} dx_C = \int_6^t (-1.962 t + 18.636) dt$$

$$x_C \Big|_{23.2}^{x_C} = \left(-\frac{1.962}{2} t^2 + 18.636 t \right) \Big|_6^t$$

$$x_C - 23.2 = -0.981 t^2 + 18.636 t - [-0.981 (6)^2 + 18.636 (6)]$$

$$x_C = -0.981 t^2 + 18.636 t - [-0.981 (36) + 111.816] + 23.2$$

$$x_C = -0.981 t^2 + 18.636 t - (-35.316 + 111.816) + 23.2$$

$$x_C = -0.981 t^2 + 18.636 t - (76.5) + 23.2$$

$$x_C = -0.981 t^2 + 18.636 t - 53.3$$

Las expresiones de la rapidez y la posición del cuerpo a lo largo de plano inclinado son:

para $1 \leq t \leq 3$ s:

$$v_{xA} = 0.981 t^2 - 1.962 t + 0.981$$

$$x_A = 0.327 t^3 - 0.981 t^2 + 0.981 t - 0.327$$

para $3 \leq t \leq 6$ s:

$$v_{xB} = -0.981 t^2 + 9.81 t - 16.68$$

$$x_B = -0.327 t^3 + 4.905 t^2 - 16.68 t + 17.33$$

para $t > 6$ s:

$$v_{xC} = -1.962 t + 18.636$$

$$x_C = -0.981 t^2 + 18.636 t - 53.3.$$

Gráfica de la rapidez del cuerpo a lo largo del plano inclinado

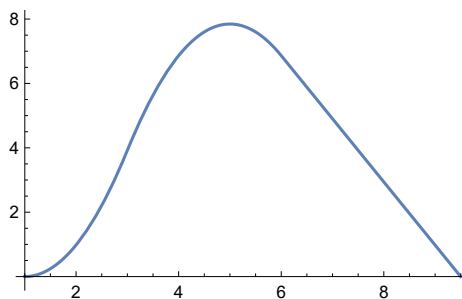
$$ec9 = -1.962 t + 18.636 == 0$$

$$resp9 = \text{Solve}[ec9]$$

$$tdet = t /. resp9[[1]]$$

$$vx = \begin{cases} 0.981 t^2 - 1.962 t + 0.981 & t \geq 1 \ \&\& \ t \leq 3 \\ -0.981 t^2 + 9.81 t - 16.68 & t > 3 \ \&\& \ t \leq 6 \\ -1.962 t + 18.636 & t > 6 \ \&\& \ t \leq tdet \end{cases}$$

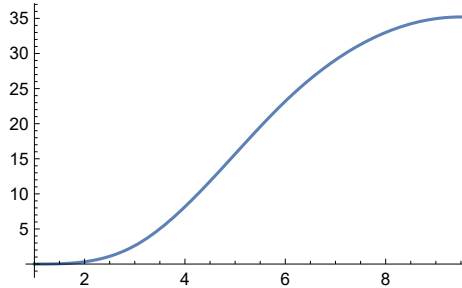
$$\text{Plot}[vx, \{t, 1, tdet\}]$$



Gráfica de la posición del cuerpo a lo largo del plano inclinado

$$x = \begin{cases} 0.327 t^3 - 0.981 t^2 + 0.981 t - 0.327 & t \geq 1 \text{ \& \& } t \leq 3 \\ -0.327 t^3 + 4.905 t^2 - 16.68 t + 17.33 & t > 3 \text{ \& \& } t \leq 6 \\ -0.981 t^2 + 18.636 t - 53.3 & t > 6 \text{ \& \& } t \leq t_{det} \end{cases}$$

Plot[x, {t, 1, tdet}]



c) la rapidez máxima que alcanza y en qué instante sucede

Para determinar la rapidez máxima, es necesario derivar la expresión de la rapidez para encontrar los valores críticos para los cuales se tengan los valores máximos y mínimos.

Entonces, para el intervalo de $1 \leq t \leq 3$ s:

$$v_{xA} = 0.981 t^2 - 1.962 t + 0.981$$

$$\frac{d v_{xA}}{d t} = a_{xA}$$

$$\frac{d v_{xA}}{d t} = 1.962 t - 1.962$$

$$1.962 t_{crit1} - 1.962 = 0$$

$$1.962 t_{crit1} = 1.962$$

$$t_{crit1} = \frac{1.962}{1.962}$$

$$t_{crit1} = 1 \text{ s}$$

Para este momento, la rapidez es mínima, ya que es justo cuando el cuerpo empieza a moverse.

Para el intervalo $3 < t \leq 6$ s:

$$v_{xB} = -0.981 t^2 + 9.81 t - 16.68$$

$$\frac{d v_{xB}}{d t} = a_{xB}$$

$$\frac{d v_{xB}}{d t} = -1.962 t + 9.81$$

$$-1.962 t_{crit2} + 9.81 = 0$$

$$1.962 t_{crit2} = 9.81$$

$$t_{crit2} = \frac{9.81}{1.962}$$

$$t_{crit2} = 5 \text{ s}$$

Por consiguiente, la rapidez máxima se puede calcular valuando la rapidez en el segundo intervalo para un tiempo $t = 5$ s:

$$v_{xB_{\max}} = -0.981(5)^2 + 9.81(5) - 16.68$$

$$v_{xB_{\max}} = -0.981(25) + 49.05 - 16.68$$

$$v_{xB_{\max}} = -24.525 + 49.05 - 16.68$$

$$v_{xB_{\max}} = 7.845 \frac{m}{s}$$

La rapidez máxima del cuerpo y el instante en el que sucede es:

$$v_{xB_{\max}} = 7.845 \frac{m}{s} \text{ en } t = 5 \text{ s.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

$$W = 50;$$

$$g = 9.81;$$

$$\mu_k = 0.5;$$

$$\Delta x = 24;$$

$$\Delta y = 7;$$

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$eW = \left\{ \frac{\Delta y}{\text{hip}}, -\frac{\Delta x}{\text{hip}} \right\}$$

$$vP = \{P, 0\}$$

$$vFr = \{-Fr, 0\}$$

$$vN = \{0, N\}$$

$$vW = W eW$$

Cálculo de la fuerza resultante:

$$R = vP + vFr + vN + vW$$

Segunda ley de Newton:

$$ec1 = R == m \{ax, 0\}$$

$$\text{resp1} = \text{Solve}[ec1, \{ax, N\}]$$

$$Nsol = N /. \text{resp1}[[1]]$$

$$axSol = ax /. \text{resp1}[[1]]$$

$$Frk = \mu_k Nsol$$

Componente en x de la fuerza resultante:

$$R_x = R \cos(\theta) \quad / \cdot F_r \rightarrow F_{rx}$$

Cálculo de la ecuación de P en $0 \leq t \leq 3$ s:

$$m_A = \frac{30}{3}$$

$$b_A = 0$$

$$P_A = m_A t + b_A$$

Cálculo de la aceleración en $0 \leq t \leq 3$ s:

$$m = \frac{W}{g}$$

$$a_{xA} = \frac{1}{m} R_x \quad / \cdot P \rightarrow P_A$$

$$a_{xA} = a_{xA} \quad / \cdot t \rightarrow \theta$$

a) cuándo se empieza a mover el cuerpo

$$ec2 = a_{xA} = 0$$

$$resp2 = \text{Solve}[ec2]$$

$$tini = t \quad / \cdot resp2[[1]]$$

b) las expresiones de su rapidez y posición a lo largo del plano inclinado

Dado que $\frac{dv_{xA}}{dt} = a_{xA}$, $dv_{xA} = a_{xA} dt$, por lo que:

$$ec3 = \int_0^{v_{xA}} dv_{xA} = \int_0^t a_{xA} dt$$

$$resp3 = \text{Solve}[ec3, v_{xA}]$$

$$v_{xA} = v_{xA} \quad / \cdot resp3[[1]]$$

Dado que $\frac{dx_A}{dt} = v_{xA}$, $dx_A = v_{xA} dt$, por lo que:

$$ec4 = \int_0^{x_A} dx_A = \int_0^t v_{xA} dt$$

$$resp4 = \text{Solve}[ec4, x_A]$$

$$x_{A} = x_A \quad / \cdot resp4[[1]] \quad // \text{Expand}$$

Intervalo $3 < t \leq 6$ s (intervalo B)Cálculo de la ecuación de P en $3 \leq t \leq 6$ s:

$$mB = \frac{-30}{3}$$

$$bB = 60$$

$$PB = mB t + bB$$

Cálculo de la aceleración en $3 \leq t \leq 6$ s:

$$a_{xB} = \frac{1}{m} R_x / . P \rightarrow PB$$

Condiciones finales primer intervalo, equivalentes a las condiciones iniciales del segundo:

$$v_{xB0} = v_{xA01} / . t \rightarrow 3$$

$$x_{B0} = x_{A01} / . t \rightarrow 3$$

Para este intervalo, dado que $\frac{d v_{xB}}{d t} = a_{xB}$, $d v_{xB} = a_{xB} d t$, por lo que:

$$ec5 = \int_{v_{xB0}}^{v_{xB}} d v_{xB} = \int_3^t a_{xB} d t$$

$$resp5 = \text{Solve}[ec5, v_{xB}]$$

$$v_{xBsol} = v_{xB} / . resp5[[1]]$$

Dado que $\frac{d x_B}{d t} = v_{xB}$, $d x_B = v_{xB} d t$, por lo que:

$$ec6 = \int_{x_{B0}}^{x_B} d x_B = \int_3^t v_{xBsol} d t$$

$$resp6 = \text{Solve}[ec6, x_B]$$

$$x_{Bsol} = x_B / . resp6[[1]] // \text{Expand}$$

Cálculo de la aceleración en $t > 6$ s:

$$a_{xC} = \frac{1}{m} R_x / . P \rightarrow 0$$

Condiciones finales segundo intervalo, equivalentes a las condiciones iniciales del tercero:

$$v_{xC0} = v_{xBsol} / . t \rightarrow 6$$

$$x_{C0} = x_{Bsol} / . t \rightarrow 6$$

Para este intervalo, dado que $\frac{d v_{xC}}{d t} = a_{xC}$, $d v_{xC} = a_{xC} d t$, por lo que:

$$ec7 = \int_{v_{xC0}}^{v_{xC}} d v_{xC} == \int_6^t a_{xC} d t$$

resp7 = Solve[ec7, vxC]
vxCsol = vxC /. resp7[[1]] // Expand

Dado que $\frac{d x_B}{d t} = v_{xB}$, $d x_B = v_{xB} d t$, por lo que:

$$ec8 = \int_{x_{C0}}^{x_C} d x_C == \int_6^t v_{xCsol} d t$$

resp8 = Solve[ec8, xC]
xCsol = xC /. resp8[[1]] // Expand

Gráfica de la rapidez del cuerpo a lo largo del plano inclinado

$$ec9 = -1.962 t + 18.636 == 0$$

resp9 = Solve[ec9]
tdet = t /. resp9[[1]]

$$vx = \begin{cases} 0.981 t^2 - 1.962 t + 0.981 & t \geq 1 \ \&\& \ t \leq 3 \\ -0.981 t^2 + 9.81 t - 16.68 & t > 3 \ \&\& \ t \leq 6 \\ -1.962 t + 18.636 & t > 6 \ \&\& \ t \leq tdet \end{cases}$$

Plot[vx, {t, 1, tdet}]

Gráfica de la posición del cuerpo a lo largo del plano inclinado

$$x = \begin{cases} 0.327 t^3 - 0.981 t^2 + 0.981 t - 0.327 & t \geq 1 \ \&\& \ t \leq 3 \\ -0.327 t^3 + 4.905 t^2 - 16.68 t + 17.33 & t > 3 \ \&\& \ t \leq 6 \\ -0.981 t^2 + 18.636 t - 53.3 & t > 6 \ \&\& \ t \leq tdet \end{cases}$$

Plot[x, {t, 1, tdet}]

Ejercicio 10

A un cuerpo con una peso $W = 25 \text{ N}$ sobre un plano rugoso, se le aplica una fuerza P , tal como se muestra en la figura 1.

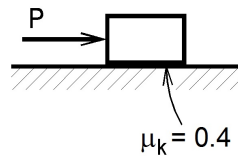


Figura 1 Cuerpo sobre un plano horizontal rugoso.

Si el cuerpo está en reposo en $t = 0$ y la variación de la magnitud de la fuerza aplicada con respecto al tiempo es se muestra en la gráfica de la figura 2,

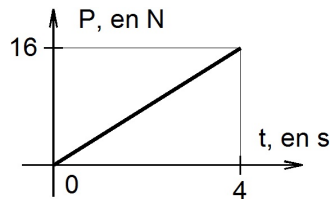


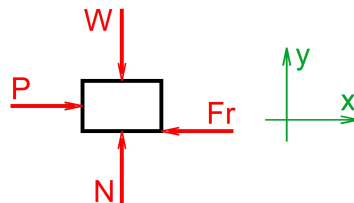
Figura 2 Gráfica de la magnitud de la fuerza P .

determine:

- las expresiones de su rapidez y posición en los intervalos $0 \leq t \leq 4$ y $t > 4$ s;
- la rapidez y la distancia recorrida en $t = 4$ s;
- la distancia que recorre el cuerpo hasta que se detiene.

a) las expresiones de su rapidez y posición en los intervalos $0 \leq t \leq 4$ y $t > 4$ s

Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre del cuerpo:



Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\vec{P} = \{P, 0\}$$

$$\vec{Fr} = \{-Fr, 0\}$$

$$\vec{N} = \{0, N\}$$

$$\vec{W} = \{0, -W\}$$

$$\vec{W} = \{0, -25\} \text{ N}$$

Resultante de fuerzas que actúa sobre el cuerpo:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Fr} + \vec{N} + \vec{W}$$

$$\vec{R} = \{P - Fr, N - 25\}$$

Aplicación de la segunda ley de Newton:

$$\vec{R} = m \vec{a}$$

$$\{P - Fr, N - 25\} = m \{a_x, 0\}$$

de donde:

$$P - Fr = m a_x$$

$$N - 25 = 0$$

De la última expresión:

$$N = 25 \text{ N}$$

En caso de que el cuerpo esté en movimiento, la fuerza de fricción será cinética, por tanto:

$$Fr_k = \mu_k N$$

sustituyendo valores conocidos:

$$Fr_k = 0.4 (25)$$

$$Fr_k = 10 \text{ N}$$

La componente en x de la fuerza resultante, \bar{R} es:

$$R_x = P - 10$$

En el intervalo $0 \leq t \leq 4 \text{ s}$, al que se le identificará como intervalo A, de la gráfica de la magnitud de la fuerza P su ecuación se puede obtener con base en la ecuación de la recta con pendiente m y ordenada al origen b:

$$y = m x + b$$

En este caso, la variable dependiente es P, la independiente es t, el valor de la pendiente es:

$$m_A = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$m_A = \frac{16}{4}$$

$$m_A = 4$$

Como la recta corta al eje y en el origen, su ordenada al origen es:

$$b_A = 0$$

De donde:

$$P = 4 t$$

La resultante queda entonces como:

$$R_{xA} = 4 t - 10$$

De la expresión de la segunda ley de Newton, se puede calcular la aceleración del cuerpo:

$$R_{xA} = \frac{25}{9.81} a_{xA}$$

$$2.548 a_{xA} = 4 t - 10$$

$$a_{xA} = \frac{4}{2.548} t - \frac{10}{2.548}$$

$$a_{xA} = 1.570 t - 3.924$$

Como se puede verificar, para $t = 0 \text{ s}$, $a_{xA} = -3.924$, es negativa, lo cual es incongruente.

Como se mencionó en el problema precedente, esto es porque se supuso que el cuerpo se iba a mover hacia la derecha, lo cual implica una fuerza de fricción cinética hacia la izquierda.

La situación que se presenta es que la fuerza de fricción es estática y, por tanto, variable, cuyo valor es el necesario para que el cuerpo no se mueva, en tanto dicha fuerza alcance su valor límite o máximo, y a partir de ese momento se empieza a mover hacia la derecha, es decir, el cuerpo se empieza a mover cuando la aceleración se haga positiva.

Dado que no se cuenta con el coeficiente de fricción estática, se considerará que es igual al coeficiente de fricción cinética, en cuyo caso:

$$Fr' = \mu_s N$$

$$Fr' = 0.4 (25)$$

$$Fr' = 10 \text{ N}$$

Entonces, cuando P sea igual a 10 N y la aceleración sea positiva, el cuerpo se empezará a mover:

$$P = Fr'$$

$$4 t = 10$$

$$t = \frac{10}{4}$$

$$t = 2.5 \text{ s}$$

Intervalo de $2.5 \leq t \leq 4 \text{ s}$

Por consiguiente, el primer intervalo de movimiento es de $2.5 \leq t \leq 4 \text{ s}$, en el cual:

$$a_{xA} = 1.570 t - 3.924$$

Con base en la definición de aceleración:

$$a_{xA} = \frac{dv_{xA}}{dt}$$

$$\frac{dv_{xA}}{dt} = 1.570 t - 3.924$$

$$dv_{xA} = (1.570 t - 3.924) dt$$

Se integran ambos miembros de la ecuación con base en las condiciones iniciales, para $t = 2.5 \text{ s}$ la rapidez es $v_{xA0} = 0$:

$$\int_0^{v_{xA}} dv_{xA} = \int_{2.5}^t (1.570 t - 3.924) dt$$

$$v_{xA} \Big|_0^{v_{xA}} = \left(\frac{1.570}{2} t^2 - 3.924 t \right) \Big|_{2.5}^t$$

$$v_{xA} = 0.7848 t^2 - 3.924 t - [0.7848 (2.5)^2 - 3.924 (2.5)]$$

$$v_{xA} = 0.7848 t^2 - 3.924 t - [0.7848 (6.25) - 9.81]$$

$$v_{xA} = 0.7848 t^2 - 3.924 t - (4.905 - 9.81)$$

$$v_{xA} = 0.7848 t^2 - 3.924 t + 4.905$$

Para obtener la expresión de la posición del cuerpo, con base en la definición de rapidez:

$$v_{xA} = \frac{dx_A}{dt}$$

$$\frac{dx_A}{dt} = 0.7848 t^2 - 3.924 t + 4.905$$

$$dx_A = (0.7848 t^2 - 3.924 t + 4.905) dt$$

Luego de integrar ambos miembros de la ecuación, considerando que para $t = 2.5 \text{ s}$ $x_A = 0$:

$$\int_0^{x_A} dx_A = \int_{2.5}^t (0.7848 t^2 - 3.924 t + 4.905) dt$$

$$x_A \Big|_0^{x_A} = \left(\frac{0.7848}{3} t^3 - \frac{3.924}{2} t^2 + 4.905 t \right) \Big|_{2.5}^t$$

$$x_A = 0.2616 t^3 - 1.962 t^2 + 4.905 t - [0.2616 (2.5)^3 - 1.962 (2.5)^2 + 4.905 (2.5)]$$

$$x_A = 0.2616 t^3 - 1.962 t^2 + 4.905 t - [0.2616 (15.625) - 1.962 (6.25) + 12.263]$$

$$x_A = 0.2616 t^3 - 1.962 t^2 + 4.905 t - (4.088 - 12.263 + 12.263)$$

$$x_A = 0.2616 t^3 - 1.962 t^2 + 4.905 t - 4.088$$

Las expresiones de la rapidez y la posición del cuerpo en el intervalo $0 \leq t \leq 4 \text{ s}$:

$$v_{xA} = 0.7848 t^2 - 3.924 t + 4.905 \text{ y } x_A = 0.2616 t^3 - 1.962 t^2 + 4.905 t - 4.088.$$

Intervalo de $t > 4$ s

Con base en la gráfica de la figura 2, en este intervalo la fuerza P ya no existe o, en otras palabras, su magnitud es $P = 0$. Se identificará a este intervalo con la letra B .

Entonces, en este intervalo la componente en x de la resultante es:

$$R_{xB} = P - 10$$

$$R_{xB} = -10$$

De donde la aceleración es:

$$2.548 a_{xB} = -10$$

$$a_{xB} = -\frac{10}{2.548}$$

$$a_{xB} = -3.924$$

b) la rapidez y la distancia recorrida en $t = 4$ s

Antes de plantear las ecuaciones diferenciales para obtener las expresiones de la rapidez y la posición del cuerpo en este intervalo, es necesario calcular las condiciones finales del intervalo anterior, las cuales serán las condiciones iniciales de este.

Entonces, para $t = 4$ s, dado que:

$$v_{xA} = 0.7848 t^2 - 3.924 t + 4.905$$

$$v_{xAf} = 0.7848 (4)^2 - 3.924 (4) + 4.905$$

$$v_{xAf} = 0.7848 (16) - 15.696 + 4.905$$

$$v_{xAf} = 12.557 - 10.791$$

$$v_{xAf} = 1.766 \frac{m}{s}$$

y para la posición final en el primer intervalo:

$$x_A = 0.2616 t^3 - 1.962 t^2 + 4.905 t - 4.088$$

$$x_{Af} = 0.2616 (4)^3 - 1.962 (4)^2 + 4.905 (4) - 4.088$$

$$x_{Af} = 0.2616 (64) - 1.962 (16) + 19.62 - 4.088$$

$$x_{Af} = 16.742 - 31.392 + 15.532$$

$$x_{Af} = 0.882 \text{ m}$$

De donde las condiciones iniciales del segundo intervalo son:

$$v_{xB0} = v_{xAf}$$

$$v_{xB0} = 1.766 \frac{m}{s}$$

$$x_{B0} = x_{Af}$$

$$x_{B0} = 0.882 \text{ m}$$

La rapidez y la posición del cuerpo en $t = 4$ s son:

$$v_{xAf} = 1.766 \frac{m}{s} \text{ y } x_{B0} = 0.882 \text{ m.}$$

Ahora, ya es posible determinar la expresión de la rapidez en el segundo intervalo, con base en la definición de aceleración y las condiciones iniciales, para $t = 4$ s $v_{xB0} = 1.766$:

$$a_{xB} = \frac{dv_{xB}}{dt}$$

$$\frac{dv_{xB}}{dt} = -3.924$$

$$dv_{xB} = -3.924 dt$$

$$\int_{1.766}^{v_{xB}} dv_{xB} = \int_4^t -3.924 dt$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} v_{xB} \Big|_{1.766}^{v_{xB}} &= (-3.924 t) \Big|_4^t \\ v_{xB} - 1.766 &= -3.924 t - [-3.924 (4)] \\ v_{xB} &= -3.924 t - (-15.696) + 1.766 \\ v_{xB} &= -3.924 t + 17.462 \end{aligned}$$

Posteriormente, empleando la definición de rapidez y considerando las condiciones iniciales que para $t = 4 \text{ s}$ $x_{B0} = 0.882 \text{ m}$:

$$\begin{aligned} v_{xB} &= \frac{dx_B}{dt} \\ \frac{dx_B}{dt} &= -3.924 t + 17.462 \\ dx_B &= (-3.924 t + 17.462) dt \\ \int_{0.882}^{x_B} dx_B &= \int_4^t (-3.924 t + 17.462) dt \\ x_B \Big|_{0.882}^{x_B} &= \left(-\frac{3.924}{2} t^2 + 17.462 t \right) \Big|_4^t \\ x_B - 0.882 &= -1.962 t^2 + 17.462 t - [-1.962 (4)^2 + 17.462 (4)] \\ x_B &= -1.962 t^2 + 17.462 t - [-1.962 (16) + 69.848] + 0.882 \\ x_B &= -1.962 t^2 + 17.462 t + 31.392 - 69.848 + 0.882 \\ x_B &= -1.962 t^2 + 17.462 t - 37.574 \end{aligned}$$

Las expresiones de la rapidez y la posición del cuerpo en el intervalo $t > 4 \text{ s}$:

$$v_{xB} = -3.924 t + 17.462 \text{ y } x_B = -1.962 t^2 + 17.462 t - 37.574.$$

c) la distancia que recorre el cuerpo hasta que se detiene

Para calcular la distancia que recorre el cuerpo hasta que se detiene, se requiere obtener el instante en que su rapidez es nula, lo que sucederá en el segundo intervalo, debido a que en el primero la rapidez es una función creciente y, por tanto, solo es cero cuando inicia el movimiento.

Entonces, simplemente a partir de la expresión de la rapidez en el intervalo B igualado a cero:

$$\begin{aligned} -3.924 t_{\text{det}} + 17.462 &= 0 \\ 3.924 t_{\text{det}} &= 17.462 \\ t_{\text{det}} &= \frac{17.462}{3.924} \\ t_{\text{det}} &= 4.45 \text{ s} \end{aligned}$$

De donde la distancia recorrida será igual a la posición para $t = 4.45 \text{ s}$:

$$\begin{aligned} x_{B\text{det}} &= -1.962 (4.45)^2 + 17.462 (4.45) - 37.574 \\ x_{B\text{det}} &= -1.962 (19.80) + 77.706 - 37.574 \\ x_{B\text{det}} &= -38.852 + 40.132 \\ x_{B\text{det}} &= 1.280 \text{ m} \end{aligned}$$

La distancia que recorre el cuerpo hasta que se detiene es:

$$x_{B\text{det}} = 1.280 \text{ m.}$$

Gráfica de la aceleración del cuerpo desde $t = 2.5$ s hasta que se detiene:

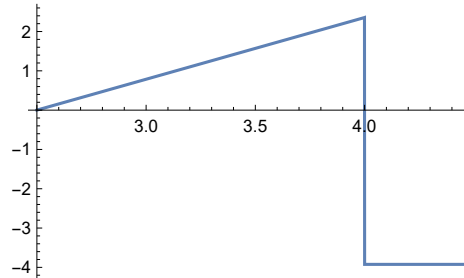
$$ec7 = -3.924 t + 17.462 == 0$$

```
resp7 = Solve[ec7]
```

```
tdet = t /. resp7[[1]]
```

$$acel = \begin{cases} 1.570 t - 3.924 & t \geq 2.5 \ \&\& \ t \leq 4 \\ -3.924 & t > 4 \ \&\& \ t \leq tdet \end{cases}$$

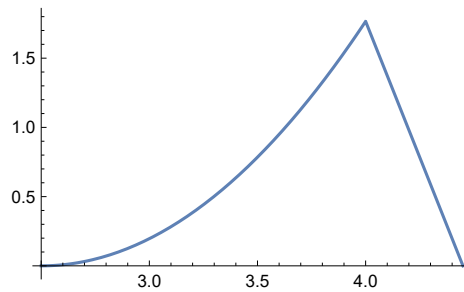
```
Plot[acel, {t, 2.5, tdet}]
```



Gráfica de la rapidez del cuerpo desde $t = 2.5$ s hasta que se detiene:

$$vx = \begin{cases} 0.7848 t^2 - 3.924 t + 4.905 & t \geq 2.5 \ \&\& \ t \leq 4 \\ -3.924 t + 17.462 & t > 4 \ \&\& \ t \leq tdet \end{cases}$$

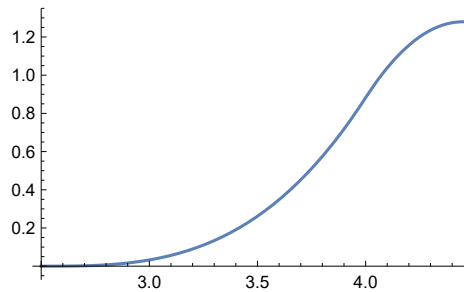
```
Plot[vx, {t, 2.5, tdet}]
```



Gráfica de la posición del cuerpo desde $t = 2.5$ s hasta que se detiene:

$$x = \begin{cases} 0.2616 t^3 - 1.962 t^2 + 4.905 t - 4.0875 & t \geq 2.5 \ \&\& \ t \leq 4 \\ -1.962 t^2 + 17.462 t - 37.574 & t > 4 \ \&\& \ t \leq tdet \end{cases}$$

```
Plot[x, {t, 2.5, tdet}]
```



Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

$$\begin{aligned}
 W &= 25; \\
 g &= 9.81 \\
 \mu_k &= 0.4; \\
 m &= \frac{W}{g}
 \end{aligned}$$

a) las expresiones de su rapidez y posición en los intervalos $0 \leq t \leq 4$ y $t > 4$ s

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_P &= \{P, 0\} \\
 \mathbf{v}_{Fr} &= \{-Fr, 0\} \\
 \mathbf{v}_N &= \{0, N\} \\
 \mathbf{v}_W &= \{0, -W\}
 \end{aligned}$$

Cálculo de la fuerza resultante:

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{Fr} + \mathbf{v}_N + \mathbf{v}_W$$

Segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned}
 \text{ec1} &= \mathbf{R} == m \{ax, 0\} \\
 \text{resp1} &= \text{Solve}[\text{ec1}, \{ax, N\}] \\
 \text{Nsol} &= N /. \text{resp1}[[1]] \\
 \text{axSol} &= ax /. \text{resp1}[[1]] \\
 \text{Frk} &= \mu_k \text{Nsol}
 \end{aligned}$$

Componente en x de la fuerza resultante:

$$R_x = (\text{axSol} /. \text{Fr} \rightarrow \text{Frk}) m$$

Cálculo de la ecuación de P y la aceleración en $0 \leq t \leq 4$ s:

$$\begin{aligned}
 m_A &= \frac{16}{4} \\
 b_A &= 0 \\
 P_A &= m_A t + b_A \\
 ax_A &= \frac{1}{m} R_x /. P \rightarrow P_A
 \end{aligned}$$

Cuándo se empieza a mover el cuerpo:

```
FrLim = μk Nsol
ec2 = PA == FrLim
resp2 = Solve[ec2]
tini = t /. resp2[[1]]
```

Intervalo de $2.5 \leq t \leq 4$ s

Dado que $\frac{dv_{xA}}{dt} = a_{xA}$, $d v_{xA} = a_{xA} dt$, por lo que:

```
ec3 = ∫₀^{vxA} dvxA == ∫_{2.5}^t axA dt
resp3 = Solve[ec3, vxA]
vxAsol = vxA /. resp3[[1]]
```

Dado que $\frac{dx_A}{dt} = v_{xA}$, $d x_A = v_{xA} dt$, por lo que:

```
ec4 = ∫₀^{xA} dxA == ∫_{2.5}^t vxAsol dt
resp4 = Solve[ec4, xA]
xAsol = xA /. resp4[[1]] // Expand
```

Intervalo $t > 4$ s (intervalo B)

```
PB = 0
axB = 1/m Rx /. P → PB
```

Condiciones finales primer intervalo, equivalentes a las condiciones iniciales del segundo:

```
vxB0 = vxAsol /. t → 4
xB0 = xAsol /. t → 4
```

Para este intervalo, dado que $\frac{dv_{xB}}{dt} = a_{xB}$, $d v_{xB} = a_{xB} dt$, por lo que:

```
ec5 = ∫_{vxB0}^{vxB} dvxB == ∫_4^t axB dt
resp5 = Solve[ec5, vxB]
vxBsol = vxB /. resp5[[1]] // Expand
```

Dado que $\frac{dx_B}{dt} = v_{xB}$, $dx_B = v_{xB} dt$, por lo que:

$$ec6 = \int_{x_{B0}}^{x_B} dx_B = \int_4^t v_{xBsol} dt$$

resp6 = Solve[ec6, xB]

xBsol = xB /. resp6[[1]] // Expand

c) la distancia que recorre el cuerpo hasta que se detiene

$$ec7 = -3.924 t + 17.462 == 0$$

resp7 = Solve[ec7]

tdet = t /. resp7[[1]]

xBdet = xBsol /. t -> tdet

Gráfica de la aceleración del cuerpo desde $t = 2.5$ s hasta que se detiene:

$$ec7 = -3.924 t + 17.462 == 0$$

resp7 = Solve[ec7]

tdet = t /. resp7[[1]]

$$acel = \begin{cases} 1.570 t - 3.924 & t \geq 2.5 \ \&\& \ t \leq 4 \\ -3.924 & t > 4 \ \&\& \ t \leq tdet \end{cases}$$

Plot[acel, {t, 2.5, tdet}]

Gráfica de la rapidez del cuerpo desde $t = 2.5$ s hasta que se detiene:

$$vx = \begin{cases} 0.7848 t^2 - 3.924 t + 4.905 & t \geq 2.5 \ \&\& \ t \leq 4 \\ -3.924 t + 17.462 & t > 4 \ \&\& \ t \leq tdet \end{cases}$$

Plot[vx, {t, 2.5, tdet}]

Gráfica de la posición del cuerpo desde $t = 2.5$ s hasta que se detiene:

$$x = \begin{cases} 0.2616 t^3 - 1.962 t^2 + 4.905 t - 4.0875 & t \geq 2.5 \ \&\& \ t \leq 4 \\ -1.962 t^2 + 17.462 t - 37.574 & t > 4 \ \&\& \ t \leq tdet \end{cases}$$

Plot[x, {t, 2.5, tdet}]

Ejercicio 11

Un bloque de masa m se cuelga verticalmente del techo, por medio de un resorte lineal, cuya fuerza $F = k x$, donde la fuerza F está en N, para una deformación x en metros. El parámetro k es la constante de rigidez del resorte, que está en $\frac{N}{m}$.

Si el bloque se jala verticalmente hacia abajo una longitud y_0 a partir de la posición natural de equilibrio del sistema masa-resorte, tal y como se muestra en la figura 1, determine las ecuaciones que modelan el movimiento de dicho bloque.

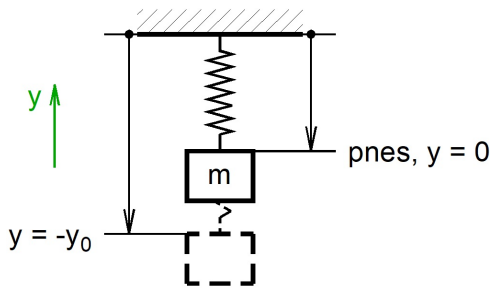
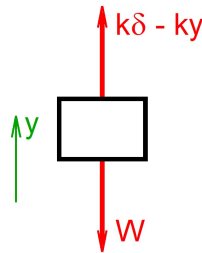


Figura 1 Sistema masa-resorte.

Nota: pnes denota el punto natural de equilibrio del sistema, para el cual el resorte ya tiene una deformación δ debida al peso del cuerpo, por tanto, $k \delta = W$.

Diagrama de cuerpo libre del bloque:



Considerando un planteamiento escalar, la resultante de fuerzas es:

$$R = k \delta - k y - W$$

Dado que:

$$k \delta = W$$

$$R = -k y$$

Con base en la segunda ley de Newton:

$$-k y = m a$$

Dado que la aceleración a es la segunda derivada de la posición y con respecto al tiempo, la ecuación diferencial que modela el movimiento del bloque es:

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + k y(t) = 0$$

Luego de normalizar la ecuación, queda:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0$$

Esta ecuación se puede resolver de dos formas diferentes.

La primera es a partir de la combinación lineal de las exponenciales de los valores característicos de dicha ecuación multiplicados por la variable independiente; los valores característicos son las raíces de la ecuación característica asociada:

$$D^2 y + \frac{k}{m} y = 0$$

Por tanto, luego de dividir por y ambos miembros:

$$D^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$D^2 = -\frac{k}{m}$$

$$D = \sqrt{-\frac{k}{m}}$$

$$D = \sqrt{(-1) \frac{k}{m}}$$

$$D = \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$D = \pm \mathbf{i} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Los valores característicos son las raíces de la ecuación anterior:

$$\lambda_1 = \mathbf{i} \sqrt{\frac{k}{m}}, \lambda_2 = -\mathbf{i} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = C_1 e^{\mathbf{i} \sqrt{\frac{k}{m}} t} + C_2 e^{-\mathbf{i} \sqrt{\frac{k}{m}} t}$$

Luego de aplicar la fórmula de Euler

$$e^{\mathbf{i} \theta} = \cos [\theta] + \mathbf{i} \sin [\theta]$$

la expresión anterior queda:

$$y(t) = C_1 \left(\cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] + \mathbf{i} \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] \right) + C_2 \left(\cos \left[-\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] + \mathbf{i} \sin \left[-\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] \right)$$

Dado que la función $\sin [\theta]$ es una función antisimétrica, es decir:

$$\sin [-\theta] = -\sin [\theta]$$

Y la función $\cos [\theta]$ es una función simétrica y, por tanto:

$$\cos [-\theta] = \cos [\theta]$$

La solución general de la ecuación diferencial queda:

$$y(t) = C_1 \left(\cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] + \mathbf{i} \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] \right) + C_2 \left(\cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] - \mathbf{i} \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] \right)$$

Luego de factorizar, la expresión anterior se convierte en:

$$y(t) = (C_1 + C_2) \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] + (C_1 - C_2) \mathbf{i} \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

Se pueden sustituir dos constantes, en este caso C_1 y C_2 que resultan ser números complejos, por otras dos constantes, A y Φ reales, tales que:

$$(C_1 + C_2) = A \sin [\Phi]$$

$$(C_1 - C_2) \mathbf{i} = A \cos [\Phi]$$

Entonces, la ecuación anterior queda:

$$y(t) = A \sin [\Phi] \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] + A \cos [\Phi] \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

Dado que $\sin [a + b] = \sin [a] \cos [b] + \sin [b] \cos [a]$:

$$y(t) = A \sin \left[\Phi + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

Si se considera que se cuenta con condiciones iniciales tanto de posición como de rapidez, para evaluar los valores de las constantes A y Φ se obtendrá la expresión de la rapidez, $v(t)$, derivando $y(t)$ con respecto al tiempo:

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} A \cos \left[\Phi + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

Se sustituyen las expresiones de $x(t)$ y $v(t)$ por las condiciones iniciales, es decir, para $t = 0$

$y = -y_0$ y $v = 0$:

$$-y_0 = A \sin \left[\Phi + \sqrt{\frac{k}{m}} (0) \right]$$

$$-y_0 = A \sin [\Phi]$$

Y para la rapidez:

$$0 = \sqrt{\frac{k}{m}} A \cos \left[\Phi + \sqrt{\frac{k}{m}} (0) \right]$$

$$0 = \sqrt{\frac{k}{m}} A \cos [\Phi]$$

De esta última expresión se obtiene:

$$\cos [\Phi] = 0$$

$$\text{ArcCos} \{ \cos [\Phi] \} = \text{ArcCos} [0]$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2}$$

Si se sustituye este valor en la primera expresión, resulta:

$$-y_0 = A \sin \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$A (1) = -y_0$$

$$A = -y_0$$

Entonces, la solución particular de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = -y_0 \sin \left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

Dado que:

$$\cos [\theta] = \sin \left[\theta + \frac{\pi}{2} \right]$$

La solución de la ecuación diferencial queda:

$$y(t) = -y_0 \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

la cual es la expresión que describe la posición del bloque, $y(t)$, con respecto al tiempo, t .

La ecuación de la rapidez del bloque, $v(t)$, es la derivada con respecto al tiempo de $y(t)$:

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} (-y_0) \left\{ -\text{Sin} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right] \right\}$$

$$v(t) = y_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \text{Sin} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

La segunda forma para resolver la ecuación diferencial es empleando la definición de la aceleración como:

$$a = v \frac{dv}{dy}$$

Entonces, la ecuación diferencial original queda:

$$m a = -k y$$

$$m v \frac{dv}{dy} = -k y$$

Por tanto:

$$v dv = -\frac{k}{m} y dy$$

$$\int_0^v v dv = \int_{-y_0}^y -\frac{k}{m} y dy$$

$$\left[\frac{1}{2} v^2 \right]_0^v = -\frac{k}{m} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{-y_0}^y$$

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} (0)^2 = -\frac{k}{m} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) - \left[-\frac{k}{m} \left(\frac{1}{2} (-y_0)^2 \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} v^2 = -\frac{k}{2m} y^2 + \frac{k}{2m} y_0^2$$

Luego de multiplicar por dos ambos miembros y factorizar la expresión:

$$v^2 = \frac{k}{m} (-y^2 + y_0^2)$$

es decir:

$$v^2 = \frac{k}{m} (y_0^2 - y^2)$$

Se despeja la rapidez:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} (y_0^2 - y^2)}$$

Se sustituye la rapidez por su definición como $v = \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m} (y_0^2 - y^2)}$$

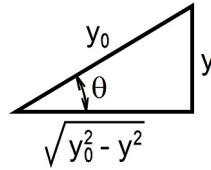
Se separan variables:

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{k}{m} (y_0^2 - y^2)}} = dt$$

de donde:

$$\int_{-y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{k}{m} (y_0^2 - y^2)}} = \int_0^t dt$$

Se resuelve la integral del miembro izquierdo mediante sustitución trigonométrica:



$$\cos [\theta] = \frac{\sqrt{y_0^2 - y^2}}{y_0}$$

$$y_0 \cos [\theta] = \sqrt{y_0^2 - y^2}$$

$$\sin [\theta] = \frac{y}{y_0}$$

$$y = y_0 \sin [\theta]$$

de donde:

$$\frac{dy}{d\theta} = y_0 \cos [\theta]$$

$$dy = y_0 \cos [\theta] d\theta$$

Se sustituye lo anterior en la integral:

$$\int_{-y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{k}{m}(y_0^2 - y^2)}} = \int_0^t dt$$

$$\int_{\Phi}^{\theta} \frac{y_0 \cos [\theta] d\theta}{\sqrt{\frac{k}{m} y_0 \cos [\theta]}} = \int_0^t dt$$

$$\int_{\Phi}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \int_0^t dt$$

Se multiplican ambas integrales por $\sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\int_{\Phi}^{\theta} d\theta = \sqrt{\frac{k}{m}} \int_0^t dt$$

$$\theta]_{\Phi}^{\theta} = \sqrt{\frac{k}{m}} t]_0^t$$

$$\theta - \Phi = \sqrt{\frac{k}{m}} t - \sqrt{\frac{k}{m}} (0)$$

$$\theta - \Phi = \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

Dado que:

$$\sin [\theta] = \frac{y}{y_0}$$

$$\text{ArcSin} \{ \sin [\theta] \} = \text{ArcSin} \left[\frac{y}{y_0} \right]$$

$$\theta = \text{ArcSin} \left[\frac{y}{y_0} \right]$$

Entonces:

$$\text{ArcSin} \left[\frac{y}{y_0} \right] - \Phi = \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$\text{ArcSin} \left[\frac{y}{y_0} \right] = \sqrt{\frac{k}{m}} t + \Phi$$

Aplicando a ambos miembros la función seno:

$$\text{Sin} \left\{ \text{ArcSin} \left[\frac{y}{y_0} \right] \right\} = \text{Sin} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t + \Phi \right]$$

$$\frac{y}{y_0} = \text{Sin} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t + \Phi \right]$$

$$y(t) = y_0 \text{Sin} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t + \Phi \right]$$

Para obtener el valor de Φ , se obtiene la rapidez, $v(t)$, derivando $x(t)$ con respecto al tiempo, y se sustituyen las condiciones iniciales, para $t = 0$ $v(0) = 0$:

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} y_0 \text{Cos} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t + \Phi \right]$$

$$0 = \sqrt{\frac{k}{m}} y_0 \text{Cos} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} (0) + \Phi \right]$$

$$0 = \sqrt{\frac{k}{m}} y_0 \text{Cos} [\Phi]$$

De donde:

$$\text{Cos} [\Phi] = 0$$

$$\text{ArcCos} \{ \text{Cos} [\Phi] \} = \text{ArcCos} [0]$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2}$$

Por consiguiente:

$$y(t) = y_0 \text{Sin} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{\pi}{2} \right]$$

que es igual a:

$$y(t) = y_0 \text{Cos} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

que es la expresión de describe la posición del bloque, $y(t)$, con respecto al tiempo, t , idéntica a la obtenida con el primer procedimiento.

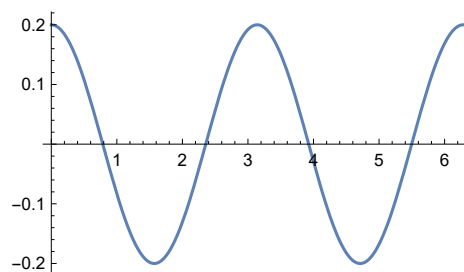
Gráfica de la expresión de la posición del bloque, $y(t)$, con respecto al tiempo, t , considerando $k = 4 \frac{N}{m}$, $m = 1$ kg y $y_0 = 0.2$ m:

$$k = 4;$$

$$m = 1;$$

$$y_0 = 0.2;$$

$$\text{Plot} \left[y_0 \text{Cos} \left[\sqrt{\frac{k}{m}} t \right], \{t, 0, 2\pi\} \right]$$



Resolución del problema con funciones de Mathematica

```
Clear[k, m, y0]
ecDif = m y''[t] + k y[t] == 0
resp1 = DSolve[{ecDif, y[0] == -y0, y'[0] == 0}, y[t], t]
ySol = y[t] /. resp1[[1]]
v[t] = D[ySol, t]
```

Gráfica de la expresión de la posición del bloque, $y(t)$, con respecto al tiempo, t , considerando $k = 4 \frac{N}{m}$, $m = 1 \text{ kg}$ y $y_0 = 0.2 \text{ m}$:

```
k = 4;
m = 1;
y0 = 0.2;
Plot[ySol, {t, 0, 2 π}]
```

Ejercicio 12

Un bloque de masa $m = 4 \text{ kg}$ se cuelga verticalmente del techo, por medio de un resorte lineal, cuya constante de rigidez es $k = 64 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Si el bloque se jala verticalmente hacia arriba una longitud $y_0 = 0.5 \text{ m}$ a partir de la posición natural de equilibrio del sistema masa-resorte, tal y como se muestra en la Figura 1, y se le imprime una rapidez hacia abajo de $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, determine la ecuación que modela el movimiento de dicho bloque, y dibuje la gráfica de posición vs. tiempo correspondiente.

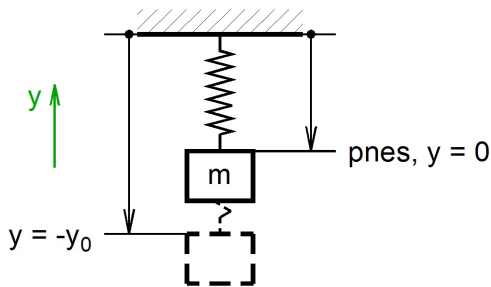


Figura 1 Sistema masa-resorte.

A partir de la solución de la ecuación diferencial obtenida en el Ejercicio anterior:

$$y(t) = A \sin \left[\Phi + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

y su derivada:

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} A \cos \left[\Phi + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right]$$

Se sustituyen las condiciones iniciales, para $t = 0 \text{ s}$, $y_0 = 0.5 \text{ m}$ y $v_0 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, además de los valores conocidos de la masa y la constante de rigidez del resorte:

$$0.5 = A \sin \left[\Phi + \sqrt{\frac{64}{4}} (0) \right]$$

$$-2 = \sqrt{\frac{64}{4}} A \cos \left[\Phi + \sqrt{\frac{64}{4}} (0) \right]$$

De donde:

$$0.5 = A \sin [\Phi]$$

$$-2 = \sqrt{16} A \cos [\Phi]$$

Luego de despejar al seno y coseno de Φ :

$$\sin [\Phi] = \frac{0.5}{A}$$

$$\cos [\Phi] = -\frac{2}{4A}$$

Se dividen miembro a miembro estas dos expresiones:

$$\frac{\sin[\Phi]}{\cos[\Phi]} = \frac{\frac{0.5}{A}}{-\frac{2}{4A}}$$

$$\tan [\Phi] = -\frac{0.5(2A)}{A(1)}$$

$$\tan [\Phi] = -\frac{A}{A}$$

$$\tan [\Phi] = -1$$

Se aplica la función inversa de la tangente, Tan [], arco tangente, ArcTan []:

$$\text{ArcTan}\{\text{Tan}[\Phi]\} = \text{ArcTan}[-1]$$

$$\Phi_1 = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Phi_2 = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\Phi_3 = -\frac{5\pi}{4}$$

y así sucesivamente, es decir, existen múltiples soluciones.

Suponiendo la primera raíz obtenida:

$$\Phi_1 = -\frac{\pi}{4}$$

Al sustituirla en la expresión del seno se obtiene que:

$$\text{Sin}\left[-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{0.5}{A}$$

$$A = \frac{0.5}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$A = -\frac{0.5(2)}{\sqrt{2}}$$

$$A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

es decir:

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces, al sustituir en la expresión del coseno:

$$\text{Cos}[\Phi] = -\frac{2}{4A}$$

$$\text{Cos}[\Phi] = -\frac{2}{4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\text{Cos}[\Phi] = -\frac{2}{-2\sqrt{2}}$$

$$\text{Cos}[\Phi] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Cos}[\Phi] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dado que el valor del coseno de Φ debe ser positivo, la raíz correcta es:

$$\Phi_2 = -\frac{\pi}{4}$$

Ya que:

$$\text{Cos}\left[-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

en dado caso:

$$\text{Cos}\left[-\frac{3\pi}{4}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

que no satisface la expresión considerada.

Por consiguiente, la expresión de la posición del bloque con respecto al tiempo es:

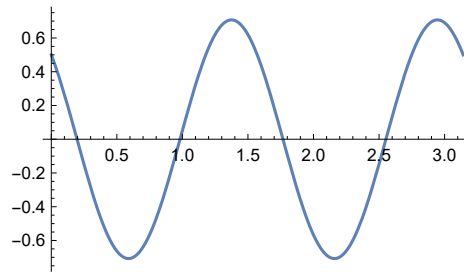
$$y(t) = A \text{Sin}\left[\Phi + \sqrt{\frac{k}{m}} t\right]$$

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{Sin}\left[4t - \frac{\pi}{4}\right]$$

Gráfica de la posición del bloque con respecto al tiempo

Puede verificarse que la gráfica de la posición del bloque con respecto al tiempo corresponde a un movimiento oscilatorio no amortiguado, es decir, una sinusoidal, con frecuencia angular $\omega = 4$ y ángulo de desfase $\Phi = -\frac{\pi}{4}$:

$$\text{Plot}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{Sin}\left[4t - \frac{\pi}{4}\right], \{t, 0, \pi\}\right]$$



Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 4;
k = 64;
y0 = 0.5;
v0 = -2;
```

Obtención de las constantes A y Φ

```
ec1 = y == A Sin[ $\sqrt{\frac{k}{m}}$  t +  $\Phi$ ]
ec2 = v == D[ec1[[2]], t]
ec3 = ec1 /. {y -> y0, t -> 0}
ec4 = ec2 /. {v -> v0, t -> 0}
resp1 = FindRoot[{ec3, ec4}, {{A, -0.5}, { $\Phi$ , 0}}]
ASol = A /. resp1
 $\Phi$ Sol =  $\Phi$  /. resp1
```

Gráfica de la solución

```
ec5 = ec1 /. {A -> ASol,  $\Phi$  ->  $\Phi$ Sol}
Plot[ec5[[2]], {t, 0,  $\pi$ }]
```

Resolución de la ecuación diferencial original

$$\text{ecDif} = y''[t] + \frac{k}{m} y[t] == 0$$

```
resp2 = DSolve[{ecDif, y[0] == y0, y'[0] == v0}, y[t], t]
```

```
ySol = y[t] /. resp2[[1]]
```

```
Plot[ySol, {t, 0, \pi}]
```

Ejercicio 13

El bloque de 8 N de peso, mostrado en la figura 1, se coloca sobre una superficie horizontal rugosa y se le somete a la acción de una fuerza horizontal cuya magnitud depende de la posición y cuya variación se muestra en la gráfica de la figura 2.

Si se considera que en $x = 0$ está en reposo y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es $\mu_k = 0.25$, determine:

- la rapidez del bloque en $x = 1$ m;
- la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre el bloque para $x = 4.5$ m; y
- la posición del bloque la primera vez que $v_x = 2 \frac{m}{s}$.

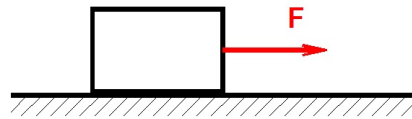


Figura 1 Bloque sobre una superficie horizontal rugosa.

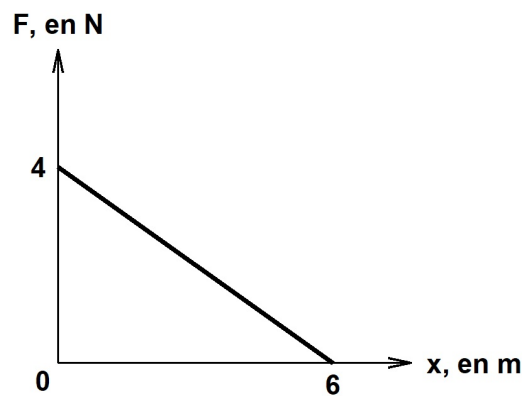
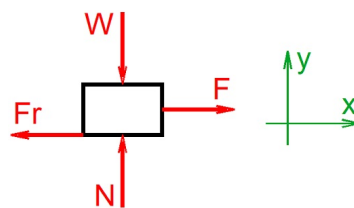


Figura 2 Gráfica de la variación de la fuerza horizontal aplicada al bloque.

Diagrama de cuerpo libre del bloque:



Representación vectorial de las fuerzas:

$$\vec{F} = \{F, 0\}$$

$$\vec{F}_r = \{-F_r, 0\}$$

$$\vec{N} = \{0, N\}$$

$$\vec{W} = \{0, -W\}$$

$$\vec{W} = \{0, -8\} \text{ N}$$

Obtención de la resultante:

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}_r + \vec{N} + \vec{W}$$

$$\vec{R} = \{F, 0\} + \{-F_r, 0\} + \{0, N\} + \{0, -8\}$$

$$\vec{R} = \{F - F_r, N - 8\}$$

Aplicación de la segunda ley de Newton

$$\bar{R} = m \bar{a}$$

$$\{F - Fr, N - 8\} = \frac{8}{9.81} \{a_x, 0\}$$

De donde:

$$F - Fr = 0.8155 a_x$$

$$N - 8 = 0$$

$$N = 8 \text{ N}$$

Suponiendo que el bloque se mueve:

$$Fr = \mu_k N$$

$$Fr = 0.25 (8)$$

$$Fr = 2 \text{ N}$$

Por tanto, la aceleración es:

$$a_x = \frac{F - Fr}{0.8155}$$

De la gráfica de la figura 2, la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

$$m = \frac{-4}{6}$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

Y la ordenada al origen es:

$$b = 4$$

Por consiguiente:

$$F = -\frac{2}{3} x + 4$$

De donde:

$$a_x = \frac{-\frac{2}{3} x + 4 - 2}{0.8155}$$

$$a_x = -\frac{2}{3(0.8155)} x + \frac{2}{0.8155}$$

$$a_x = -0.8175 x + 2.453$$

a) la rapidez del bloque en $x = 1 \text{ m}$

Con base en la definición de aceleración alternativa:

$$a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

Por tanto:

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = -0.8175 x + 2.453$$

$$v_x dv_x = (-0.8175 x + 2.453) dx$$

Las condiciones iniciales son, para $x = 0$, $v_x = 0$:

$$\int_0^{v_x} v_x dv_x = \int_0^x (-0.8175 x + 2.453) dx$$

$$\left[\frac{1}{2} v_x^2 \right]_0^{v_x} = \left[-\frac{0.8175}{2} x^2 + 2.453 x \right]_0^x$$

$$\frac{1}{2} v_x^2 - \frac{1}{2} (0)^2 = -0.4088 x^2 + 2.453 x - [-0.4088 (0)^2 + 2.453 (0)]$$

$$\frac{1}{2} v_x^2 = -0.4088 x^2 + 2.453 x$$

$$v_x^2 = -0.8175 x^2 + 4.905 x$$

$$v_x = \sqrt{-0.8175 x^2 + 4.905 x}$$

Para $x = 1$ m:

$$v_x = \sqrt{-0.8175(1)^2 + 4.905(1)}$$

$$v_x = \sqrt{-0.8175 + 4.905}$$

$$v_x = \sqrt{4.088}$$

$$v_x = 2.022 \frac{m}{s}$$

La rapidez del bloque para $x = 1$ m es:

$$v_x = 2.022 \frac{m}{s}.$$

b) la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la caja para $x = 4.5$ m

Dado que la fuerza resultante es:

$$\vec{R} = \left\{ -\frac{2}{3}x + 2, 0 \right\}$$

Para $x = 4.5$ m:

$$\vec{R} = \left\{ -\frac{2}{3}(4.5) + 2, 0 \right\}$$

$$\vec{R} = \{-3 + 2, 0\}$$

$$\vec{R} = \{-1, 0\} \text{ N}$$

$$|\vec{R}| = 1 \text{ N}$$

La magnitud de la resultante que actúa sobre el bloque para $x = 4.5$ m es:

$$|\vec{R}| = 1 \text{ N}.$$

c) la posición del bloque la primera vez que $v_x = 2 \frac{m}{s}$

A partir de la expresión de la rapidez obtenida en (a):

$$v_x = \sqrt{-0.8175x^2 + 4.905x}$$

$$v_x^2 = -0.8175x^2 + 4.905x$$

Para $v_x = 2 \frac{m}{s}$:

$$(2)^2 = -0.8175x^2 + 4.905x$$

$$0.8175x^2 - 4.905x + 4 = 0$$

Luego de normalizar la ecuación:

$$\frac{0.8175}{0.8175}x^2 - \frac{4.905}{0.8175}x + \frac{4}{0.8175} = \frac{0}{0.8175}$$

$$x^2 - 6x + 4.893 = 0$$

Con base en la fórmula simplificada del “chicharronero”:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(-6)}{2}\right]^2 - 4.893}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 4.893}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{4.107}$$

Para la primera vez que la rapidez es $v_x = 2 \frac{m}{s}$, x es el menor valor, por tanto:

$$x_2 = 3 - 2.027$$

$$x_2 = 0.973 \text{ m}$$

La posición del bloque la primera vez que $v_x = 2 \frac{m}{s}$ es:

$$x_2 = 0.973 \text{ m.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
W = 8;
g = 9.81;
x0 = 0;
v0 = 0;
μk = 0.25;
x1 = 1;
x2 = 4.5;
v3 = 2;
Δx = 6;
ΔF = -4;
```

Representación vectorial de las fuerzas

```
vF = {F, 0}
vFr = {-Fr, 0}
vN = {0, N}
vW = {0, -W}
```

Aplicación segunda ley de Newton y obtención de la fuerza de fricción cinética

```
vR = vF + vFr + vN + vW
ec1 = vR == - {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {ax, N}]
axSol = ax /. resp1[[1]]
Nsol = N /. resp1[[1]]
Fr = μk Nsol
```

Obtención ecuación de F

$$mF = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

$$bF = 4$$

$$F = mF x + bF$$

a) la rapidez del bloque en $x = 1$ m

Dado que $axSol = v_x \frac{d v_x}{d x}$, $v_x d v_x = axSol d x$, por tanto:

$$ec2 = \int_{v0}^{vx} v_x d v_x == \int_{x0}^x axSol d x$$

$$resp2 = \text{Solve}[ec2, vx]$$

$$vxSol = vx /. resp2[[2]]$$

$$v1 = vxSol /. x \rightarrow x1$$

b) la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la caja para $x = 4.5$ m

$$vR2 = vR /. \{x \rightarrow x2, N \rightarrow Nsol\}$$

$$magR2 = \text{Norm}[vR2]$$

c) la posición del bloque la primera vez que $v_x = 2 \frac{m}{s}$

$$ec3 = v3 == vxSol$$

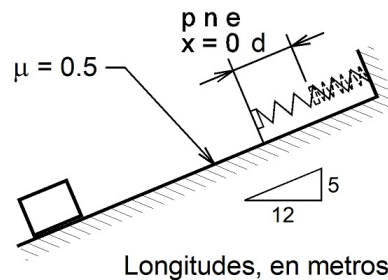
$$resp3 = \text{Solve}[ec3]$$

$$x3Sol = x /. resp3[[1]]$$

Ejercicio 14

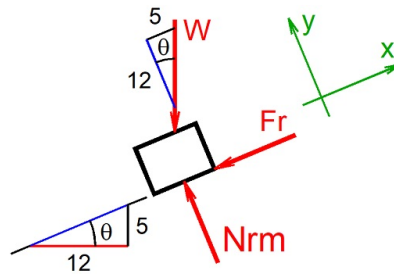
Un cuerpo con 0.65 kg de masa es lanzado sobre un plano inclinado, como el que se muestra en la figura, con una velocidad inicial de $5 \frac{m}{s}$ hacia la derecha a 1.2 m de distancia del extremo libre del resorte.

Si el coeficiente de fricción cinética entre el cuerpo y el plano es $\mu = 0.5$ y el resorte tiene una constante de rigidez $k = 200 \frac{N}{m}$, determine la distancia d que se comprime el resorte para detener al cuerpo.



Para resolver este problema, se subdivide el movimiento en dos intervalos, el primero desde que el cuerpo es lanzado hasta que hace contacto con el resorte, el segundo a partir de que el cuerpo está en contacto con el resorte hasta que se detiene.

Para el primer intervalo de movimiento, el diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



La hipotenusa del triángulo de pendiente del peso es:

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{25 + 144}$$

$$\text{hip} = \sqrt{169}$$

$$\text{hip} = 13$$

La representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es:

$$\vec{F}_r = \{-F_r, 0\}$$

$$\vec{N} = \{0, N_{rm}\}$$

$$\vec{W} = W \left\{ -\frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\}$$

$$\vec{W} = 0.65 (9.81) \left\{ -\frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\}$$

$$\vec{W} = 6.377 \left\{ -\frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\}$$

$$\vec{W} = \{-2.453, -5.886\} \text{ N}$$

La ecuación de movimiento del cuerpo en este intervalo, con base en la segunda ley de Newton es:

$$\overline{Fr} + \overline{N} + \overline{W} = m \overline{a_1}$$

$$\{-Fr, 0\} + \{0, N_{rm}\} + \{-2.453, -5.886\} = 0.65 \{a_1, 0\}$$

$$\{-Fr - 2.453, N_{rm} - 5.886\} = \{0.65 a_1, 0\}$$

De donde:

$$-Fr - 2.453 = 0.65 a_{1x}$$

$$N_{rm} - 5.886 = 0$$

$$N_{rm} = 5.886 \text{ N}$$

Con base en el valor de la magnitud de la normal se puede calcular la fuerza de fricción:

$$Fr = \mu N_{rm}$$

$$Fr = 0.5 (5.886)$$

$$Fr = 2.943 \text{ N}$$

Entonces, la aceleración del cuerpo en este intervalo es:

$$0.65 a_1 = -2.943 - 2.453$$

$$a_1 = -\frac{5.396}{0.65}$$

$$a_1 = -8.301 \frac{m}{s^2}$$

Para analizar el segundo intervalo de movimiento, es necesario obtener primero la rapidez final en el primer intervalo, que será la rapidez inicial en el segundo.

Para ello, a partir del valor de la aceleración anterior y con base en la definición de aceleración en función de la posición:

$$a_1 = v_1 \frac{dv_1}{dx_1}$$

$$v_1 \frac{dv_1}{dx_1} = -8.301$$

$$v_1 dv_1 = -8.301 dx_1$$

Las condiciones iniciales son, para $x_1 = 0$, $v_{1,0} = 5$:

$$\int_5^{v_1} v_1 dv_1 = \int_0^{x_1} -8.301 dx_1$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 \Big|_5^{v_1} = -8.301 x_1 \Big|_0^{x_1}$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} (5)^2 = -8.301 x_1 - [-8.301 (0)]$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} (25) = -8.301 x_1$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 = -8.301 x_1 + 12.5$$

$$v_1^2 = -16.60 x_1 + 25$$

Entonces, para $x_1 = 1.2 \text{ m}$, posición en la que hace contacto con el resorte:

$$v_1^2 = -16.60 (1.2) + 25$$

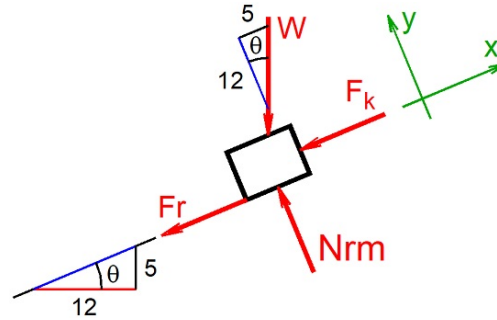
$$v_1^2 = -19.92 + 25$$

$$v_1^2 = 5.078$$

$$v_1 = \sqrt{5.078}$$

$$v_1 = 2.253 \frac{m}{s}$$

Para el segundo intervalo de movimiento, el diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



Como se puede observar, todas las fuerzas son las mismas que en el diagrama de cuerpo libre anterior, excepto que aparece la fuerza del resorte F_k .

La representación vectorial de esta fuerza es:

$$\vec{F}_k = \{-k x_2, 0\}$$

$$\vec{F}_k = \{-200 x_2, 0\}$$

Donde k es la constante de rigidez del resorte y x_2 es la posición del cuerpo, con respecto a la posición natural de equilibrio del resorte, p_{ne}, en donde se considera que $x_2 = 0$.

Para este punto, que es en el que el cuerpo hace contacto con el resorte, la rapidez es el calculado anteriormente, es decir:

$$v_{2,0} = 2.253 \frac{m}{s}$$

La ecuación de movimiento del cuerpo en este intervalo es:

$$\vec{F}_r + \vec{N} + \vec{W} + \vec{F}_k = m \vec{a}_1$$

$$\{-Fr, 0\} + \{0, Nrm\} + \{-2.453, -5.886\} + \{-200 x_2, 0\} = 0.65 \{a_2, 0\}$$

$$\{-Fr - 2.453 - 200 x_2, Nrm - 5.886\} = \{0.65 a_2, 0\}$$

Se puede observar que la expresión de la componente en y no cambia, por lo que:

$$Nrm = 5.886 \text{ N}$$

$$Fr = 2.943 \text{ N}$$

Entonces, la aceleración del cuerpo en este segundo intervalo es:

$$0.65 a_2 = -2.943 - 2.453 - 200 x_2$$

$$0.65 a_2 = -5.396 - 200 x_2$$

$$a_2 = -\frac{5.396}{0.65} - \frac{200}{0.65} x_2$$

$$a_2 = -8.301 - 307.7 x_2$$

Por consiguiente:

$$v_2 \frac{dv_2}{dx_2} = -8.301 - 307.7 x_2$$

$$v_2 dv_2 = (-8.301 - 307.7 x_2) dx_2$$

$$\int_{2.253}^{v_2} v_2 dv_2 = \int_0^{x_2} (-8.301 - 307.7 x_2) dx_2$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 \Big|_{2.253}^{v_2} = \left(-8.301 x_2 - \frac{307.7}{2} x_2^2 \right) \Big|_0^{x_2}$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} (2.253)^2 = -8.301 x_2 - 153.8 x_2^2 - [-8.301 (0) - 153.8 (0)^2]$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} (5.076) = -8.301 x_2 - 153.8 x_2^2$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 = -8.301 x_2 - 153.8 x_2^2 + 2.538$$

$$v_2^2 = 5.076 - 16.60 x_2 - 307.7 x_2^2$$

Dado que cuando se detiene el cuerpo, su rapidez es cero, es decir:

$$v_2 = 0$$

Entonces:

$$(0)^2 = 5.076 - 16.60 x_2 - 307.7 x_2^2$$

$$307.7 x_2^2 + 16.60 x_2 - 5.076 = 0$$

Se normaliza la expresión, luego de dividir todos los términos por 307.7:

$$\frac{307.7}{307.7} x_2^2 + \frac{16.60}{307.7} x_2 - \frac{5.076}{307.7} = \frac{0}{307.7}$$

$$x_2^2 + 0.05395 x_2 - 0.01650 = 0$$

Se aplica la fórmula simplificada del “chicharronero”:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x_{1,2} = -\frac{0.05395}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{0.05395}{2}\right)^2 + 0.01650}$$

Se considera únicamente la raíz positiva:

$$x_{2,1} = -0.02698 + \sqrt{(0.02698)^2 + 0.01650}$$

$$x_{2,1} = -0.02698 + \sqrt{0.0007277 + 0.01650}$$

$$x_{2,1} = -0.02698 + \sqrt{0.01722}$$

$$x_{2,1} = -0.02698 + 0.1312$$

$$x_{2,1} = 0.1042 \text{ m}$$

La distancia d que se comprime el resorte para detener la cuerpo es:

$$x_{2,1} = 0.1042 \text{ m.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

$m = 0.65;$
 $g = 9.81;$
 $x_0 = 0;$
 $v_0 = 5;$
 $x_{11} = 1.2;$
 $\mu = 0.5;$
 $k = 200;$
 $\Delta x = 12;$
 $\Delta y = 5;$
 $W = m g$

Representación vectorial de las fuerzas antes de hacer contacto con el resorte

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\mathbf{vFr} = \{-Fr, 0\}$$

$$\mathbf{vN} = \{0, Nrm\}$$

$$\mathbf{vW} = W \left\{ -\frac{\Delta y}{\text{hip}}, -\frac{\Delta x}{\text{hip}} \right\}$$

Ecuaciones de movimiento antes de hacer contacto con el resorte

$$\mathbf{ec1} = \mathbf{vFr} + \mathbf{vN} + \mathbf{vW} = m \{ax1, 0\}$$

$$\text{resp1} = \text{Solve}[\mathbf{ec1}, \{ax1, Nrm\}]$$

$$ax1Sol = ax1 /. \text{resp1}[[1]]$$

$$Nsol = Nrm /. \text{resp1}[[1]]$$

$$Fr = \mu Nsol$$

Rapidez del cuerpo al hacer contacto con el resorte

$$\mathbf{ec2} = \int_{x0}^{x1} ax1Sol \, dx1 = \int_{v0}^{v1} v1 \, dv1$$

$$\text{resp2} = \text{Solve}[\mathbf{ec2}, v1]$$

$$v1Sol = v1 /. \text{resp2}[[2]]$$

$$v11 = v1Sol /. x1 \rightarrow x11$$

Ecuaciones de movimiento después de hacer contacto con el resorte

$$\mathbf{vFk} = \{-k x2, 0\}$$

$$\mathbf{ec3} = \mathbf{vFr} + \mathbf{vN} + \mathbf{vW} + \mathbf{vFk} = m \{ax2, 0\}$$

$$\text{resp3} = \text{Solve}[\mathbf{ec3}, \{ax2, Nrm\}]$$

$$ax2Sol = ax2 /. \text{resp3}[[1]]$$

Rapidez del cuerpo después de hacer contacto con el resorte

$$\mathbf{ec4} = \int_0^{x2} ax2Sol \, dx2 = \int_{v11}^{v2} v2 \, dv2$$

$$\text{resp4} = \text{Solve}[\mathbf{ec4}, v2]$$

$$v2Sol = v2 /. \text{resp4}[[2]]$$

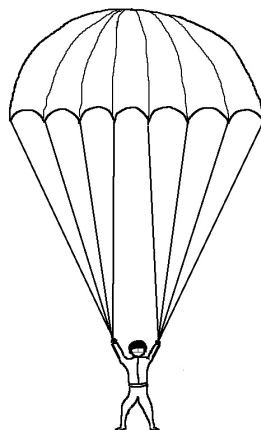
$$\mathbf{ec5} = 0 = v2Sol$$

$$\text{resp5} = \text{Solve}[\mathbf{ec5}]$$

$$dSol = x2 /. \text{resp5}[[2]]$$

Ejercicio 15

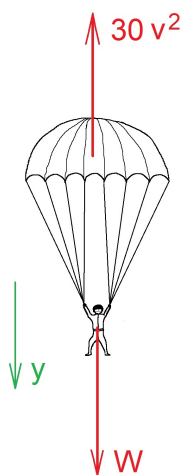
Una persona con paracaídas, que tiene una masa de 60 kg, se lanza desde lo alto del Mirador Cerro del Gallego en la Barranca de Urique, ubicado en Chihuahua, que tiene una profundidad de 1879 m.



Suponiendo que el movimiento es completamente vertical y se considera que la resistencia del aire tiene una magnitud $F_v = 30 v^2$, donde F_v está en N y v está en $\frac{m}{s}$, si la persona abre su paracaídas cuando ha adquirido una velocidad de $20 \frac{m}{s}$ hacia abajo, determine:

- su rapidez cuando ha bajado 5 m luego de que abrió su paracaídas;
- la magnitud de la aceleración un instante después de que abrió su paracaídas;
- la rapidez con la que llegó al fondo de la barranca.

Diagrama de cuerpo libre de la persona con paracaídas:



Dado que todas las fuerzas que actúan sobre la persona con paracaídas tienen la línea de acción, el problema se puede plantear de forma escalar. Entonces, la resultante de fuerzas es:

$$R = W - 30 v_y^2$$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$$R = m a_y$$

$$m g - 30 v_y^2 = m a_y$$

$$a_y = \frac{m g}{m} - \frac{30}{m} v_y^2$$

$$a_y = g - \frac{30}{60} v_y^2$$

$$a_y = 9.81 - 0.5 v_y^2$$

Dado que se solicita determinar la rapidez y la aceleración en términos de la posición, la manera más sencilla para obtenerla es aplicando la definición de aceleración siguiente:

$$a_y = v_y \frac{d v_y}{d y}$$

Entonces:

$$v_y \frac{d v_y}{d y} = 9.81 - 0.5 v_y^2$$

Luego de separar variables:

$$v_y d v_y = (9.81 - 0.5 v_y^2) d y$$

$$\frac{v_y d v_y}{9.81 - 0.5 v_y^2} = d y$$

Para evitar una incongruencia matemática que se puede presentar más adelante, conviene “voltar” los términos del denominador del miembro izquierdo, para lo cual se multiplica por (-1) ambos miembros:

$$\frac{v_y d v_y}{-(9.81 - 0.5 v_y^2)} = -d y$$

$$\frac{v_y d v_y}{0.5 v_y^2 - 9.81} = -d y$$

Se integran ambos miembros, considerando las condiciones iniciales las de la apertura del paracaídas, en donde se considera que la posición $y_0 = 0$, para la cual $v_{y0} = 20 \frac{m}{s}$:

$$\int_{v_{y0}}^{v_y} \frac{v_y d v_y}{0.5 v_y^2 - 9.81} = \int_{y_0}^y -d y$$

La integral del miembro izquierdo se puede resolver con el método de sustitución.

Si se establece que:

$$I = \int_{20}^{v_y} \frac{v_y d v_y}{0.5 v_y^2 - 9.81}$$

$$u = 0.5 v_y^2 - 9.81 \tag{1}$$

$$d u = 2 (0.5) v_y d v_y$$

$$1 v_y d v_y = d u$$

$$v_y d v_y = d u$$

$$v_y d v_y = d u \tag{2}$$

Se sustituyen 1 y 2 en I. En este caso, los límites de integración se refieren a la variable u que habría que calcularlos, pero que no conviene hacerlo debido a que luego de obtener la integral, se requiere “regresar” a la variable original v_y , por lo cual se escriben límites de integración temporales, l_1 y l_2 :

$$I = \int_{l_1}^{l_2} \frac{d u}{u}$$

$$I = (L u) \Big|_{l_1}^{l_2}$$

Se sustituye la expresión de u y los límites de integración de la variable original v_y :

$$\begin{aligned} I &= L (0.5 v_y^2 - 9.81) \Big|_{20}^{v_y} \\ I &= L (0.5 v_y^2 - 9.81) - L [0.5 (20)^2 - 9.81] \\ I &= L (0.5 v_y^2 - 9.81) - L [0.5 (400) - 9.81] \\ I &= L (0.5 v_y^2 - 9.81) - L (200 - 9.81) \\ I &= L (0.5 v_y^2 - 9.81) - L (190.2) \\ I &= L (0.5 v_y^2 - 9.81) - 5.248 \\ I &= L (0.5 v_y^2 - 9.81) - 5.248 \end{aligned}$$

Este resultado es el miembro izquierdo de la expresión anterior:

$$\int_{v_{y0}}^{v_y} \frac{v_y \, dv_y}{0.5 v_y^2 - 9.81} = \int_{y_0}^y -dy$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} L (0.5 v_y^2 - 9.81) - 5.248 &= -y \Big|_0^y \\ L (0.5 v_y^2 - 9.81) &= -y + 5.248 \\ L (0.5 v_y^2 - 9.81) &= -y + 5.248 \end{aligned}$$

Se aplica la función inversa del logaritmo natural, que es la exponencial:

$$\begin{aligned} e^{L(0.5 v_y^2 - 9.81)} &= e^{-y + 5.248} \\ 0.5 v_y^2 - 9.81 &= e^{-y + 5.248} \end{aligned}$$

La expresión puede escribirse como:

$$\begin{aligned} 0.5 v_y^2 - 9.81 &= e^{-y} e^{5.248} \\ 0.5 v_y^2 &= 190.2 e^{-y} + 9.81 \\ v_y^2 &= \frac{190.2}{0.5} e^{-y} + \frac{9.81}{0.5} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$v_y = \sqrt{380.4 e^{-y} + 19.62}$$

a) su rapidez cuando ha bajado 5 m luego de que abrió su paracaídas

Para $y = 5$ m:

$$\begin{aligned} v_y &= \sqrt{380.4 e^{-5} + 19.62} \\ v_y &= \sqrt{380.4 (0.006738) + 19.62} \\ v_y &= \sqrt{2.563 + 19.62} \\ v_y &= \sqrt{22.18} \\ v_y &= 4.710 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

La rapidez de la persona con paracaídas cuando ha bajado 5 m es:

$$v_y = 4.710 \frac{m}{s}.$$

b) la magnitud de la aceleración un instante después de que abrió su paracaídas

Dado que la aceleración es:

$$a_y = 9.81 - 0.5 v_y^2$$

Cuando se abrió el paracaídas, $v_{y0} = 20 \frac{m}{s}$:

$$a_y = 9.81 - 0.5 (20)^2$$

$$a_y = 9.81 - 0.5 (400)$$

$$a_y = 9.81 - 200$$

$$a_y = -190.2 \frac{m}{s^2}$$

La magnitud de la aceleración un instante después de que abrió su paracaídas es:

$$a_y = -190.2 \frac{m}{s^2}.$$

c) la rapidez con la que llegó al fondo de la barranca

Cuando la persona llegó al fondo de la barranca, su posición es de más de 1800 m. Suponiendo este valor, al sustituirlo en la expresión de su rapidez:

$$v_y = \sqrt{380.4 e^{-y} + 19.62}$$

$$v_y = \sqrt{380.4 e^{-1800} + 19.62}$$

El valor de la exponencial tiende a cero:

$$e^{-1800} = 1.862 \times 10^{-782} \rightarrow 0$$

Entonces:

$$v_y = \sqrt{19.62}$$

$$v_y = 4.429 \frac{m}{s}$$

La rapidez con la que la persona con paracaídas llegó al fondo de la barranca es:

$$v_y = 4.429 \frac{m}{s}.$$

A la rapidez anterior se le denomina rapidez terminal, y es cuando la rapidez del cuerpo en estudio ya no cambia, es decir, se mantiene constante, por lo que la aceleración es cero.

Se puede verificar el resultado anterior al resolver la expresión de la aceleración igualada a cero:

$$a_y = 9.81 - 0.5 v_y^2$$

$$0 = 9.81 - 0.5 v_y^2$$

$$0.5 v_y^2 = 9.81$$

$$v_y^2 = \frac{9.81}{0.5}$$

$$v_y = \sqrt{19.62}$$

$$v_y = 4.429 \frac{m}{s}$$

Que es exactamente igual al resultado anterior.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 60;
g = 9.81;
Fv = 30 (vy[y])2;
y0 = 0;
vy0 = 20;
y1 = 5;
```

Aplicación segunda ley de Newton y obtención de la aceleración

```
ec1 = m g - Fv == m ay
resp1 = Solve[ec1, ay] // Simplify
aySol = ay /. resp1[[1]]
```

Dado que $aySol = v_y \frac{d v_y}{d y}$, $-d/y = \frac{v_y d v_y}{-aySol}$, por tanto:

```
ecDif = (-1) aySol == (-1) vy[y] × vy' [y]
resp2 = DSolve[{ecDif, vy[0] == 20}, vy[y], y]
vySol[y] = resp2[[1]]
```

a) su rapidez cuando ha bajado 5 m luego de que abrió su paracaídas

```
vy1 = vySol[y] /. y → y1
```

b) la magnitud de la aceleración un instante después de que abrió su paracaídas

```
ay0 = aySol /. vy[y] → vy0
```

c) la rapidez con la que llegó al fondo de la barranca

```
vyTerm1 = vySol[y] /. y → 1800
```

Solución alternativa:

```
ec3 = aySol == 0
resp3 = Solve[ec3]
vyTerm2 = vy[y] /. resp3[[2]]
```

*UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Academia de Dinámica
Febrero de 2023*

Yukihiro Minami Koyama



Este trabajo está bajo una
[licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)